Μάθημα 11ο　　Ε12. Θεωρία Ελέγχου　　20/11/2018

Θεώρημα: $\Sigma(A,\underline{b})$ πλήρως ελέγξιμο $\iff \exists\ Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\det(Q)\neq 0$:
$\Sigma(A,b) \overset{Q}{\simeq} \Sigma(\hat{A},\hat{b})$ όπου $(\hat{A},\hat{b})$ σε κανονική μορφή ελεγξιμότητας

Απόδειξη:

($\Rightarrow$) Έστω ότι $\Sigma(A,\underline{b})$ πλήρως ελέγξιμο, τότε $\exists\ Q$, $\det(Q)\neq 0$ όπως κατασκευάστηκε στο προηγούμενο λήμμα

Αν $\hat{A} = Q^{-1}AQ \iff Q\hat{A} = AQ$

$$AQ = A\begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \dots & q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \dots & q_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \dots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\hat{b} = Q^{-1}b \iff Q\hat{b} = b \implies \hat{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

($\Leftarrow$) Έστω $\Sigma(\hat{A},\hat{b})$ είναι σε κανονική μορφή ελεγξιμότητας

$$\hat{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \hat{A}\hat{b} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \dots & & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\hat{A}^2\hat{b} = \hat{A}(\hat{A}\hat{b}) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ * \\ * \end{bmatrix}$$ και γενικά

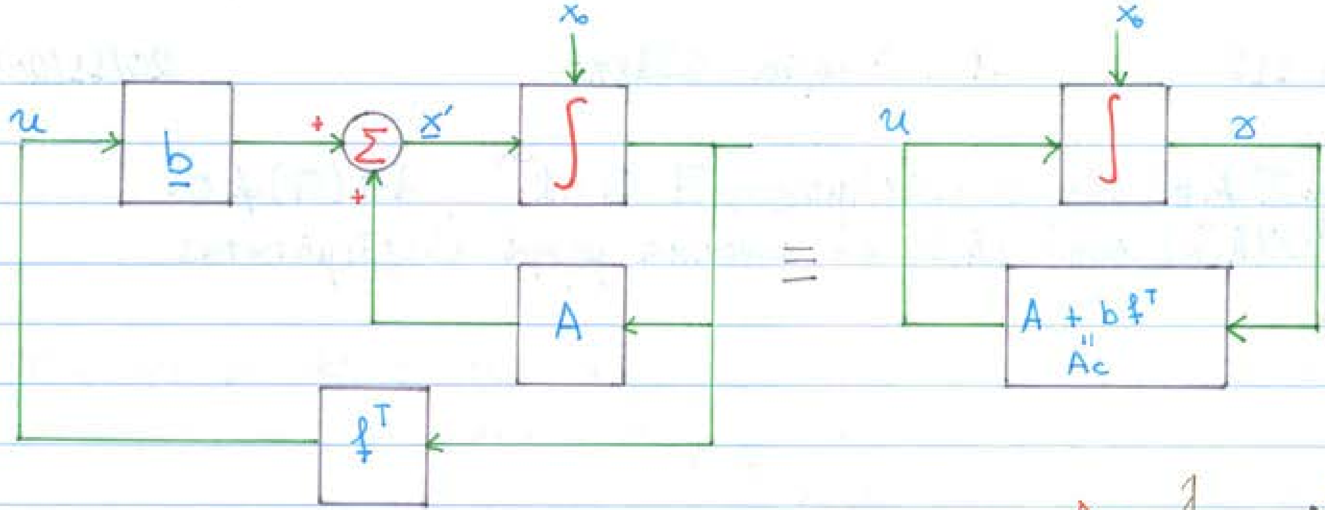
$$\hat{\Gamma}_c = \begin{bmatrix} \hat{b} & \hat{A}\hat{b} & \dots & \hat{A}^{n-1}\hat{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & \ddots & * \\ 0 & 1 & \dots & \vdots \\ 1 & * & \dots & * \end{bmatrix}$$

