Ορισμός του Ολοκληρώματος στον $(X, \mathcal{M}, \mu)$ χώρο μέτρου

Βήμα 1 αν $\varphi = \sum_{j=1}^{N} b_j \chi_{A_j}$ η κανονική αναπαράσταση της φ, με $b_j \geq 0$

ορίζουμε $\int \varphi \, d\mu := \sum_{j=1}^{N} b_j \mu(A_j)$ [σύμβαση: $0 \cdot (+\infty) = 0$]

Βήμα 2 Αν $f : (X, \mathcal{M}) \to [0, +\infty]$ ορίζουμε $\int f \, d\mu = \sup\left\{ \int \varphi \, d\mu \,/\, \underset{\varphi \text{ απλή}}{0 \leq \varphi \leq f} \right\}$
↳ f μετρήσιμη

μάθημα 8°
30/10/18

απόδειξη θεωρήματος

(a) $\forall n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε το $[0, 2^n)$ και το χωρίζουμε στα
$J_{n,k} = \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)$, $k = 0, 1, \ldots, 2^{2n} - 1$.

Ορίζουμε $E_{n,k} = \left\{ \frac{k}{2^n} \leq f \leq \frac{k+1}{2^n} \right\} = f^{-1}(J_{n,k})$

και $\varphi_n = \sum_{k=0}^{2^{2n}-1} \frac{k}{2^n} \chi_{E_{n,k}} + 2^n \chi_{\{f \geq 2^n\}}$

① φ_n απλή, $\varphi_n \geq 0$, $\varphi_n \leq f$

② $\varphi_n \leq \varphi_{n+1}$ Πράγματι, αν $x \in J_{n,k}$ τότε:

• αν $x \in J_{n+1, 2k}$ τότε $\varphi_{n+1}(x) = \frac{2k}{2^{n+1}} = \frac{k}{2^n} = \varphi_n(x)$

• αν $x \in J_{n+1, 2k+1}$ τότε $\varphi_{n+1}(x) = \frac{2k+1}{2^{n+1}} = \frac{k}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} = \varphi_n(x) + \frac{1}{2^{n+1}} > \varphi_n(x)$

• Αν $f(x) \geq 2^n$ τότε $\varphi_n(x) = 2^n$, ενώ $\varphi_{n+1}(x) \geq 2^n$

③ $\varphi_n \leq f$

④ $\varphi_n \xrightarrow{\kappa.\sigma.} f$. Αν $f(x) = +\infty$ τότε $\forall n$ $f(x) \geq 2^n \Rightarrow \varphi_n(x) = 2^n \to +\infty$

Αν $f(x) < \infty$ $\exists n_0 : \forall n \geq n_0$ $f(x) \in [0, 2^n)$. Τότε $\forall n \geq n_0$
$f(x) \in \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)$ για κάποιο $k < 2^{2n}$ και $\varphi_n(x) = \frac{k}{2^n}$

$\Rightarrow 0 \leq f(x) - \varphi_n(x) < \frac{1}{2^n} \Rightarrow \varphi_n(x) \to f(x)$

(b) Ορίζουμε $f^+ = \max\{f, 0\} = \frac{f + |f|}{2}$, $f^- = -\min\{f, 0\} = \max\{-f, 0\} = \frac{|f| - f}{2}$

Τότε $f = f^+ - f^-$ και $|f| = f^+ + f^-$.

Έχουμε $f^+, f^- : (X, \mathcal{M}) \to [0, +\infty)$ άρα υπάρχουν απλές $\varphi_n \uparrow f^+$, $J_n \uparrow f^-$ από το (α). Ορίζουμε $\psi_n = \varphi_n - J_n \xrightarrow{\kappa.\sigma.} f^+ - f^- = f$

Επίσης ισχύουν τα εξής:

ψx μια από τις φ_n, J_n είναι μηδέν

- $|\psi_n| \leq |\psi_{n+1}|$. Πράγματι, $\psi_n = |\varphi_n - J_n| \overset{\downarrow}{=} \max\{\varphi_n, J_n\} \leq$ $\leq \max\{\varphi_{n+1}, J_{n+1}\} = |\varphi_{n+1} - J_{n+1}| = |\psi_{n+1}|$
- $|\psi_n| \leq |f|$. Πράγματι, $|\psi_n| = |\varphi_n - J_n| = \max\{\varphi_n, J_n\} \leq$ $\leq \max\{f^+, f^-\} = |f|$

Πρόταση 1 Έστω φ, ψ απλές, θετικές, μετρήσιμες στον $(X, \mathcal{M}, \mu)$

(α) Αν $c > 0$ τότε $\int c\varphi \, d\mu = c \int \varphi \, d\mu$

(β) $\int (\varphi + \psi) d\mu = \int \varphi \, d\mu + \int \psi \, d\mu$

(γ) Αν $0 \leq \varphi \leq \psi$ τότε $\int \varphi \, d\mu \leq \int \psi \, d\mu$

(δ) Η απεικόνιση $A \mapsto \int_A \varphi \, d\mu$, $A \in \mathcal{M}$ είναι μέτρο στην $\mathcal{M}$

Ορισμός Αν $A \in \mathcal{M}$ και φ απλή, τότε $\varphi \cdot \chi_A = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{A \cap E_j}$ = απλή και ορίζουμε $\int_A \varphi \, d\mu = \int_X \varphi \cdot \chi_A \, d\mu$

