Ορισμός Έστω $\mathcal{A}$ σ-άλγεβρα και $\mu: \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ μέτρο. Λέμε ότι το $A \in \mathcal{A}$ έχει *μέτρο μηδέν* αν $\mu(A) = 0$.

Μάθημα 3°
9/10/18

- Αν $\mu(A_n) = 0 \ \forall n$ τότε $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = 0 \Rightarrow$ το $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ έχει μέτρο μηδέν

- Λέμε ότι η $P(x)$ ισχύει *μ-σχεδόν παντού* αν $\exists N \in \mathcal{A}$ με $\mu(N) = 0$ τ.ω. η $P(x)$ ισχύει $\forall x \notin N$

Ορισμός Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου. Λέμε ότι το μ είναι *πλήρες* αν $\forall A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) = 0$ και $\forall B \subseteq A$ ισχύει $B \in A$. (οπότε από τη μονοτονία του μέτρου $\mu(B) = 0$)

Θεώρημα Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου. Ορίζουμε $N' = \{N \in \mathcal{A} / \mu(N) = 0\}$. Ορίζουμε $\overline{\mathcal{A}} = \{E \cup F / E \in \mathcal{A}, F \subseteq N, \mu(N) = 0\}$. Τότε η $\overline{\mathcal{A}}$ είναι σ-άλγεβρα και αν ορίσουμε $\overline{\mu}: \overline{\mathcal{A}} \to [0, +\infty]$ με $\overline{\mu}(E \cup F) := \mu(E)$ τότε η $\overline{\mu}$ είναι καλά ορισμένη, είναι πλήρες μέτρο στην $\overline{\mathcal{A}}$ και $\overline{\mu}|_{\mathcal{A}} = \mu$. Επιπλέον, το $\overline{\mu}$ είναι μοναδικό (με τις παραπάνω ιδιότητες)

απόδειξη (i) η $\overline{\mathcal{A}}$ είναι σ-άλγεβρα.

① έστω $A_n \in \overline{\mathcal{A}}$. Τότε $A_n = E_n \cup F_n$, $E_n \in \mathcal{A}$, $F_n \subseteq N_n$, $\mu(N_n) = 0$.

Έχουμε $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \underbrace{\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)}_{\in \mathcal{A}} \cup \underbrace{\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right)}_{\subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n \text{ και } \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} N_n\right) = 0} \in \overline{\mathcal{A}}$

② Έστω $A \in \overline{\mathcal{A}}$. Έχουμε $A = E \cup F$, $E \in \mathcal{A}$, $F \subseteq N$, $\mu(N) = 0$.

Γράφουμε $A = \underbrace{E}_{\text{ξένα}} \cup \underbrace{(F \setminus E)}$ και $F_1 = F \setminus E \subseteq N \setminus E = N_1$, $\mu(N_1) = 0$

$A = E \cup F_1$, $E \cap F_1 = \emptyset$. Τότε $A^c = \underbrace{(E \cup N_1)^c}_{\in \mathcal{A}} \cup \underbrace{(N_1 \setminus F_1)}_{\subseteq N_1, \ \mu(N_1) = 0} \in \overline{\mathcal{A}}$

(ii) Υποθέτουμε ότι $A = E_1 \cup F_1 = E_2 \cup F_2$, $E_1, E_2 \in \mathcal{A}$, $F_1 \subseteq N_1$, $F_2 \subseteq N_2$, $\mu(N_1) = \mu(N_2) = 0$. Ζητάμε $\mu(E_1) = \mu(E_2)$.

Είναι $E_1 \subseteq E_2 \cup F_2 \subseteq E_2 \cup N_2 \Rightarrow \mu(E_1) \leq \mu(E_2 \cup N_2) \leq \mu(E_2) + \overset{0}{\mu(N_2)}$

$\Rightarrow \mu(E_1) \leq \mu(E_2)$ Όμοια $\mu(E_2) \leq \mu(E_1)$. Τελικά μ καλά ορισμένη

(iii) Το $\bar{\mu}$ είναι μέτρο: αρκεί η αριθμήσιμη προσθετικότητα.
Έστω $A_n \in \bar{\mathcal{A}}$, ξένα. Κάθε $A_n = E_n \cup F_n$ όπου $E_n \cap F_n = \emptyset$,
$F_n \subseteq N_n$, $\mu(N_n) = 0$. Έχουμε $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \underbrace{\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)}_{\text{ξένα}} \cup \underbrace{\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right)}_{}$ και

$\bigcup F_n \subseteq \bigcup N_n$ και $\mu(\bigcup N_n) = 0$

Τότε $\bar{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \overset{\text{Επξεμα στην }\mathcal{A}}{=\!=} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mu}(A_n)$

(iv) Το $\bar{\mu}$ είναι πλήρες
Έστω $A \subseteq B = E \cup F$ με $\bar{\mu}(B) = \mu(E) = 0$ και $F \subseteq N$, $\mu(N) = 0$ και $E \cap F = \emptyset$
Γράφουμε $A = \underset{\in \mathcal{A}}{\emptyset} \cup A$ και $A \subseteq E \cup F \subseteq E \cup N$ και $\mu(E \cup N) \le \mu(\overset{0}{E}) + \mu(\overset{0}{N})$

αυτό δείχνει ότι $A \in \bar{\mathcal{A}}$ και $\bar{\mu}(A) := \mu(\emptyset) = 0$

(v) $\bar{\mu}|_{\mathcal{A}} = \mu$
Έστω $E \in \mathcal{A}$. Γράφουμε $E = \underset{\in \mathcal{A}}{E} \cup \emptyset \overset{\Rightarrow}{} \bar{\mu}(E) = \mu(E)$.

(vi) μοναδικότητα
Έστω $\nu : \bar{\mathcal{A}} \to [0, \infty]$ πλήρες μέτρο τ.ω. $\forall E \in \mathcal{A}$ $\nu(E) = \mu(E)$
Θ.δ.ο. $\forall A \in \bar{\mathcal{A}}$ $\nu(A) = \bar{\mu}(A)$. Γράφουμε $A = \underset{\in \mathcal{A}}{E} \cup \underset{\text{ξένα}}{F}$, $F \subseteq N$, $\mu(N) = 0$

$\nu(A) = \nu(\underset{\substack{\in \bar{\mathcal{A}} \\ \text{ξένα}}}{E \cup F}) = \nu(E) + \nu(F) = \mu(E)$ (γιατί $\nu(F) = 0$)

Εξωτερικό μέτρο

Ορισμός $X \neq \emptyset$. Μια συνάρτηση $\mu^* : P(X) \to [0, \infty]$ λέγεται εξωτερικό μέτρο αν:
(i) $\mu^*(\emptyset) = 0$
(ii) $A \subseteq B \subseteq X \Rightarrow \mu^*(A) \le \mu^*(B)$ (μονοτονία)
(iii) Αν $A_n \subseteq X$ τότε $\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$

Κατασκευή εξωτερικού μέτρου
Βασικός τρόπος με τον οποίο "φτιάχνουμε" εξωτερικά μέτρα.
Ξεκινάμε με μια οικογένεια $\mathcal{E} \subseteq P(X)$ τ.ω. $\emptyset, X \in \mathcal{E}$ και μια απεικόνιση $\rho : \mathcal{E} \to [0, \infty]$ με $\rho(\emptyset) = 0$. $\forall A \subseteq X$ ορίζουμε
$\mu^*(A) = \inf\left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \rho(E_j) \,/\, E_j \in \mathcal{E},\ A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \right\}$
↳ ο όρος έχει νόημα. Τα σύνολα υπάρχουν γιατί $X \in \mathcal{E}$
άρα $A \subseteq X \cup X \cup \ldots$

Το μ^* είναι εξωτερικό μέτρο.

- $\mu^*(\phi)=0$ γιατί $\phi \subseteq \phi \cup \phi \cup \cdots$ και $\sum_{j=1}^{\infty} \overbrace{\rho(\phi)}^{=0} = 0$

άρα $\inf\{\sum \rho(E_j),\ E_j \in \mathcal{E},\ \phi \subseteq \cup E_j\} \leq 0$

$\hookrightarrow \geq 0$ γιατί $\rho \geq 0$

- αν $A \subseteq B$ τότε $\underbrace{\{\sum \rho(E_j),\ E_j \in \mathcal{E},\ A \subseteq \cup E_j\}}_{K_A} \supseteq \underbrace{\{\sum \rho(E_j), E_j \in \mathcal{E},\ B \subseteq \cup E_j\}}_{K_B}$

$\Rightarrow \underset{\mu^*(A)}{\inf K_A} \leq \underset{\mu^*(B)}{\inf K_B}$

- Έστω $A_n \subseteq X$. Θέλουμε $\mu^*(\cup A_n) \leq \sum_n \mu(A_n)$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\forall n$: $\mu(A_n) < \infty$. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει κάλυψη $A_n \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} E_{n,j}$, $E_{n,j} \in \mathcal{E}$ $\sum \rho(E_{n,j}) < \mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$. Τότε:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} E_{n,j} \Rightarrow \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty} \rho(E_{n,j})\right) < \sum_n \mu^*(A_n) +$$

$$+ \sum_n \frac{\varepsilon}{2^n} = \sum_n \mu^*(A_n) + \varepsilon$$ Μετά παίρνω $\varepsilon \to 0$.

<u>Ορισμός</u> (Καραθεοδωρής)

Έστω $\mu^* : P(X) \to [0, +\infty]$ εξωτερικό μέτρο. Ένα $A \subseteq X$ λέγεται <u>μ^*-μετρήσιμο</u> αν $\forall E \subseteq X$ ισχύει $\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$

<u>Παρατήρηση</u> Η $\mu^*(E) \leq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$ ισχύει πάντα (από την υποπροσθετικότητα για το μ^*) άρα για την ισότητα αρκεί να δείξουμε ότι $\forall E \subseteq X$ ισχύει $\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$ (*). Επίσης μπορούμε να κοιτάμε μόνο τα $E \subseteq X$ με $\mu^*(E) < \infty$, γιατί αλλιώς η (*) ισχύει τετριμμένα.