$\mathrm{rank}(\hat{\Gamma}_c) = n$
Τότε $\Sigma(A,b)$ πλήρως ελέγξιμο

Έστω

$$\left.\begin{aligned} \underline{x}' &= A\underline{x} + \underline{b}u \\ u &= \underline{f}^T\underline{x} \end{aligned}\right\}$$

$$\implies \underline{x}' = (\underbrace{A + \underline{b}\,\underline{f}^T}_{A_c})\,\underline{x}$$



Επιθυμητές Ιδιότητες $\sigma(A_c)$

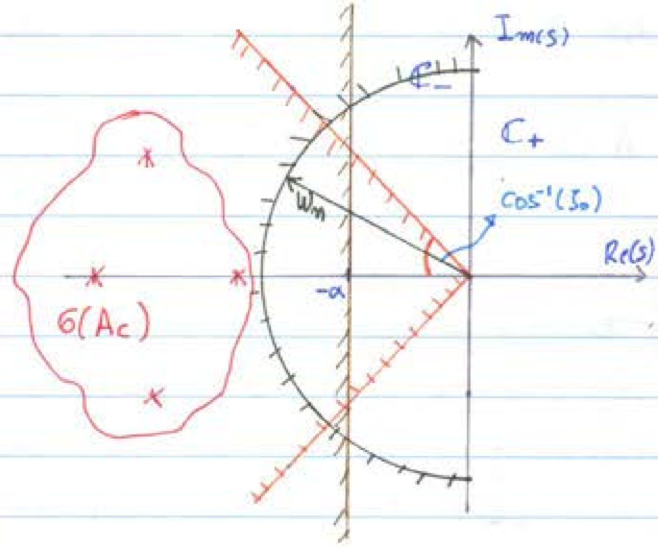
(i) $\sigma(A_c) \subseteq \mathbb{C}_-$ $\quad (Re(\lambda_i) < 0 \ \forall i = 1, \ldots, n)$

(ii) Settling time (t_s) $\quad Re(\lambda_i) \leq -\alpha$

(iii) Rise time (t_r) $\quad |\lambda_i| \geq \omega_n$

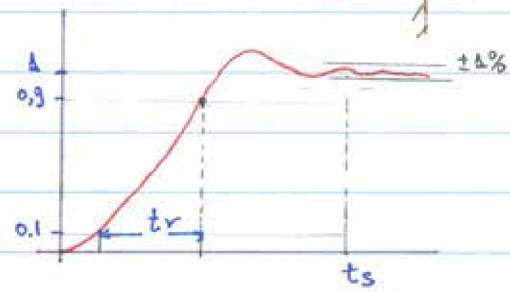
(iv) Απόσβεση ταλαντώσεων

$$\frac{|Re(\lambda_i)|}{|\lambda_i|} \geq \zeta_0 \quad \left\{ \begin{array}{c} \zeta_0 \text{ σταθερά απόσβεσης} \\ 0{,}7 \leq \zeta \leq 1 \end{array} \right\}$$



υπερακοντισμός (% overshoot)

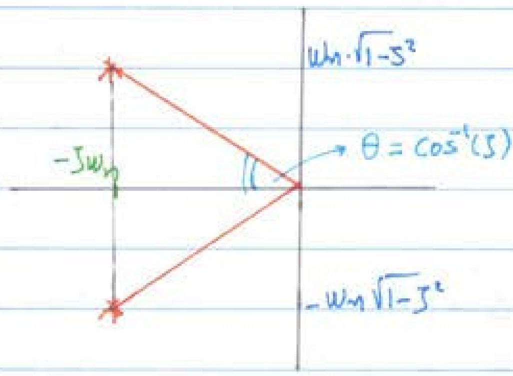
$$\% \text{υπερ} = 1 - \zeta_0/0{,}6$$



$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\zeta\omega_n \end{bmatrix} \qquad 0 \leq \zeta \leq 1$$

$$\lambda_{1,2}(A) = \left\{ -\zeta\omega_n \pm i\,\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \right\}$$



Ε12. Θεωρία Ελέγχου

20/11/2018

Θεώρημα: Έστω $\Sigma(A,\underline{b})$ $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $\underline{b}\in\mathbb{R}^n$ και έστω $\mathbb{D}=\{d(\lambda)\in\mathbb{R}[\lambda], \deg(d)=n\}$ τότε $\forall\, d\in\mathbb{D}$ $\exists\, \underline{f}\in\mathbb{R}^n$: $\varphi_{A+\underline{b}\underline{f}^T}(\lambda)=d(s)$ αν και μόνο αν $\Sigma(A,b)$ πλήρως ελέγξιμο.

