Μάθημα 10ο Ε12. Θεωρία Ελέγχου 13/11/2018

$\Sigma(A,B)$ πλήρως ελέγξιμο

$$\mathcal{X}_c = \mathbb{R}^n = \mathcal{X}$$
$$\Updownarrow$$
$$\mathrm{rank}(\Gamma_c) = n$$
$$\Updownarrow$$
$$\mathrm{rank}(sI-A \,\vdots\, B) = n \quad \forall\, s \in \mathbb{C}$$

$\Sigma(A,C)$ πλήρως παρατηρήσιμο

$$(\underline{x}' = A\underline{x}, \quad x(0) = x_0, \quad \underline{y}(t) = C\underline{x})$$
$$\Updownarrow$$
$$\mathrm{rank}(\Gamma_o) = n$$
$$\Updownarrow$$
$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} sI-A \\ C \end{bmatrix} = n \quad \forall\, s \in \mathbb{C}$$

$\mathcal{X}_{\bar{o}}$ μη παρατηρήσιμος υπόχωρος $= N_r(\Gamma_o)$

$\Sigma(A,B,C,D)$

$$\underline{x}' = A\underline{x} + B\underline{u} \qquad \underline{x}(0) = \underline{x}_0$$
$$\underline{y} = C\underline{x} + D\underline{u}$$
$$\mathbb{R}^n = \mathcal{X} = \mathcal{X}_{co} \oplus \mathcal{X}_{c\bar{o}} \oplus \mathcal{X}_{\bar{c}o} \oplus \mathcal{X}_{\bar{c}\bar{o}}$$
$$\mathcal{X}_{co} \oplus \mathcal{X}_{c\bar{o}} = \mathcal{X}_c \quad \mathcal{R}(\Gamma_c)$$
$$\mathcal{X}_{c\bar{o}} \oplus \mathcal{X}_{\bar{c}\bar{o}} = \mathcal{X}_{\bar{o}} = N_r(\Gamma_o)$$

$\mathcal{X}_{co}$ = ελέγξιμος και παρατηρήσιμος

$\mathcal{X}_{c\bar{o}}$ = ελέγξιμος και μη παρατηρήσιμος

$\mathcal{X}_{\bar{c}o}$ = μη ελέγξιμος και παρατηρήσιμος

$\mathcal{X}_{\bar{c}\bar{o}}$ = μη ελέγξιμος και μη παρατηρήσιμος

$$\Sigma(A,B,C,D) \overset{Q}{\sim} \Sigma(\hat{A},\hat{B},\hat{C},\hat{D}) \qquad \underline{x} \to \hat{\underline{x}}$$

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} x_{co} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ x_{\bar{c}o} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_{c\bar{o}} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ x_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix}$$

Θεώρημα (Kalman): Έστω $\Sigma(A,B,C,D)$ που δεν είναι πλήρως ελέγξιμο ούτε πλήρως παρατηρήσιμο. Τότε $\exists\, Q$, $\det(Q) \neq 0$: $\Sigma(A,B,C,D) \sim \Sigma(\hat{A},\hat{B},\hat{C},D)$ όπου

$$Q^{-1}AQ = \hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & 0 & \hat{A}_{13} & 0 \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} & \hat{A}_{23} & \hat{A}_{24} \\ 0 & 0 & \hat{A}_{33} & 0 \\ 0 & 0 & \hat{A}_{43} & \hat{A}_{44} \end{bmatrix}, \quad Q^{-1}B = \hat{B} = \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{C} = \begin{bmatrix} \hat{C}_1 & 0 & \hat{C}_2 & 0 \end{bmatrix}$$ όπου

(i) $\Sigma\left(\begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & 0 \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \end{bmatrix}\right)$ πλήρως ελέγξιμο

(ii) $\Sigma\left(\begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{13} \\ 0 & \hat{A}_{33} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \hat{C}_1 & \hat{C}_3 \end{bmatrix}\right)$ πλήρως παρατηρήσιμο

(iii) $\Sigma(\hat{A}_{11}, \hat{B}_1, \hat{C}_1, D)$ πλήρως ελέγξιμο και πλήρως παρατηρήσιμο