<u>Θεώρημα</u> Έστω μ^* εξωτερικό μέτρο στο X. Η οικογένεια $\mathcal{A}$ των μ^*-μετρήσιμων υποσυνόλων του X είναι σ-άλγεβρα και η $\mu = \mu^*|_{\mathcal{A}}$ είναι μέτρο.

<u>απόδειξη</u> (α) αν $A \in \mathcal{A}$ τότε $A^c \in \mathcal{A}$.

Έστω $E \subseteq X$. Έχουμε $\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) = \mu^*(E \cap A^c) + \mu^*(E \cap (A^c)^c)$

(β) Αν $A, B \in \mathcal{A}$ τότε $A \cup B \in \mathcal{A}$ (και με επαγωγή, πεπερασμένες ενώσεις οπολων της $\mathcal{A}$ είναι στην $\mathcal{A}$ $\overset{(\alpha)}{\Rightarrow}$ $\mathcal{A}$ άλγεβρα.

Έστω $E \subseteq X$. Αφού $A \in \mathcal{A}$ έχουμε $\mu^*(E) = \mu^*(E\cap A) + \mu^*(E\cap A^c) \geq$
$\geq \mu^*(E\cap A) + \mu^*(E\cap A^c\cap B) + \mu^*(E\cap \underbrace{A^c\cap B^c}_{(A\cup B)^c})$

Ζητούμενο: $\mu^*(E) \geq \mu^*(E\cap(A\cup B)) + \mu(E\cap(A\cup B)^c)$

Άρα αρκεί $\mu^*(E\cap(A\cup B)) \leq \mu^*(E\cap A) + \mu^*(E\cap A^c\cap B)$

Έχουμε $E\cap(A\cup B) = E\cap(A\cup(B\setminus A)) = (E\cap A)\cup(E\cap(B\setminus A))$ και χρησιμοποιούμε την υποπροσθετικότητα του μ^*.

(γ) Αν $A, B \in \mathcal{A}$ με $A\cap B = \emptyset$ τότε $\mu^*(A\cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$

Αφού $B\in\mathcal{A}$ έχουμε $\mu^*(A\cup B) = \mu^*(\underbrace{(A\cup B)\cap B}_{=B}) + \mu^*(\underbrace{(A\cup B)\cap B^c}_{A})$

(δ) Δείχνουμε ότι αν $A_n \in \mathcal{A}$ ξένα τότε $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ και $\underbrace{\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(A_n)}_{\mu^*|_{\mathcal{A}} \text{ μέτρο.}}$

$\Downarrow$ $\mathcal{A}$ άλγεβρα

$\mathcal{A}$ σ-άλγεβρα

$\forall N\in\mathbb{N}$ ορίζουμε $\underbrace{B_N = A_1\cup\dots\cup A_N}_{\in\mathcal{A}}$ και $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

Έστω $E\subseteq X$. ① Θεωρούμε το $E\cap B_n \subseteq X$ και αφού $A_N\in\mathcal{A}$ γράφουμε
$\mu^*(E\cap B_n) = \mu^*(E\cap B_N\cap A_N) + \mu^*(E\cap \underbrace{B_N\cap A_N^c}_{B_{N-1}}) =$

$= \mu^*(E\cap A_N) + \mu^*(E\cap B_{N-1}) = \dots = \mu^*(E\cap A_N) + \dots + \mu^*(E\cap A_1)$

Δηλ. $\mu^*(E\cap B_N) = \sum_{n=1}^{N}\mu^*(E\cap A_n)$.

② Έστω $E\subseteq X$ με $\mu^*(E) < \infty$. Έχουμε $\mu^*(E) = \mu^*(E\cap B_N) + \mu^*(E\cap B_N^c)$
$\geq \sum_{n=1}^{N}\mu^*(E\cap A_n) + \mu^*(E\cap B^c)$ $\forall N$ $\overset{N\to\infty}{\Rightarrow}$ $\mu^*(E) \geq \sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(E\cap A_n) +$

$B_N\subseteq B \Rightarrow B_N^c \supseteq B^c$

$+ \mu^*(E\cap B^c) \geq \mu^*(E\cap B) + \mu(E\cap B^c) \geq \mu^*(E)$

άρα $B = \bigcup A_n \in \mathcal{A}$

μένει $\mu^*(B) = \sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(A_n)$ $(**)$

Ξέρω $\forall E\subseteq X$ $\mu^*(E) = \sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(E\cap A_n) + \mu^*(E\cap B^c)$. Αν βάλω

εδώ $E = B$ παίρνω την $(**)$

Επεκταση "μετρων" απο αλγεβρες σε σ-αλγεβρες

Ορισμος Εστω $\mathcal{B} \subseteq P(X)$ αλγεβρα. Μια συναρτηση $\mu : \mathcal{B} \to [0, \infty]$ λεγεται προμετρο αν:

(i) $\mu(\emptyset) = 0$

(ii) Αν $A_n \in \mathcal{B}$ ξενα και $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{B}$ τοτε $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

Οριζουμε $\forall E \subseteq X$ $\mu^*(E) = \inf\left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j),\ A_j \in \mathcal{B},\ E \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \right\}$

Το μ^* ειναι εξωτερικο μετρο (βλεπε κατασκευη εξωτερικου μετρου, σελ 12)

Θεωρημα Εστω $\mathcal{A}$ η σ-αλγεβρα των μ^*-μετρησιμων συνολων. Τοτε $\mathcal{A} \supseteq \sigma(\mathcal{B})$, $\mu^*|_{\mathcal{B}} = \mu$ και μ^* πληρες μετρο στην $\mathcal{A}$.

μαθημα 4° 11/10/18

Προταση 1

(α) $\forall A \in \mathcal{B}$ ισχυει $\mu^*(A) = \mu(A)$ $\quad (\mu^*|_{\mathcal{B}} = \mu)$

(β) Καθε $A \in \mathcal{B}$ ειναι μ^*-μετρησιμο. ($\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ αρα και $\sigma(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{A}$)

αποδειξη (α) Ζηταμε $\mu(A) = \inf\{\sum \mu(A_j) / A_j \in \mathcal{B},\ A \subseteq \bigcup_j A_j\}$

"$\geq$" $A = A \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \dots \Rightarrow \inf \leq \mu(A) + \mu(\emptyset) + \mu(\emptyset) + \dots = \mu(A)$

"$\leq$" Παιρνουμε τυχουσα καλυψη $A \subseteq \bigcup A_j$ με $A_j \in \mathcal{B}$ και ζηταμε $\mu(A) \leq \sum_j \mu(A_j)$. Αν ορισουμε $B_j = A_j \setminus \bigcup_{i<j} A_i$ τοτε τα B_j

ειναι ξενα, $B_j \in \mathcal{B}$ και $\bigcup_j A_j = \bigcup_j B_j$.

Γραφουμε $A = A \cap \left(\bigcup_j B_j\right) = \bigcup_j \underbrace{(A \cap B_j)}_{\in \mathcal{B},\ \text{ξενα}}$

αρα $\mu(A) = \sum \mu(A \cap B_j) \leq \sum \mu(A_j)$, διοτι $A \cap B_j \subseteq A_j$ $\forall j$

(β) Εστω $E \subseteq X$. Μπορουμε να υποθεσουμε οτι $\mu^*(E) < \infty$ και ζηταμε $\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$, $\forall A \in \mathcal{B}$

Παιρνουμε τυχον $\varepsilon > 0$ και βρισκουμε $(A_j) \subseteq \mathcal{B}$ τ.ω. $E \subseteq \bigcup_j A_j$ και $\sum_j \mu(A_j) < \mu^*(E) + \varepsilon$. Τοτε $\mu^*(E) + \varepsilon > \sum_j \mu(A_j) =$

$= \sum_j (\mu(\underbrace{A_j \cap A}) + \mu(\underbrace{A_j \cap A^c}_{\text{ξενα στην } \mathcal{B}})) \overset{(α)}{=} \sum_j \mu^*(A_j \cap A) + \sum_j \mu^*(A_j \cap A^c) \geq$

υποπροσθετικότητα του μ^*

$\geq \mu^*\left(\left(\bigcup_j A_j\right)\cap A\right) + \mu^*\left(\left(\bigcup_j A_j\right)\cap A^c\right) \geq \mu^*(E\cap A) + \mu^*(E\cap A^c)$ από την μονοτονία του μ^* και την $\bigcup_j A_j \supseteq E$

Θεώρημα Έστω $\mathcal{B} \subseteq P(X)$ άλγεβρα, μ προμέτρο στην $\mathcal{B}$. Ορίζουμε $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{B})$. Τότε:

(α) Υπάρχει μέτρο $\bar{\mu}$ στην $\mathcal{A}$ τ.ω. $\bar{\mu}|_{\mathcal{B}} = \mu$

(β) Αν ν είναι άλλο τέτοιο μέτρο στην $\mathcal{A}$ τότε $\nu(E) \leq \bar{\mu}(E)$ $\forall E \in \mathcal{A}$ με ισότητα αν $\bar{\mu}(E) < \infty$

(γ) Αν το προμέτρο μ είναι σ-πεπερασμένο τότε η επέκταση είναι μοναδική.