Απόδειξη: $(\Leftarrow)$ Έστω $\Sigma(A,\underline{b})$ πλήρως ελέγξιμο τότε $\exists\, Q$, $\det(Q)\neq 0$ $\Sigma(A,\underline{b}) \overset{Q}{\sim} \Sigma(\hat{A},\hat{\underline{b}})$ όπου $\hat{A},\hat{b}$ σε κανονική μορφή ελεγξιμότητας δηλαδή

$$\hat{A}=Q^{-1}AQ=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 1 & & \vdots\\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1\\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \dots & & -\alpha_{n-1}\end{bmatrix},\quad \hat{b}=Q^{-1}b=\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$$

Έστω $d(\lambda)\in\mathbb{D}$ $d(\lambda)=\lambda^n+d_{n-1}\lambda^{n-1}+\dots+d_0$ (αυθαίρετο)

Έστω $\hat{\underline{f}}^T=[\hat{f}_0\ \hat{f}_1\ \dots\ \hat{f}_{n-1}]\in\mathbb{R}^n$ τότε

$$\hat{A}+\hat{\underline{b}}\hat{\underline{f}}^T=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots\\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1\\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \dots & & -\alpha_{n-1}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{bmatrix}[\hat{f}_0\ \hat{f}_1\dots\hat{f}_{n-1}]=\begin{bmatrix}0 & 1 & \dots & 0\\ 0 & 0 & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1\\ \hat{f}_0-\alpha_0 & \hat{f}_1-\alpha_1 & \dots & \hat{f}_{n-1}-\alpha_{n-1}\end{bmatrix}$$

Άρα είναι σε μορφή companion

Επομένως το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του $\hat{A}+\hat{\underline{b}}\hat{\underline{f}}^T$ είναι:

$p(\lambda)=\lambda^n+\underbrace{(\alpha_{n-1}-\hat{f}_{n-1})}_{d_{n-1}}\lambda^{n-1}+\dots+\underbrace{(\alpha_0-\hat{f}_0)}_{d_0}$ επειδή θέλω να ταυτίζεται με το $d(\lambda)$

επιλέγοντας $\hat{f}_i=\alpha_i-d_i$ $i=0,1,\dots,n-1$ έχουμε $p(\lambda)=d(\lambda)$

η $\hat{\underline{f}}^T=[\alpha_0-d_0\quad \alpha_1-d_1\quad\dots\quad \alpha_{n-1}-d_{n-1}]$

Έστω ότι $\underline{f}^T=\hat{\underline{f}}^TQ^{-1}$, τότε $A_c=A+\underline{b}\underline{f}^T=Q\hat{A}Q^{-1}+Q\hat{\underline{b}}\hat{\underline{f}}^TQ^{-1}=Q(\hat{A}+\hat{\underline{b}}\hat{\underline{f}}^T)Q^{-1}$

$\varphi_{A_c}(\lambda)=\varphi_{A+\underline{b}\underline{f}^T}(\lambda)=\varphi_{\hat{A}+\hat{\underline{b}}\hat{\underline{f}}^T}(\lambda)=d(\lambda)$

Παρατήρηση: Η ανάδραση $\underline{f}^T$ ώστε $\varphi_{A+\underline{b}\underline{f}^T}(\lambda)=d(\lambda)$ ορίζεται ως:

$\underline{f}^T=(\underline{\alpha}^T-\underline{d}^T)(\Gamma_c\cdot H_\alpha)^{-1}$ όπου:

$\underline{\alpha}^T=[\alpha_0\ \alpha_1\dots\ \alpha_{n-1}]$

$\underline{d}^T=[d_0\ d_1\ \dots\ d_{n-1}]$

$\Gamma_c=[\underline{b}\ \ A\underline{b}\ \dots\ A^{n-1}\underline{b}]$

$$H_\alpha=\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_{n-1} & 1\\ \alpha_2 & \alpha_3 & & \dots & & \\ \alpha_3 & & \dots & & & \\ \vdots & \dots & & & 0 & \\ \alpha_{n-1} & & & & & \\ 1 & & & & & \end{bmatrix}$$

Ένας πίνακας Hankel

$\Leftarrow$) Έστω ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\varphi_{A+\underline{b}\underline{f}^T}(\lambda)$ καθορίζεται αυθαίρετα (ως πολυώνυμο του $\mathbb{D}$) μέσω του $\underline{f}^T$. Έστω (για αντίφαση) ότι το $\Sigma(A,\underline{b})$ δεν είναι πλήρως ελέγξιμο τότε (Kalman)

$\exists\, R \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\det(R) \neq 0 : \Sigma(A,\underline{b}) \overset{R}{\sim} \Sigma(\tilde{A},\tilde{\underline{b}})$ όπου

$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix}$, $\tilde{b} = \begin{bmatrix} \tilde{b}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$ όπου $\Sigma(\tilde{A}_{11}, \tilde{b}_1)$ είναι πλήρως ελέγξιμο.

Έστω $\tilde{f}^T = [\tilde{f}_1^T \,\vdots\, \tilde{f}_2^T]$ τότε $\tilde{A} + \tilde{b}\tilde{f}^T = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{b}_1 \\ 0 \end{bmatrix} [\tilde{f}_1^T \,\vdots\, \tilde{f}_2^T]$

$= \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} + \tilde{b}_1\tilde{f}_1^T & \tilde{A}_{12} + \tilde{b}_1\tilde{f}_2^T \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix}$

Επομένως αν $\underline{f}^T = \tilde{\underline{f}}^T R^{-1}$ $\varphi_{A+\underline{b}\underline{f}^T}(\lambda) = \varphi_{R(\tilde{A}+\tilde{b}\tilde{f}^T)R^{-1}}(\lambda) = \varphi_{\tilde{A}_{11}+\tilde{b}_1\tilde{f}_1^T}(\lambda) \cdot \varphi_{\tilde{A}_{22}}(\lambda)$

Άτοπο γιατί το φ_{A+bf^T} έχει αναγκαστικά σταθερό παράγοντα.

Παράδειγμα: Έστω $\Sigma(A,b)$. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\varphi_A(\lambda) = (\lambda-1)^2\lambda = \lambda(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = \lambda^3 - \underset{\alpha_2}{2}\lambda^2 + \underset{\alpha_1}{1}\lambda + \underset{\alpha_0}{0} \Longrightarrow \underline{\alpha}^T = [0 \;\; 1 \;\; -2]$

Επιθυμητό χαρακτηριστικό πολυώνυμο του $A + \underline{b}\underline{f}^T$ είναι $(\lambda-1)^3 = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1$

$\underline{d}^T = [1 \;\; 3 \;\; 3]$

Ο πίνακας ελεγξιμότητας $\Gamma_c = [\underline{b} \;\; A\underline{b} \;\; A^2\underline{b}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$\det(\Gamma_c) = -1 \neq 0 \Longrightarrow \Sigma(A,b)$ πλήρως ελέγξιμο

$f^T = (\alpha^T - d^T)(\Gamma_c H_\alpha)^{-1} = [-1, -2, -5] \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}^{-1} = [-5 \,\vdots\, -8 \,\vdots\, -7]$

$A + \underline{b}\underline{f}^T = \begin{bmatrix} -4 & -8 & -7 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\varphi_{A+\underline{b}\underline{f}^T} = (\lambda+1)^3$ (επαλήθευση)