ορίζω

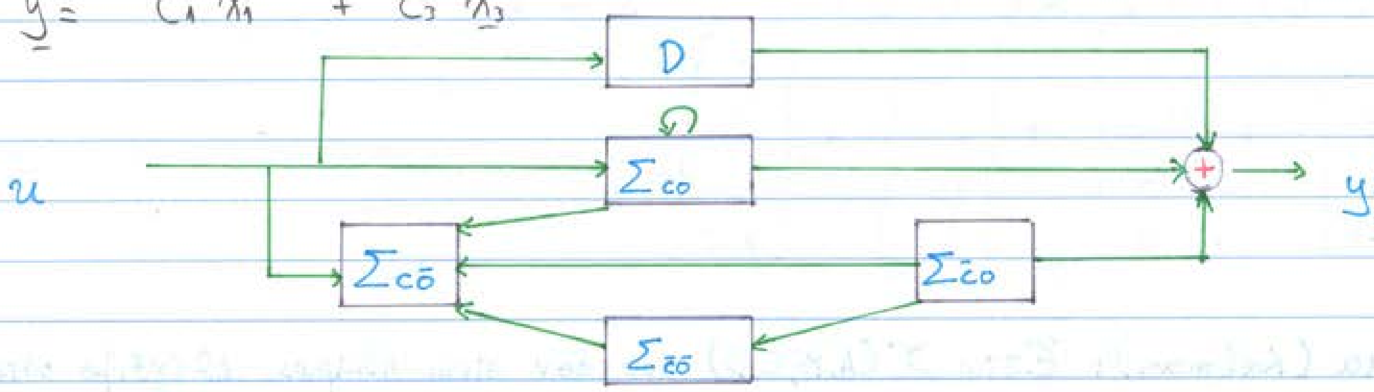
- $\mathcal{X}_{c\bar{o}} = \mathcal{X}_c \cap \mathcal{X}_{\bar{o}} = \mathcal{R}(\Gamma_c) \cap N_r(\Gamma_o)$ από αυτόν μπορώ να ορίσω:
- $\mathcal{X}_{co}$: συμπληρώνω τη βάση του $\mathcal{X}_{c\bar{o}}$ στον $\mathcal{X}_c$
- $\mathcal{X}_{\bar{c}\bar{o}}$: συμπληρώνω τη βάση του $\mathcal{X}_{c\bar{o}}$ στον $\mathcal{X}_{\bar{o}}$

Από τους 3 αυτούς ορίζω τον 4ο

- $\mathcal{X}_{\bar{c}o}$: $(\mathcal{X}_{c\bar{o}} \oplus \mathcal{X}_{co} \oplus \mathcal{X}_{\bar{c}\bar{o}})$ και συμπληρώνω τη βάση μέσα στον $\mathbb{R}^n$

Αν $\left.\begin{aligned} \underline{\hat{x}}' &= \hat{A}\underline{\hat{x}} + \hat{B}\underline{u} \\ \underline{y} &= \hat{C}\underline{\hat{x}} + \hat{D}u \end{aligned}\right\}$ και $\underline{\hat{x}} = [\hat{x}_1^T \;\; \hat{x}_2^T \;\; \hat{x}_3^T \;\; \hat{x}_4^T]$

$$\begin{aligned}
\underline{\hat{x}}_1' &= \hat{A}_{11}\hat{x}_1 + \hat{A}_{13}\underline{\hat{x}}_3 + \hat{B}_1\underline{u} \\
\underline{\hat{x}}_2' &= \hat{A}_{21}\underline{\hat{x}}_1 + \hat{A}_{22}\underline{\hat{x}}_2 + \hat{A}_{23}\underline{\hat{x}}_3 + \hat{A}_{24}\underline{\hat{x}}_4 + \hat{B}_2\underline{u} \\
\underline{\hat{x}}_3' &= \hat{A}_{33}\underline{\hat{x}}_3 \\
\underline{\hat{x}}_4' &= \hat{A}_{43}\underline{\hat{x}}_3 + \hat{A}_{44}\underline{\hat{x}}_4 \\
\underline{y} &= \hat{C}_1\hat{x}_1 + \hat{C}_3\underline{\hat{x}}_3
\end{aligned}$$



Παράδειγμα: Έστω $\Sigma(A,B,C,D)$ πλήρως παρατηρήσιμο, μη πλήρως ελέγξιμο

$\sim\Sigma(\hat{A},\hat{B},\hat{C},\hat{D})$ $\quad \hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ 0 & \hat{A}_{22} \end{bmatrix}$, $\hat{B} = \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\hat{C} = [\hat{C}_1 \;\; \hat{C}_2]$, D

Έστω η συνάρτηση μεταφοράς

$$\hat{G}(s) = [\hat{C}_1 \;\; \hat{C}_2] \begin{bmatrix} sI - \hat{A}_{11} & -\hat{A}_{12} \\ 0 & sI - \hat{A}_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} + D \quad (*)$$

Ε12. Θεωρία Ελέγχου 13/11/2018

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \\ 0 & C^{-1} \end{pmatrix} \qquad Ax + BC^{-1} = 0$$

$$\circledast = \left[\hat{C}_1 \vdots \hat{C}_2\right] \begin{bmatrix} (sI-\hat{A}_{11})^{-1} & * \\ 0 & (sI-\hat{A}_{22})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} + D$$

$$= \hat{C}_1 (sI - \hat{A}_{11})^{-1} \hat{B}_1 + D$$

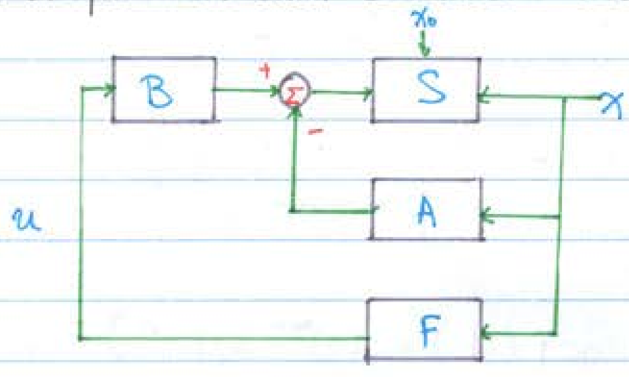
Άρα η συνάρτηση μεταφοράς εξαρτάται μόνο από το $\Sigma(A_{11}, B_1, C_1, D)$ που είναι και πλήρως ελέγξιμο και πλήρως παρατηρήσιμο