απόδειξη (α) Ορίζουμε το εξωτερικό μέτρο μ^* που επάγεται από το προμέτρο μ. Θεωρούμε την σ-άλγεβρα $\mathcal{A}^*$ των μ^*-μετρήσιμων συνόλων. Ξέρουμε ότι:

(i) μ^* πλήρες μέτρο στην $\mathcal{A}^*$

(ii) $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}^* \Rightarrow \sigma(\mathcal{B}) = \mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}^*$

(iii) $\forall A \in \mathcal{B}$ $\mu^*(A) = \mu(A)$

$$\begin{array}{cccc} & \mu^*\text{-μετρήσιμα} & \mathcal{A} & \text{άλγεβρα} \\ P(X) \supseteq & \mathcal{A}^* \supseteq & \sigma(\mathcal{B}) \supseteq & \mathcal{B} \\ \mu^* & \mu^*|_{\mathcal{A}^*} & \mu^*|_{\mathcal{A}} & \mu \\ \text{εξωτερικό μέτρο} & \text{μέτρο} \Rightarrow & \text{μέτρο (περιορισμός μέτρου σε σ-άλγεβρα)} & \text{προμέτρο} \end{array}$$

Ορίζουμε $\bar{\mu} = \mu^*|_{\mathcal{A}}$ [$\mu^*|_{\mathcal{A}^*}$ η πλήρωση του $\bar{\mu}$ (Άσκηση)]

(β) Έστω $\nu: \mathcal{A} \to [0,\infty]$ μέτρο τ.ω. $\forall A \in \mathcal{B}$ $\nu(A) = \mu(A)$.

Ζητάμε $\forall E \in \mathcal{A}$, $\nu(E) \leq \inf\{\sum_j \mu(A_j) \,/\, A_j \in \mathcal{B},\ E \subseteq \bigcup A_j\} = \bar{\mu}(E)$

Θεωρούμε $A_j \in \mathcal{B}$ με $E \subseteq \bigcup_j A_j$ και έχουμε:

$\nu(E) \leq \nu\left(\bigcup_j A_j\right) \leq \sum_j \nu(A_j) = \sum_j \mu(A_j)$ άρα $\nu(E) \leq \bar{\mu}(E)$

Υποθέτουμε ότι $\bar{\mu}(E) = \inf\{\sum_j \mu(A_j) \,/\, A_j \in \mathcal{B},\ E \subseteq \bigcup A_j\} < \infty$ και ζητάμε $\bar{\mu}(E) \leq \nu(E)$.

Παίρνω $\varepsilon > 0$ και βρίσκω $E \subseteq \bigcup_j A_j$ τ.ω. $\sum_j \mu(A_j) \leq \bar{\mu}(E) + \varepsilon$

Έχουμε $\bar{\mu}(E) \leq \bar{\mu}(\bigcup A_j) \overset{(*)}{=} \nu(\bigcup A_j) = \nu(E) + \nu(\bigcup A_j \setminus E) \leq$

$(*)$ $\bigcup_{j=1}^N A_j \in \mathcal{B} \Rightarrow \forall N$ $\mu\left(\bigcup_{j=1}^N A_j\right) = \nu\left(\bigcup_{j=1}^N A_j\right) \Rightarrow \lim_{N\to\infty}\left(\mu\left(\bigcup_{j=1}^N A_j\right)\right) = \lim_{N\to\infty}\left(\nu\left(\bigcup_{j=1}^N A_j\right)\right)$

$\xRightarrow{\text{συνέχεια του μέτρου}} \bar{\mu}\left(\bigcup_j A_j\right) = \nu\left(\bigcup_j A_j\right)$

$\leq \nu(E) + \bar{\mu}(\bigcup A_j \setminus E) = \nu(E) + \bar{\mu}(\bigcup A_j) - \bar{\mu}(E) \leq \nu(E) + \sum_j \mu(A_j) - \bar{\mu}(E) <$

$< \nu(E) + \varepsilon$

(γ) Αν το μ είναι σ-πεπερασμένο, θέλουμε να δείξουμε ότι για κάθε ν όπως στο (β) έχουμε $\nu(E) = \bar{\mu}(E) \quad \forall E \in \mathcal{A}$.

Υπάρχουν $A_j \in \mathcal{B}$ για τ.ω. $X = \bigcup_j A_j$ και $\mu(A_j) < \infty \quad \forall j$.

Γράφουμε $\nu(E) = \nu\left(\bigcup_j (E \cap A_j)\right) = \sum_j \nu(E \cap A_j) \overset{(\beta)}{=} \sum_j \bar{\mu}(E \cap A_j) = \bar{\mu}(E)$

Borel μέτρα στο $\mathbb{R}$ (στη σ-άλγεβρα $\mathcal{B}(\mathbb{R})$)

Ορισμός Έστω μ πεπερασμένο Borel μέτρο στο $\mathbb{R}$. Η **συνάρτηση κατανομής** του μ είναι η $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $F(x) = \mu((-\infty, x])$

Άσκηση Η F είναι αύξουσα, δεξιά συνεχής (δηλ. $\forall x \in \mathbb{R}$ $F(x) = \lim_{y \to x^+} F(y)$ $\overset{\text{ακολουθιακά}}{\Longleftrightarrow}$ για κάθε γνησίως φθίνουσα $x_n \downarrow x$ ισχύει $F(x_n) \to F(x)$) και $\mu((a,b]) = \mu((-\infty, b]) - \mu((-\infty, a]) = F(b) - F(a)$

Έστω $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ αύξουσα και δεξιά συνεχής. Θέλουμε να ορίσουμε ένα μέτρο μ_F στην $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ τ.ω. $\forall (a,b]$ $\mu_F((a,b]) = F(b) - F(a)$

Βήμα 1 Θεωρούμε την οικογένεια $\mathcal{E}$ των αριστερά ανοιχτών - δεξιά κλειστών διαστημάτων. Η $\mathcal{E}$ είναι στοιχειώδης οικογένεια $\Rightarrow$ η οικογένεια $\mathcal{A}$ των πεπερασμένων ξένων ενώσεων "η-διαστημάτων" είναι άλγεβρα.

Βήμα 2 Αν $A \in \mathcal{A}$ έχουμε $A = I_1 \cup \dots \cup I_m$, $I_j = (a_j, b_j]$, I_j ξένα.
Ορίζουμε $\mu(A) = \sum_{j=1}^{m} (F(b_j) - F(a_j))$

Βήμα 3 Η μ είναι καλά ορισμένη.
Έστω ότι $A \in \mathcal{A}$ και $A = \bigcup_{k=1}^{m} I_k = \bigcup_{s=1}^{\ell} J_s$, I_k ξένα η-διαστήματα, J_s ξένα η-διαστήματα

$$\forall k, \ I_k = I_k \cap A = I_k \cap \left(\bigcup_{s=1}^{\ell} J_s\right) = \bigcup_{s=1}^{\ell} \underbrace{(I_k \cap J_s)}_{\text{η-διαστήματα ξένα}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu(I_k) \overset{*}{=} \sum_{s}^{\ell} \mu(I_k \cap J_s)$$

* γιατί αν $(a,b] = \bigcup_{s=1}^{\ell} \overbrace{(a_s, b_s]}^{\text{ξένα}}$ τότε $\mu(a,b] = F(b) - F(a)$ **

$$= \sum_{s=1}^{\ell} (F(b_s) - F(a_s)) = \sum_{s=1}^{\ell} \mu(a_s, b_s]$$

(**) Αν υποθέσω ότι $a_1 < b_1 \le a_2 < b_2 \le \dots \le a_\ell < b_\ell$ τότε πρέπει $a_1 = a$, $b_\ell = b$, $b_1 = a_2$, $b_2 = a_3, \dots$ $b_{\ell-1} = a_\ell$ διότι διαφορετικά θα είχα υποδιαστήματα που δεν ανήκουν στο $(a,b] = \bigcup_{s=1}^{\ell} (a_s, b_s]$

Άρα $\sum_{s=1}^{\ell} (F(b_s) - F(a_s)) = \sum_{s=2}^{\ell} (F(b_s) - F(b_{s-1})) + F(b_1) - F(a_1) =$

$\overset{\text{τηλεσκοπικό άθροισμα}}{=} F(b_\ell) - F(a_1) = F(b) - F(a)$

άρα $\sum_k \mu(I_k) = \sum_{k,s} \mu(I_k \cap J_s) = \dots = \sum \mu(J_s)$

Βήμα 4 Το μ είναι πεπερασμένα προσθετικό.

Αν $A_1, \dots, A_m$ ξένα σύνολα στην $\mathcal{A}$ τότε $\mu(A_1 \cup \dots \cup A_m) = \mu(A_1) + \dots + \mu(A_m)$

Έχουμε $A_j = I_{j1} \cup \dots \cup I_{jn_j}$ ξένα η-διαστήματα $\Rightarrow$

$\Rightarrow \mu(A_1 \cup \dots \cup A_m) = \mu\Big(\bigcup_{j=1}^{m} \bigcup_{s=1}^{n_j} \underbrace{I_{j,s}}_{\text{ξένα η-διαστήματα}}\Big) = \sum_j \sum_s \mu(I_{j,s}) = \sum_j \mu(A_j)$

Βήμα 5 Αν $A_j \in \mathcal{A}$ ξένα $j = 1, 2, \dots$ και $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}$ τότε $\mu\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$

Ξέρουμε ότι $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = I_1 \cup \dots \cup I_k$, I_s η-διαστήματα, $1 \le s \le k$

και ότι $\mu\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big) \overset{\text{ορ}}{=} \mu(I_1) + \dots + \mu(I_k)$

Έχουμε $I_s = \bigcup_{j=1}^{\infty} \underbrace{(I_s \cap A_j)}_{\text{η-διάστημα}}$ και θα ήθελα $\mu(I_s) = \sum_j \mu(I_s \cap A_j)$

Τότε $\mu\Big(\bigcup_j A_j\Big) = \sum_{s=1}^{k} \sum_j \mu(I_s \cap A_j) = \sum_j \sum_{s=1}^{k} \mu(I_s \cap A_j) =$

$= \sum_j \mu\Big(\bigcup_s (I_s \cap A_j)\Big) = \mu(A_j)$

Ισχυρισμός Αν $\underbrace{(a,b]}_{:= I} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \underbrace{(a_j, b_j]}_{:= I_j}$ ξένα τότε $\mu((a,b]) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu((a_j, b_j])$

"$\ge$" $\forall N$ $I \supseteq \bigcup_{j=1}^{N} I_j \Rightarrow \mu(I) \ge \mu\Big(\bigcup_{j=1}^{N} I_j\Big) \overset{B4}{=} \sum_{j=1}^{N} \mu(I_j) \overset{N \to \infty}{\Longrightarrow}$

$\Rightarrow \mu(I) \ge \sum_{j=1}^{\infty} \mu(I_j)$

"$\leq$" Εστω $\varepsilon>0$. Αφου η F ειναι δεξιά συνεχής υπαρχει $\delta>0$ τ.ω.
$F(a+\delta)-F(a)<\varepsilon \Rightarrow \mu((a,b])=F(b)-F(a)=$
$=F(b)-F(a+\delta)+F(a+\delta)-F(a)<F(b)-F(a+\delta)+\varepsilon$
Ομοιως υπαρχουν $\delta_j>0$ τ.ω. $F(b_j+\delta_j)-F(b_j)<\frac{\varepsilon}{2^j}$ (συνεχεια απο δεξια σο b_j)

Εχουμε $[a+\delta,b]\subseteq\bigcup_{j=1}^{\infty}(a_j,b_j+\delta_j)$ Αρα υπαρχει N τ.ω.

$[a+\delta,b]\subseteq\bigcup_{j=1}^{N}(a_j,b_j+\delta_j)$ Αλλαζοντας τους δεικτες μπορω να υποθεσω

οτι $a_1<a_2<b_1+\delta_1<a_3<b_2+\delta_2<\dots<a_N<b_{N-1}+\delta_{N-1}<b_N+\delta_N$
Εχουμε $\mu((a,b])=F(b)-F(a)<F(b)-F(a+\delta)+\varepsilon<F(b_N+\delta_N)-F(a_1)+\varepsilon$
$\overset{*}{<}\sum(F(b_j+\delta_j)-F(a_j))+\varepsilon<\sum\left(F(b_j)-F(a_j)+\frac{\varepsilon}{2^j}\right)+\varepsilon\leq$
$<\sum_{j=1}^{\infty}(F(b_j)-F(a_j))+2\varepsilon=\sum_{j=1}^{\infty}|\mu((a_j,b_j])|+2\varepsilon$

(*) $F(b_1+\delta_1)-F(a)+F(b_2+\delta_2)-F(a)+\dots+F(b_N+\delta_N)-F(a_N)\overset{F\nearrow}{>}$
$>F(b_N+\delta_N)-F(a_1)$

Οριζουμε $\mu^*:P(X)\to[0,\infty]$
με $\mu^*(E)=\inf\{\sum_j\mu(A_j)\,/\,A_j\in\mathcal{B},\ E\subseteq\bigcup_j A_j\}$
↳ εξωτερικό μέτρο

μαθημα 5ο
16/10/18

① $\mathbb{A}_{\mu^*}$ - η σ-αλγεβρα των μ^* μετρησιμων συνολων.
Καθε $B\in\mathcal{B}$ ειναι μ^*-μετρησιμο και $\mu^*(B)=B$
Επεται οτι $\mathbb{A}=\sigma(\mathcal{B})\subseteq\mathbb{A}_{\mu^*}$ και αν $\bar{\mu}=\mu^*|_{\mathbb{A}}$ τοτε $\bar{\mu}|_{\mathcal{B}}=\mu$
② Αν ν ειναι αλλο μετρο στην $\mathbb{A}$ τ.ω. $\nu|_{\mathcal{B}}=\mu$ τοτε $\forall E\in\mathbb{A}$.
$\nu(E)\leq\bar{\mu}(E)$ και αν το προμετρο μ ειναι σ-πεπερασμενο τοτε
$\nu=\bar{\mu}$ στην $\mathbb{A}$.

Θεωρουμε τη στοιχειωδη οικογενεια $\mathcal{E}$ των η-διαστηματων $(a,b]$
και την αλγεβρα $\mathcal{B}$ των πεπερασμενων ξενων ενωσεων συνολων από
την $\mathcal{E}$. Οριζουμε $\mu\left(\bigcup_{j=1}^{n}(a_j,b_j]\right)=\sum_{j=1}^{n}|F(b_j)-F(a_j)|$
<u>Προταση</u>: Το μ ειναι προμετρο
<u>αποδειξη</u> αποδειχτηκε στο προηγουμενο μαθημα (σελ 17-19)

Θεώρημα Έστω $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ αύξουσα και δεξιά συνεχής. Τότε:

(i) Υπάρχει μοναδικό μέτρο μ_F στην $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ τ.ω. $\forall a<b$ $\mu_F((a,b]) = F(b)-F(a)$

(ii) Αν $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ αύξουσα, δεξιά συνεχής τότε $\mu_F = \mu_G \iff$ η $F-G$ είναι σταθερή.

<u>απόδειξη</u> (i) $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{B}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. και μ προμέτρο στη $\mathcal{B}$ άρα από το προηγούμενο θεώρημα υπάρχει μέτρο μ_F στην $\sigma(\mathcal{B})$ με $\mu_F|_{\mathcal{B}} = \mu$

<u>Μοναδικότητα</u>: το μ ήδη είναι σ-πεπερασμένο $\xRightarrow{\text{από το προηγούμενο θεώρημα}}$ μ_F μοναδικό με την ιδιότητα $\mu_F\left(\bigcup_{j=1}^{n}(a_j,b_j]\right) = $

$$= \sum_{j=1}^{n} F(b_j)-F(a_j) \Rightarrow \mu_F((a,b]) = F(b)-F(a) \quad \forall a<b$$

(ii) ($\Rightarrow$) Αν $x>0$ $\mu_F((0,x]) = \mu_G((0,x]) \Rightarrow F(x)-F(0) = G(x)-G(0) \Rightarrow$

$\Rightarrow F(x)-G(x) = F(0)-G(0)$

Αν $x<0$ $\mu_F((x,0]) = \mu_G((0,x]) \Rightarrow F(0)-F(x) = G(0)-G(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow F(x)-G(x) = F(0)-G(0)$

($\Leftarrow$) Αν $F = G+c$ και μ_1, μ_2 τα προμέτρα τους έχω $\mu_1 = \mu_2 \Rightarrow \mu_F = \mu_G$

<u>Άσκηση</u> Έστω μ μέτρο στην $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ τ.ω. $\mu(I)<\infty$ για κάθε φραγμένο διάστημα. Τότε υπάρχει $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ αύξουσα, δεξιά συνεχής τ.ω. $\mu=\mu_F$.

$$F(x) = \begin{cases} \mu((0,x]) & , x>0 \\ 0 & , x=0 \\ -\mu((x,0]) & , x<0 \end{cases}$$

Το $\bar{\mu}_F$ έχει οριστεί στη μεγαλύτερη σ-άλγεβρα $\mathcal{A}_{\mu^*}$ των μ^*-μετρήσιμων συνόλων και είναι πλήρες σε αυτήν.

Το $\bar{\mu}_F$ είναι το <u>Lebesgue-Stieltjes μέτρο</u> που επάγεται από την F.

<u>Ιδιότητες των Lebesgue-Stieltjes μέτρων</u>

Συμβολίζω $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τις αύξουσες δεξιά συνεχείς, $\mathcal{A}$ τα μ^*-μετρήσιμα και $\mu = \mu_F$

Θεώρημα <u>κανονικότητα</u>

$\forall E\in\mathcal{A}$ ισχύει $\mu(E) = \inf\{\mu(U) \mid E\subseteq U,\ U \text{ ανοικτό}\}$

$\mu(E) = \sup\{\mu(K) \mid K\subseteq E,\ K \text{ συμπαγές}\}$

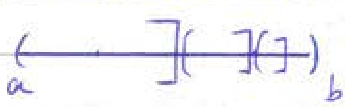
Χρειαζόμαστε το:

Λήμμα $\mu(E) := \inf\{\sum_j \mu((a_j,b_j]) \,/\, E \subseteq \bigcup_j (a_j, b_j]\} =$

$= \inf\{\sum_j \mu(a_j,b_j) \,/\, E \subseteq \bigcup_j (a_j,b_j)\} := \nu(E)$

απόδειξη "$\le$" Δείχνουμε ότι αν $E\subseteq \bigcup_j (a_j,b_j)$ τότε $\mu(E) \le \sum_j \mu(a_j,b_j))$

[Ιδέα: κάθε ανοικτό είναι ένωση ξένων ημιανοικτών



$l = b-a$, $I_k = (b - \frac{l}{2^{k-1}}, b - \frac{l}{2^k}]$

Τότε $I = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$]

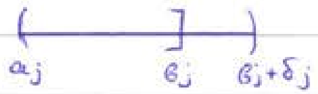
Έχουμε $E \subseteq \bigcup_j I_j = \bigcup_j\bigcup_k \underbrace{I_{j,k}}_{\text{η-διαστήματα}} \Rightarrow \mu(E) \le \sum_j\sum_k \mu(I_{j,k}) \overset{\text{ξένα}}{=}$

$= \sum_j \mu(\bigcup_k I_{j,k}) = \sum_j \mu(I_j)$. $\forall$ ανοικτά $\bigcup_j I_j \supseteq E$ άρα $\mu(E) \le \nu(E) = \inf \sum_j \mu(I_j)$

"$\ge$" Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\mu(E)<\infty$. Έστω $\varepsilon>0$

Υπάρχει κάλυψη $E\subseteq\bigcup_j(a_j,b_j]$ τ.ω. $\sum_j (F(b_j)-F(a_j)) < \mu(E)+\varepsilon$