Ανάδραση Καταστάσεων

$$\begin{cases} \underline{x}' = A\underline{x} + B\underline{u} \\ \underline{u} = F\underline{x} \end{cases} \qquad A \in \mathbb{R}^{n\times n},\ B \in \mathbb{R}^{n\times m} \\ F \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

$$\underline{x}' = A\underline{x} + BF\underline{x} \implies \underline{x}' = (A+BF)\underline{x} \implies \underline{x}(t) = e^{(A+BF)t}\underline{x}_0$$

αν πχ το σύστημα δεν είναι ευσταθές τότε μέσω ανάδρασης μπορώ να δουλέψω



$\underline{x}_0 \longrightarrow \underline{0}$

$\sigma(A+BF) \subseteq \mathbb{C}_-$

$A_c = A + BF$

Απλή μορφή του προβλήματος

$$\begin{cases} \underline{x}' = A\underline{x} + \underline{b}u, & x(0) = x_0 \\ u = \underline{f}^T \underline{x} = \sum_{i=1}^{n} f_i \cdot x_i \end{cases} \qquad \underline{x}' = (\overbrace{A + \underline{b}\,\underline{f}^T}^{A_c})\underline{x}$$

Έστω $\Gamma_c = [\underline{b}\ A\underline{b}\ \dots\ A^{n-1}\underline{b}]$ $\quad \Sigma(A, \underline{b})$ πλήρως ελέγξιμο $\Leftrightarrow \det(\Gamma_c) \neq 0$

Έστω $\varphi(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0$

Αποτέλεσμα: Αν $(A, \underline{b})$ πλήρως ελέγξιμο, τότε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\varphi_{\underbrace{A+bf^T}_{A_c}}$ μπορεί να επιλεγεί αυθαίρετα

Ορίζουμε τα διανύσματα $\underline{q_1}, \underline{q_2}, \dots, \underline{q_n} \in \mathbb{R}^n$

$$\left.\begin{aligned}
\underline{q_n} &= \underline{b} \\
\underline{q_{n-1}} &= A\underline{q_n} + \alpha_{n-1}\underline{b} &&= A\cdot\underline{b} + \alpha_{n-1}\underline{b} \\
\underline{q_{n-2}} &= A\underline{q_{n-1}} + \alpha_{n-2}\underline{b} &&= A^2\cdot\underline{b} + \alpha_{n-1}A\underline{b} + \alpha_{n-2}\underline{b} \\
&\vdots &&\vdots \\
\underline{q_1} &= A\underline{q_2} + \alpha_1\underline{b} &&= A^{n-1}\underline{b} + \alpha_{n-1}A^{n-2}\underline{b} + \dots + \alpha_1\underline{b}
\end{aligned}\right\}$$

Λήμμα: (i) $A\underline{q_1} + \alpha_0\underline{b} = 0$

(ii) Έστω $Q = [\underline{q_1}, \underline{q_2}, \dots \underline{q_n}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$, τότε $\det(Q) \neq 0 \iff \Sigma(A,\underline{b})$ πλήρως ελέγξιμο

Απόδειξη:

(i) $A\underline{q_1} + \alpha_0\underline{b} = A(A^{n-1}\underline{b} + \alpha_{n-1}A^{n-2}\underline{b} + \dots + \alpha_1\underline{b}) + \alpha_0\underline{b} = (A^n + \alpha_{n-1}A^{n-1} + \dots + \alpha_1 A + \alpha_0 I)\underline{b}$

$= \varphi(A)\cdot\underline{b} = 0$

(ii) $Q = [\underline{q_1}\ \underline{q_2}\ \dots\ \underline{q_{n-1}}\ \underline{q_n}] =$

$$= \underbrace{\left[\underline{b} \;\vdots\; A\underline{b} \;\vdots\; \dots \;\vdots\; A^{n-2}\underline{b} \;\vdots\; A^{n-1}\underline{b}\right]}_{\Gamma_c} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & & \alpha_{n-1} & 1 \\ \alpha_2 & & \iddots & 1 & 0 \\ \vdots & \iddots & & 0 & \vdots \\ \alpha_{n-1} & & \iddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{H}$$

Έχουμε $\det(H) = (-1)^{n+1} \neq 0$

$Q = \Gamma_c \cdot H \Rightarrow \det(Q) = \det(\Gamma_c)\cdot\det(H) = (-1)^{n+1}\cdot\det(\Gamma_c) \Rightarrow$

$\det(Q) \neq 0 \iff \Sigma(A, b)$ πλήρως ελέγξιμο