[Ιδέα



από δεξιά συνέχεια της F έχω ότι $\forall j$ $\exists\, \delta_j>0 : F(b_j+\delta_j) < F(b_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}$]

Έχουμε $E\subseteq \bigcup_j (a_j, b_j+\delta_j)$ που $\nu(E)\le \sum_j \mu((a_j,b_j+\delta_j)) \le \sum_j \mu((a_j,b_j+\delta_j])$

$= \sum_j (F(b_j+\delta_j) - F(a_j)) < \sum_j \left(F(b_j)-F(a_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}\right) < \mu(E) + \varepsilon + \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow \nu(E) < \mu(E) + 2\varepsilon$. Το ε ήταν τυχόν (>0) άρα $\nu(E)\le\mu(E)$

απόδειξη θεωρήματος

(α) Υποθέτω $\mu(E)<\infty$. Παίρνουμε $\varepsilon>0$ και από το Λήμμα βρίσκουμε $E\subseteq \underbrace{\bigcup_j (a_j,b_j)}_{U = \text{ανοικτό}}$ τ.ω. $\mu(U)\le \sum\mu((a_j,b_j)) < \mu(E)+\varepsilon$

(β) Υποθέτουμε πρώτα ότι E φραγμένο. Θέτω $\nu(E) = \sup\{\mu(K) \,,\, K\subseteq E \text{ συμπαγές}\}$

• Αν $\bar{E} = E$ τότε το E είναι συμπαγές και παίρνουμε $K = E$.
$\mu(E) = \mu(K) \leq v(E)$

• Αν $\bar{E} \setminus E \neq \emptyset$. Θεωρούμε $\varepsilon > 0$ και βρίσκουμε από το (a) ανοικτό $U \supseteq \bar{E} \setminus E$ τ.ω. $\mu(U) < \mu(\bar{E} \setminus E) + \varepsilon$ $^{\circledast}$ Ορίζουμε $K = \underbrace{\bar{E} \setminus U}_{\text{συμπαγές}} =$
$= E \cap (\bar{E} \setminus U) = E \setminus (E \cap U)$

Ζητάμε $\mu(E) < \mu(K) + \varepsilon$. Έχουμε $\mu(K) = \mu(E) - \mu(E \cap U) \Rightarrow$
$\Rightarrow \mu(E) - \mu(K) = \mu(E \cap U) \leq \mu(U \setminus \bar{E} \setminus E) = \mu(U) - \mu(\bar{E} \setminus E) \overset{\circledast}{<} \varepsilon$
διότι $E \cap U \subseteq U \setminus (\bar{E} \setminus E)$

Έστω E δεν είναι φραγμένο.
γράφουμε $E = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \underbrace{(E \cap (k, k+1])}_{:= E_k}$ και για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ βρίσκουμε

συμπαγές $C_k \subseteq E_k$ τ.ω. $\mu(E_k) < \mu(C_k) + \frac{\varepsilon}{2^{|k|}}$

Για κάθε N έχουμε $\underbrace{\bigcup_{k=-N}^{N} C_k}_{\substack{:= C(N) \\ \text{συμπαγές}}} \subseteq \underbrace{\bigcup_{k=-N}^{N} E_k}_{:= E(N)}$

και $\mu(E_N \setminus C_N) \leq \mu\left(\bigcup_{k=-N}^{N} (E_k \setminus C_k)\right) \leq \sum_{k=-N}^{N} (\mu(E_k) - \mu(C_k)) \leq 3\varepsilon$

δηλ. $\mu(E(N)) \leq \mu(C(N)) + 3\varepsilon$
Έχουμε $E(N) \uparrow \bigcup E(N) = E \Rightarrow \mu(E(N)) \to \mu(E)$

• Αν $\mu(E) < \infty$ $\exists N : \mu(E) < \mu(E(N)) + \varepsilon \Rightarrow \mu(E) \leq \mu(\underbrace{C(N)}_{\text{συμπαγές} \subseteq E}) + 4\varepsilon$

• Αν $\mu(E) = \infty$ τότε $\mu(E) \to \infty \Rightarrow \mu(C(N)) \to +\infty \Rightarrow$
$\Rightarrow \sup\{\mu(K) / K \subseteq E, K \text{ συμπαγές}\} = +\infty = \mu(E)$

Θεώρημα Αν $E \subseteq \mathbb{R}$, τα εξής είναι ισοδύναμα
(i) $E \in \mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$ τα μ^*-μετρήσιμα)
(ii) $E = V \setminus N_1$, V G_δ-σύνολο, $\mu(N_1) = 0$
(iii) $E = H \cup N_2$, H F_σ-σύνολο, $\mu(N_2) = 0$

__απόδειξη__ (ii) $\Rightarrow$ (i), (iii) $\Rightarrow$ (i) άμεσα καθώς η $\mathcal{A}$ περιέχει τα G_δ και F_σ σύνολα. $\forall E \subseteq X$: $\mu(A \cap E) + \mu(A \cap E^c) = \mu(A \cap V \cap N_1^c) + \mu(A \cap (V^c \cup N_1)) \leq$ $\leq \mu(A \cap V) + \mu(A \cap V^c) + \mu(A \cap \overset{0}{N_1}) \leq \mu(A)$ γιατί V μ^*-μετρήσιμο

(i) $\Rightarrow$ (ii) Έστω E φραγμένο. Τότε:

$\forall j \ \exists K_j \subseteq E \subseteq U_j$ τ.ω. $\mu(U_j) - \frac{1}{j} \leq \mu(E) \leq \mu(K_j) + \frac{1}{j}$

Ορίζουμε $V = \bigcap_{j=1}^{\infty} U_j \rightsquigarrow G_\delta$ σύνολο

και $\forall j \quad \mu(V) \leq \mu(U_j) \leq \mu(E) + \frac{1}{j} \xRightarrow{j\to\infty} \mu(V) \leq \mu(E)$.

Αν $N_1 = V \setminus E$ τότε $\mu(N_1) = \mu(V) - \mu(E) = 0$.

Ομοια αν $H = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j \rightsquigarrow F_\sigma$ σύνολο έχουμε $\mu(E) \leq \mu(K_j) + \frac{1}{j} \leq$

$\leq \mu(H) + \frac{1}{j} \quad \forall j \xRightarrow{j\to\infty} \mu(E) \leq \mu(H)$ δηλ. $\mu(E) = \mu(H)$ αφού $H \subseteq E$.

Ορίζουμε $N_2 = E \setminus H$ και έχουμε $\mu(N_2) = 0$.

Αν E δεν είναι φραγμένο:

Γράφουμε $E = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \underbrace{(E \cap (k, k+1])}_{:= E_k}$. Έχουμε $E_k = H_k \cup N_{2,k}$,

H_k είναι F_σ και $\mu(N_{2,k}) = 0$.

Αρα $E = \bigcup E_k = \underbrace{\left(\bigcup_k H_k\right)}_{F_\sigma} \cup \underbrace{\left(\bigcup_k N_{2,k}\right)}_{\text{έχει μέτρο μηδέν}}$

(i) $\Rightarrow$ (iii) Γράφουμε $E^c = H \cup N_2 \Rightarrow E = \underbrace{H^c}_{G_\delta} \setminus N_2$

Πρόταση (αρχή του Littlewood)

Αν $\mu(E) < \infty$ τότε $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A = \bigcup_{j=1}^{N} I_j$, I_j ανοιχτά διαστήματα τ.ω. $\mu(E \triangle A) < \varepsilon$

απόδειξη Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει συμπαγές $K \subseteq E$ τ.ω. $\mu(E \setminus K) < \varepsilon$.

Από το προηγούμενο λήμμα έχουμε κάλυψη $K \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$

I_j ανοικτά διαστήματα τ.ω. $\sum_{j=1}^{\infty} \mu(I_j) < \mu(K) + \varepsilon$

Επειδή K συμπαγές, $\exists N : K \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} I_j$ και $\sum_{j=1}^{N} \mu(I_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(I_j) <$

$< \mu(K) + \varepsilon$.

Ορίζουμε $A = \bigcup_{j=1}^{N} I_j \quad \mu(E \triangle A) = \mu(E \setminus A) + \mu(A \setminus E) \overset{K \subseteq A}{\leq} \mu(E \setminus K) + \mu(A \setminus K)$

$< \varepsilon + \mu\left(\bigcup_{j=1}^{N} I_j\right) - \mu(K) \leq \varepsilon + \sum_{j=1}^{N} \mu(I_j) - \mu(K) < 2\varepsilon$

Μετρο Lebesgue : ειναι το $m = \mu_F$ οπου $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ειναι η $F(x) = x$

$$m(E) = \inf \{ \sum_j (b_j - a_j) \ / \ E \subseteq \bigcup_j (a_j, b_j) \}$$

μαθημα 6°
23/10/18

Η σ-αλγεβρα των Lebesgue μετρησιμων συνολων
Ειναι η $\mathcal{L}$

Προταση 1 Αν $E \in \mathcal{L}$ τοτε $\forall x \in \mathbb{R}$ και $\forall r \in \mathbb{R}$ τα
$x + E = \{x + y \ / y \in E\}$ και $rE = \{ry \ / y \in E\}$
Ειναι στην $\mathcal{L}$ και $m(x+E) = m(E)$, $m(rE) = |r| m(E)$

απόδειξη δειχνουμε με ορισμο Καραθεοδωρη οτι $x + E, rE \in \mathcal{L}$
και μετά οτι $m^*(x+E) = m^*(E)$ απο την (4)
$m^*(rE) = |r| m^*(E)$

Προταση 2 (Λήμμα του Steinhaus)
Αν $E \in \mathcal{L}$ και $m(E) > 0$ τοτε $\exists \delta > 0 : (-\delta, \delta) \subseteq E - E$
οπου $E - E = \{x - y \ / x, y \in E\}$

αποδειξη Μπορουμε να υποθεσουμε οτι $0 < m(E) < \infty$ (αλλως $\exists E' \subseteq E$
τ.ω. $0 < m(E') < \infty$) και αν βρουμε $(-\delta, \delta) \subseteq E' - E' \subseteq E - E$)
Υπάρχει διάστημα I τ.ω. $m(E \cap I) > \frac{3}{4} m(I)$ (*) [αν $\forall I$ ειχα οτι
$m(E \cap I) \leq \frac{3}{4} m(I)$ τοτε για καθε καλυψη $E \subseteq \bigcup_j I_j$ του E θα
εγραφα $E = \bigcup_j (E \cap I_j) \Rightarrow m(E) \leq \sum_j m(E \cap I_j) \leq \frac{3}{4} \sum_j m(I_j)$

και παιρνοντας inf ως προς τις καλυψεις, $m(E) \leq \frac{3}{4} \inf \{ \sum_j m(I_j) \ / \ E \subseteq I_j \}$
$= \frac{3}{4} m(E)$, αρα $m(E) = 0$]

Παίρνουμε $0 < t < m(I)$ και υποθέτουμε οτι $t \notin E - E \Rightarrow t \notin (E \cap I) - (E \cap I)$
$\Rightarrow E \cap I, \ E \cap I + t$ ξενα.
Ορίζουμε $J = I \cup (t + I)$ αυτό ειναι διάστημα μηκους $m(I) + t$.
Τα $E \cap I, \ E \cap I + t \subseteq J$ και ειναι ξενα αρα :
$m((E \cap I) \cup (E \cap I + t)) = m(E \cap I) + m(E \cap I + t) \overset{\text{αναλλοιωτο σε μεταφορες}}{=} 2 m(E \cap I)$
αρα $2 m(E \cap I) \leq \mu(J) = m(I) + t$
Απο την (*) $2 \frac{3}{4} m(I) \leq 2 m(E \cap I) \leq m(I) + t \Rightarrow t \geq \frac{m(I)}{2}$
Δειξαμε $\left. \begin{array}{l} t \notin E - E \\ 0 < t < m(I) \end{array} \right\} \Rightarrow t \geq \frac{m(I)}{2}$

Αρα $\forall$ $0 < t < \frac{m(I)}{2} := \delta$ εχουμε $t \in E - E$

δηλ $(0,\delta) \subseteq E - E$. Το $E - E$ είναι συμμετρικο ως προς το 0, και $0 \in E - E$. Αρα $(-\delta, \delta) \subseteq E - E$

Προταση 3. Εστω $E \in \mathcal{L}$ με $m(E) > 0$ Τοτε υπάρχει μη μετρησιμο $F \subseteq E$.

αποδειξη Ορίζουμε $\sim$ στο $\mathbb{R}$ θετοντας $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$.
Εστω $(A_i)_{i \in I}$ το συνολο των κλάσεων ισοδυναμιας της $\sim$.
Θεωραμε $N \subseteq \mathbb{R}$ που περιέχει ακριβώς ενα στοιχείο απο καθε A_i
$\forall q \in \mathbb{Q}$ ορίζουμε $N_q = q + N$. Τα N_q, $q \in \mathbb{Q}$ ειναι ξένα και $\bigcup_q N_q = \mathbb{R}$

Εστω $E \in \mathcal{L}$ με $m(E) > 0$. Εχουμε $E = E \cap \left(\bigcup_{q \in \mathbb{Q}} N_q\right) = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \underbrace{(E \cap N_q)}_{:= E_q}$

Τα E_q είναι ξενα και η ενωσή τους είναι το E.
Αν υποθέσουμε οτι ολα τα E_q είναι μετρήσιμα, τοτε:
$0 < m(E) = \sum_q m(E_q) \Rightarrow \exists q \in \mathbb{Q}$ τ.ω. $m(E_q) > 0$

Απο το λημμα Steinhaus $\exists \delta > 0 : (-\delta, \delta) \subseteq E_q - E_q \Rightarrow$
$\Rightarrow (-\delta, \delta) \subseteq N_q - N_q = N - N$. Ομως αν $u \in N - N$ τοτε είτε $u = 0$ ή u αρρητος. Ατοπο γιατί στο $(-\delta, \delta)$ υπαρχουν ρητοί $\neq 0$.

Ασκηση. $\forall \varepsilon > 0$ $\exists\, U \subseteq \mathbb{R}$ ανοικτο που είναι πυκνο με $m(U) < \varepsilon$
Θεωρούμε μια αριθμηση $\{q_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ του $\mathbb{Q}$ και το
$$U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(q_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}, q_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}\right)$$

Το U είναι ανοικτο (ενωση ανοικτων διαστηματων)
$U \supseteq \mathbb{Q} \Rightarrow \bar{U} = \mathbb{R}$, δηλαδή U πυκνο και $m(U) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

Πρόταση 4 (το σύνολο του Cantor)

$\exists\, C \subseteq [0,1]$ τ.ω.:

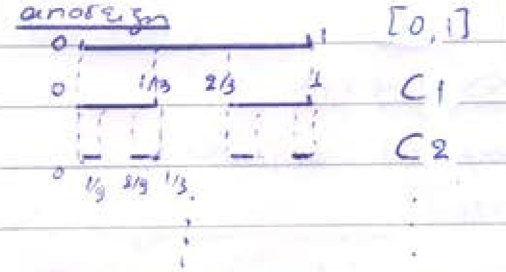
(α) Το C είναι κλειστό και κάθε $x \in C$ είναι σημείο συσσώρευσης του C

(β) Το C είναι υπεραριθμήσιμο

(γ) Το C δεν περιέχει κανένα διάστημα

(δ) $m(C) = 0$.

απόδειξη



Ορίζω $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$

(α1) C τομή κλειστών άρα κλειστό

(δ) $m(C_n) = \underbrace{2^n}_{\text{πλήθος διαστημάτων}} \cdot \underbrace{\frac{1}{3^n}}_{\text{μήκος διαστήματος}} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0 \xRightarrow{C_n \downarrow C} m(C) = 0$

γ) Αν $I \subseteq C$ τότε $\forall n$ $I \subseteq C_n \Rightarrow I \subseteq$ σε κάποιο από τα 2^n διαστήματα του $C_n \Rightarrow m(I) \leq \frac{1}{3^n} \to 0$ άτοπο

(α2) Όλα τα άκρα των διαστημάτων που σχηματίζουν οποιοδήποτε C_n ανήκουν στο C.

Έστω $x \in C$. $\forall n$, $x \in C_n \Rightarrow x \in [l_n, r_n] \sim$ κάποιο διάστημα του C_n

Τότε $l_n \leq x \leq r_n = l_n + \frac{1}{3^n} \Rightarrow l_n \to x$, $r_n \to x$. Κάποιο από τα l_n, r_n είναι $\neq x$. Άρα $\exists\, \underset{\substack{\in \{l_n, r_n\} \\ a_n \neq x}}{a_n} \to x$. Όμως $a_n \in C$ άρα

x σημείο συσσώρευσης του C.

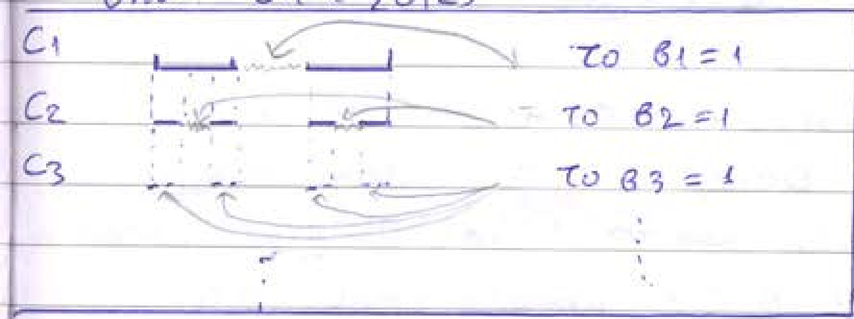
Σημείωση Κάθε $x \in [0,1]$ γράφεται $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$, $a_n \in \{0,1,2\}$ όχι απαραίτητα μονοσήμαντα.

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = 1\right]$$

π.χ. $\frac{1}{3} = \underbrace{.1000\cdots}_{a_1 = 1,\ a_n = 0\ \forall n > 1} = \underbrace{.0222\cdots}_{a_1 = 0,\ a_n = 2\ \forall n > 1}$

Κάθε αριθμός $x = \frac{k}{3^m}$ έχει 2 γραφές

Άσκηση $x \in C$ (cantor) $\Leftrightarrow$ έχει τριαδικό ανάπτυγμα $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{3^n}$
όπου $b_n \in \{0,2\}$

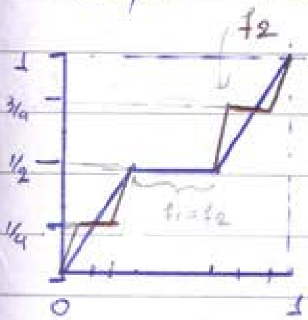


$x \rightsquigarrow$ διαισθητικά ισχύει αυτό

Πρόταση 5 (η συνάρτηση Cantor-Lebesgue)

μπορεί να οριστεί και έτσι $\boxed{f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(b_n/2)}{2^n}, x \in C}$

Είναι μια αύξουσα, συνεχής και επί συνάρτηση $f:[0,1] \to [0,1]$ η οποία είναι σταθερή σε καθένα από τα ανοιχτά διαστήματα που σχηματίζουν το $[0,1] \setminus C$



Επαγωγικά ορίζονται $f_n : [0,1] \to [0,1]$ συνεχείς τ.ω.

(i) $f(0) = 0$, $f(1) = 1$

(ii) Αν I είναι κάποιο διάστημα που αφαιρέθηκε στην κατασκευή του C_n, τότε $f_n =$ σταθερή στο I και $f_n = f_{n+1} = f_{n+2} = \dots$ στο I

(iii) $\|f_{n+1} - f_n\|_\infty = \max\{|f_{n+1}(t) - f_n(t)| \,/\, t \in [0,1]\} \leq \frac{1}{2^n}$

Η $(f_n)_n$ είναι ομοιόμορφα βασική. $\Rightarrow \exists\, f : [0,1] \to [0,1]$ συνεχής τ.ω. $f_n \xrightarrow{ομ} f$. Αυτή η f είναι η συνάρτηση Cantor-Lebesgue.
Η f είναι συνεχής, αύξουσα, και $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, άρα η f είναι επί στο $[0,1]$. Άρα $m(f(C)) = 1$.

Άσκηση $f(C) = [0,1]$

Πρόταση 6 $\exists\, A \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{B}(\mathbb{R})$

απόδειξη Ορίζουμε $g : [0,1] \to [0,2]$ με $g(x) = f(x) + x$, όπου f είναι η συνάρτηση Cantor-Lebesgue.
f αύξουσα, x γνησίως αύξουσα άρα g γνησίως αύξουσα άρα και 1-1. $\Rightarrow g$ 1-1, επί, συνεχής
g συνεχής, $g(0) = 0$, $g(1) = 2$
Άρα η $h := g^{-1} : [0,2] \to [0,1]$ είναι συνεχής

$m(g(C)) = 1$ (άσκηση)
Αφού $m(g(C)) > 0$ (πρόταση 3) $\exists\ F \subseteq g(C)$ μη μετρήσιμο
και $F = g(A)$, όπου $A \subseteq C$
Το $A \in \mathcal{L}$ γιατί $m(A) = 0$, αφού $m(C) = 0$
Ισχυρισμός: Το A δεν είναι Borel.
Πράγματι, αν ήταν Borel τότε και το $h^{-1}(A)$ θα ήταν Borel (επειδή η συνεχής) όμως $h^{-1}(A) = F$ μη μετρήσιμο. Άτοπο.

Μετρήσιμες Συναρτήσεις

| μάθημα 7° 25/10/18 |

Ορισμός Μια συνάρτηση $f : (X, \mathcal{M}) \to (Y, \mathcal{N})$ λέγεται $(\mathcal{M},\mathcal{N})$-μετρήσιμη αν $\forall E \in \mathcal{N}$ έχουμε
$f^{-1}(E) := \{x \in X \,/\, f(x) \in E\} \in \mathcal{M}$

Παρατηρήσεις
1) Η σύνθεση δύο μετρήσιμων συναρτήσεων $(X,\mathcal{M}) \xrightarrow{f} (Y,\mathcal{N}) \xrightarrow{g} (Z,\mathcal{U})$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση.
Πράγματι, $(g\circ f)^{-1}(\underbrace{E}_{\in \mathcal{U}}) = f^{-1}(\underbrace{g^{-1}(E)}_{\in \mathcal{N}}) \in \mathcal{M}$

2) **Λήμμα** Έστω $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(Y)$ τ.ω. $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{N}$. Αν $\forall E \in \mathcal{E}$ έχουμε $f^{-1}(E) \in \mathcal{M}$ τότε η f είναι μετρήσιμη.
απόδειξη: Ορίζουμε $\mathcal{A} = \{E \subseteq Y \,/\, f^{-1}(E) \in \mathcal{M}\}$
Η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα (άσκηση) και $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}$ άρα
$\mathcal{N} = \sigma(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{A}$. Άρα αν $E \in \mathcal{N} \Rightarrow E \in \mathcal{A} \Rightarrow f^{-1}(E) \in \mathcal{M}$

3) Κάθε συνεχής $f : (X, \mathcal{B}(X)) \to (Y, \mathcal{B}(Y))$ είναι $(\mathcal{B}(X), \mathcal{B}(Y))$-μετρήσιμη.
Πράγματι, έστω $\mathcal{E}$ τα ανοικτά υποσύνολα του Y. Τότε $\forall E \in \mathcal{E}$ έχουμε $f^{-1}(E)$ ανοικτό άρα $f^{-1}(E) \in \mathcal{B}(X)$. Αφού $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{B}(Y)$ από το Λήμμα, η f είναι $(\mathcal{B}(X), \mathcal{B}(Y))$-μετρήσιμη.

Ορισμός Μια συνάρτηση $f : (X, \mathcal{M}) \to \mathbb{R}$ λέγεται μετρήσιμη αν είναι $(\mathcal{M}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-μετρήσιμη

Λήμμα Η f είναι μετρήσιμη $\Leftrightarrow \forall a \in \mathbb{R}$ $\underbrace{f^{-1}((a,\infty))}_{\{x \in X \,/\, f(x) > a\}} \in \mathcal{M}$

απόδειξη "$\Rightarrow$" $\forall a \in \mathbb{R}$ το (a,∞) είναι σύνολο Borel (ανοικτό)
"$\Leftarrow$" Παρατηρούμε ότι αν $\mathcal{E} = \{(a,\infty) / a \in \mathbb{R}\}$ τότε $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ και χρησιμοποιούμε το προηγούμενο λήμμα.

Σημείωση Ισοδύναμα αντί για $f^{-1}((a,\infty)) \in \mathcal{M}$ $\forall a$ μπορώ να απαιτήσω $f^{-1}([a,\infty)) \in \mathcal{M}$ $\forall a$ ή $f^{-1}((-\infty,a)) \in \mathcal{M}$ $\forall a$ ή $f^{-1}((-\infty,a]) \in \mathcal{M}$ $\forall a$

Ορισμός (μετρήσιμη στο $E \in \mathcal{M}$) Έστω $f:(X,\mathcal{M}) \to \mathbb{R}$ και $E \in \mathcal{M}$. Λέμε ότι η f είναι μετρήσιμη στο E αν $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ έχουμε ότι $f^{-1}(A) \cap E \in \mathcal{M}$

Έχουμε $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Η Borel σ-άλγεβρα του $\overline{\mathbb{R}}$ αποτελείται από τα σύνολα $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ για τα οποία $A \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$
Ορισμός Μια συνάρτηση $f:(X,\mathcal{M}) \to \overline{\mathbb{R}}$ λέγεται μετρήσιμη αν είναι $(\mathcal{M}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$-μετρήσιμη.

Άσκηση $f:(X,\mathcal{M}) \to \overline{\mathbb{R}}$ μετρήσιμη $\Leftrightarrow$ $\forall a \in \mathbb{R}$ $\{x \in X / f(x) > a\} \in \mathcal{M}$

Ορισμός Μια συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ λέγεται:
(i) Lebesgue μετρήσιμη αν είναι $(\mathcal{L}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-μετρήσιμη
(ii) Borel μετρήσιμη αν είναι $(\mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-μετρήσιμη

Πρόταση 1 Αν $f:(X,\mathcal{M}) \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη και $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής τότε η $g \circ f:(X,\mathcal{M}) \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη.

Πρόταση 2 Αν $f:(X,\mathcal{M}) \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη τότε η $|f|^p$, $p>0$ είναι μετρήσιμη.

Πρόταση 3 Αν $f,g:(X,\mathcal{M}) \to \overline{\mathbb{R}}$ μετρήσιμες, τότε οι $f+g$, $f \cdot g$, λf, $\lambda \in \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμες

Προταση 4 Εστω $f_n : (X, \mathcal{M}) \to \bar{\mathbb{R}}$ μετρήσιμες συναρτήσεις. Τοτε :

(i) $\sup_n f_n$, $\inf_n f_n$, $\limsup_n f_n$, $\liminf_n f_n$ ειναι μετρήσιμες

(ii) Αν $f_n \xrightarrow{κδ} f : (X, \mathcal{M}) \to \bar{\mathbb{R}}$ τοτε η f είναι μετρήσιμη.

<u>αποδειξη προτασης 1</u>

Εστω $a \in \mathbb{R}$. Το $(g \circ f)^{-1}((a, \infty)) = f^{-1}(\underbrace{g^{-1}(a,\infty)}_{\text{ανοικτο γιατί } g \text{ συνεχης}}) \in \mathcal{M}$ γιατί f μετρήσιμη

άρα $g \circ f$ μετρήσιμη

<u>Αποδειξη προτασης 2</u>

Ορίζουμε $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $g(x) = |x|^p$. Η g είναι συνεχής, άρα από πρόταση 1 η $g \circ f$ είναι μετρησιμη. Είναι $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = |f(x)|^p$ δηλαδή $g \circ f = |f|^p$

<u>Αποδειξη προτασης 3</u>

(α) Εστω $a \in \mathbb{R}$. Εχουμε $\{x \in X / f(x) + g(x) > a\} = \{x \in X / f(x) > a - g(x)\}$

$$= \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X / f(x) > q_n > a - g(x)\} \quad (\text{οπου } \{q_n / n \in \mathbb{N}\} := \mathbb{Q})$$

$$= \bigcup_{n=1}^{\infty} \Big(\underbrace{\{x \in X / f(x) > q_n\}}_{\substack{\in \mathcal{M} \\ \text{γιατί } f \text{ μετρησιμη}}} \cap \underbrace{\{x \in X / g(x) > a - q_n\}}_{\substack{\in \mathcal{M} \\ \text{γιατί } g \text{ μετρησιμη}}} \Big) \in \mathcal{M}$$

(β) $f \cdot g = \dfrac{(f+g)^2 - (f-g)^2}{4}$ μετρήσιμη γιατί οι $f+g$, $f-g$ είναι μετρήσιμες από (α), και τα τετραγωνα είναι μετρησιμα από την προταση 2.

<u>αποδειξη προτασης 4</u>

(i) Εστω $a \in \mathbb{R}$. $\{x \in X / \sup_n f_n(x) > a\} = \bigcup_n \underbrace{\{x \in X / f_n(x) > a\}}_{\in \mathcal{M}} \in \mathcal{M}$

$$\{x \in X / \inf_n f_n(x) \geq a\} = \bigcap_n \underbrace{\{x \in X / f_n(x) \geq a\}}_{\in \mathcal{M}} \in \mathcal{M}$$

$\limsup_n f_n(x) = \lim_n \left(\sup_{k \geq n} f_k(x)\right) = \inf_n \left(\sup_{k \geq n} f_k(x)\right)$ μετρήσιμη.

$\liminf_n f_n(x) = \sup_n \left(\inf_{k \geq n} f_k(x)\right)$ μετρήσιμη

(ii) Αν $f_n \xrightarrow{\kappa.\sigma.} f$ τότε $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \limsup_n f_n(x) = \liminf_n f_n(x)$

άρα f μετρήσιμη

Άσκηση $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) = \sigma(\{(a,+\infty] / a \in \mathbb{R}\}) = \sigma(\{[a,\infty] / a \in \mathbb{R}\}) =$
$= \sigma\{[-\infty, a) / a \in \mathbb{R}\}) = \sigma(\{[-\infty, a] / a \in \mathbb{R}\})$

Άσκηση 1 Αν $E \subseteq X$ και $\chi_E(x) := \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \notin E \end{cases}$, $\forall x \in X$, όπου

$(X, \mathcal{M})$ μετρήσιμος χώρος και $E \subseteq X$, ν.δ.ο.
$E \in \mathcal{M} \Leftrightarrow \chi_E$ μετρήσιμη

απόδειξη $(\Rightarrow)$ $\chi_E^{-1}((a,\infty)) = \begin{cases} \emptyset, & \text{αν } a \geq 1 & \in \mathcal{M} \text{ πάντα} \\ E, & \text{αν } 0 \leq a < 1 & \in \mathcal{M} \text{ από υπόθεση} \\ X, & \text{αν } a < 0 & \in \mathcal{M} \text{ πάντα} \end{cases}$

$(\Leftarrow)$ $E = \chi_E^{-1}((\tfrac{1}{2}, \infty)) \in \mathcal{M}$

άσκηση 2 $\chi_E \circ g = \chi_{g^{-1}(E)}$, $E \subseteq \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

απόδειξη $(\chi_E \circ g)(x) = \chi_E(g(x)) = \begin{cases} 1, & g(x) \in E \\ 0, & g(x) \notin E \end{cases} = \begin{cases} 1, & x \in g^{-1}(E) \\ 0, & x \notin g^{-1}(E) \end{cases}$

Παράδειγμα Υπάρχουν συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τ.ω. f μετρήσιμη, g συνεχής αλλά η $f \circ g$ να μην είναι μετρήσιμη

Εννοούμε Lebesgue μετρήσιμη

απόδειξη

Υπενθύμιση Αν $u: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι η συνάρτηση Cantor-Lebesgue (ορισμένη στο $[0,1]$ όπως ξέρουμε, και την επεκτείνουμε στο $\mathbb{R}$ θέτοντας $u(x) = 0$ $\forall x < 0$, $u(x) = 1$ $\forall x > 1$) θεωρούμε την $h(x) = u(x) + x$. Βασική ιδιότητα της h: $m(h(C)) = 1 > 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists F \subseteq h(C)$ μη μετρήσιμο

απόδειξη Έχουμε $F = h(A)$ για κάποιο $A \subseteq C$ ($m(C) = 0 \Rightarrow A \in \mathcal{L}$)

Θεωρούμε την $g = h^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Η g είναι συνεχής.
Έχουμε $A \in \mathcal{L}$ και $g^{-1}(A) = h(A) = F \notin \mathcal{L}$. Άρα χ_A μετρήσιμη, g συνεχής και $\chi_A \circ g = \chi_{g^{-1}(A)}$ δεν είναι μετρήσιμη.

Απλές Συναρτήσεις

Ορισμός Μια συνάρτηση $f : (X, \mathcal{M}) \to \mathbb{R}$ λέγεται απλή (μετρήσιμη) αν $\exists\, E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{M}$ και $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ τ.ω. $f = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_i}$

Λήμμα Έστω $f : (X, \mathcal{M}) \to \mathbb{R}$
Η f είναι απλή $\Leftrightarrow$ το σύνολο τιμών της f είναι μη κενό, πεπερασμένο $\{b_1, \ldots, b_N\} \subseteq \mathbb{R}$ και τα $f^{-1}(\{b_j\}) \in \mathcal{M}$ $\Leftrightarrow$ $f = \sum_{j=1}^{N} b_j \chi_{A_j}$ όπου

$b_j \in \mathbb{R}$, $A_j \in \mathcal{M}$, A_j ξένα, $A_1 \cup \cdots \cup A_N = X$

απόδειξη "$\Leftarrow$" άμεσο
"$\Rightarrow$" το σύνολο τιμών της f είναι πεπερασμένο.
Πράγματι, $f(X) \subseteq \{\delta_1 a_1 + \cdots + \delta_n a_n \;/\; \delta_j \in \{0,1\}\}$ $\rightsquigarrow$ πεπερασμένο σύνολο (Δηλαδή ακόμα και αν τα E_i επικαλύπτονται μπορώ να τα χωρίσω σε ξένα σύνολα A_j και τότε το σύνολο τιμών είναι πεπερασμένο.
πχ $f = 1\chi_{[-2,2]} + 2\chi_{[0,4]} \Rightarrow f = 1\chi_{[-2,0)} + 3\chi_{[0,2]} + 2\chi_{(2,4]}$)

Ορισμός η αναπαράσταση της f ως $f = \sum_{j=1}^{N} b_j \chi_{A_j}$ όπως στο λήμμα, λέγεται κανονική αναπαράσταση της f.

Άσκηση Αν f, g απλές τότε οι $f+g$, $f \cdot g$ είναι απλές.

Θεώρημα (α) Έστω $f : (X, \mathcal{M}) \to [0, +\infty]$. Υπάρχει ακολουθία $\varphi_n : (X, \mathcal{M}) \to \mathbb{R}$ απλών συναρτήσεων τ.ω.
(i) $0 \leq \varphi_1 \leq \varphi_2 \leq \cdots \leq \varphi_n \leq \varphi_{n+1} \leq \cdots \leq f$
(ii) $\varphi_n \xrightarrow{\kappa.\sigma.} f$
(β) Έστω $f : (X, \mathcal{M}) \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη. Τότε υπάρχει ακολουθία $(\varphi_n)_n$ απλών μετρήσιμων με $0 \leq |\varphi_1| \leq |\varphi_2| \leq \cdots \leq |f|$ και $\varphi_n \xrightarrow{\kappa.\sigma.} f$

Ορισμός του Ολοκληρώματος στον $(X, \mathcal{M}, \mu)$ χώρο μέτρου

Βήμα 1 αν $\varphi = \sum_{j=1}^{N} b_j \chi_{A_j}$ η κανονική αναπαράσταση της φ, με $b_j \geq 0$

ορίζουμε $\int \varphi \, d\mu := \sum_{j=1}^{N} b_j \mu(A_j)$ [σύμβαση: $0 \cdot (+\infty) = 0$]

Βήμα 2 Αν $f : (X, \mathcal{M}) \to [0, +\infty]$ ορίζουμε $\int f \, d\mu = \sup \left\{ \int \varphi \, d\mu \,/\, \underset{\varphi \text{ απλή}}{0 \leq \varphi \leq f} \right\}$
↳ f μετρήσιμη

μάθημα 8°
30/10/18

αποδειξη θεωρήματος

(α) $\forall n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε το $[0, 2^n)$ και το χωρίζουμε στα
$J_{n,k} = \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)$, $k = 0, 1, \dots, 2^{2n}-1$.

Ορίζουμε $E_{n,k} = \left\{ \frac{k}{2^n} \leq f \leq \frac{k+1}{2^n} \right\} = f^{-1}(J_{n,k})$

και $\varphi_n = \sum_{k=0}^{2^{2n}-1} \frac{k}{2^n} \chi_{E_{n,k}} + 2^n \chi_{\{f \geq 2^n\}}$

① φ_n απλή, $\varphi_n \geq 0$, $\varphi_n \leq f$

② $\varphi_n \leq \varphi_{n+1}$ Πράγματι, αν $x \in J_{n,k}$ τότε:

- αν $x \in J_{n+1, 2k}$ τότε $\varphi_{n+1}(x) = \frac{2k}{2^{n+1}} = \frac{k}{2^n} = \varphi_n(x)$
- αν $x \in J_{n+1, 2k+1}$ τότε $\varphi_{n+1}(x) = \frac{2k+1}{2^{n+1}} = \frac{k}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} = \varphi_n(x) + \frac{1}{2^{n+1}} > \varphi_n(x)$
- Αν $f(x) \geq 2^n$ τότε $\varphi_n(x) = 2^n$, ενώ $\varphi_{n+1}(x) \geq 2^n$

③ $\varphi_n \leq f$

④ $\varphi_n \xrightarrow{\kappa\sigma} f$. Αν $f(x) = +\infty$ τότε $\forall n$ $f(x) \geq 2^n \Rightarrow \varphi_n(x) = 2^n \to +\infty$

Αν $f(x) < \infty$ $\exists n_0 : \forall n \geq n_0$ $f(x) \in [0, 2^n)$. Τότε $\forall n \geq n_0$
$f(x) \in \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)$ για κάποιο $k < 2^{2n}$ και $\varphi_n(x) = \frac{k}{2^n}$

$$\Rightarrow 0 \leq f(x) - \varphi_n(x) < \frac{1}{2^n}$$

$$\Downarrow$$

$$\varphi_n(x) \to f(x)$$

(β) Ορίζουμε $f^+ = \max\{f, 0\} = \frac{f + |f|}{2}$, $f^- = -\min\{f, 0\} = \max\{-f, 0\} = \frac{|f| - f}{2}$