απόδειξη πρότασης

(α) $c\varphi = c \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j} = \sum_{j=1}^{n} (c \cdot a_j) \chi_{E_j} \Rightarrow \int (c\varphi) d\mu = \sum_{j=1}^{n} c a_j \mu(E_j) =$

$= c \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(E_j) = c \int \varphi \, d\mu$

(β) $\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j}$, $\psi = \sum_{k=1}^{s} b_k \chi_{F_k}$

$\forall j \quad E_j = E_j \cap X = E_j \cap \left(\bigcup_{k=1}^{s} F_k \right) = \bigcup_{k=1}^{s} \underbrace{(E_j \cap F_k)}_{\text{ξένα}}$

$\forall k \quad F_k = \bigcup_{j=1}^{n} \underbrace{(E_j \cap F_k)}_{\text{ξένα}}$

$\varphi + \psi = \sum_{j=1}^{n} a_j \sum_{k=1}^{s} \chi_{E_j \cap F_k} + \sum_{k=1}^{s} b_k \sum_{j=1}^{n} \chi_{E_j \cap F_k} = \sum_{j,k} (a_j + b_k) \chi_{E_j \cap F_k}$

$\Rightarrow \int (\varphi + \psi) d\mu = \sum_{j,k} (a_j + b_k) \mu(E_j \cap F_k)$

$$\int \varphi\, d\mu + \int \psi\, d\mu = \sum_{j=1}^{n} a_j\, \mu(E_j) + \sum_{k=1}^{s} b_k\, \mu(F_k) =$$

$$= \sum_{j,k} a_j\, \mu(E_j \cap F_k) + \sum_{j,k} b_k\, \mu(E_j \cap F_k) = \sum_{j,k} (a_j + b_k)\, \mu(E_j \cap F_k) \quad (*)$$

(γ) $\varphi = \sum_{j,k} a_j\, \chi_{E_j \cap F_k}$ | αφού $\varphi \le \psi$, αν $E_j \cap F_k \neq \emptyset$ έχουμε $a_j \le b_k$

$\psi = \sum_{j,k} b_k\, \chi_{E_j \cap F_k}$

Τότε $\int \varphi\, d\mu = \sum_{\substack{j,k \\ E_j \cap F_k \neq \emptyset}} a_j\, \mu(E_j \cap F_k)$

$\int \psi\, d\mu = \sum_{\substack{j,k \\ E_j \cap F_k \neq \emptyset}} b_k\, \mu(E_j \cap F_k)$

$\overset{(*)}{\Longrightarrow} \int \varphi\, d\mu \le \int \psi\, d\mu$

(δ) Έστω $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{M}$, A_i ξένα. Θέτουμε $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$

Αν $v(A) = \int_A \varphi\, d\mu$, ζητάμε $v(\bigcup_i A_i) = \sum_i v(A_i)$

Δηλαδή ζητάμε $\int_A \varphi\, d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} \varphi\, d\mu$

$$\int_A \varphi\, d\mu = \int \varphi\, \chi_A\, d\mu = \sum_{j=1}^{n} a_j\, \mu(A \cap E_j) = \sum_{j=1}^{n} a_j\, \mu\Big(\bigcup_i (A_i \cap E_j)\Big) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_j \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i \cap E_j) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} a_j\, \mu(A_i \cap E_j) = \sum_{i=1}^{\infty} \int \sum_{j=1}^{n} a_j\, \chi_{A_i \cap E_j}\, d\mu =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} \sum_{j=1}^{n} a_j\, \chi_{E_j}\, d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} \varphi\, d\mu$$

Παρατήρηση για το βήμα 2 του ορισμού του ολοκληρώματος

1) Αν η θετική μετρήσιμη f, είναι επιπλέον απλή τότε οι ορισμοί του 1ου και 2ου βήματος για το ολοκλήρωμα συμπίπτουν.

2) Αν $0 \le f \le g$ τότε $\int f\, d\mu \le \int g\, d\mu$ (άμεσο από τον ορισμό)

3) $\int (c f)\, d\mu = c \int f\, d\mu$, για $c \geq 0$.

Θεώρημα μονότονης σύγκλισης

Έστω $\{f_n\}$ αύξουσα ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων $f_n : X \to [0, +\infty]$. Ορίζουμε $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Τότε ισχύει:

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu \qquad \left(\text{δηλ. } \int f_n d\mu \to \int f \, d\mu \right)$$

<u>απόδειξη</u> $f_n \leq f_{n+1} \leq f \Rightarrow \int f_n \leq \int f_{n+1} \leq \int f$ άρα η $\left(\int f_n d\mu\right)_n$ είναι αύξουσα. $\Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu$ και $\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu \leq \int f \, d\mu$

Για την αντίστροφη ανισότητα, θεωρούμε $0 < \alpha < 1$, $0 \leq \varphi \leq f$ και δείχνουμε ότι $\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu \geq \alpha \int \varphi \, d\mu$. Τότε $\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu \geq$

$\geq \alpha \sup_{0 \leq \varphi \leq f} \int \varphi \, d\mu = \alpha \int f \, d\mu$. Αφήνοντας το $\alpha \to 1$ έχουμε το ζητούμενο.

$\forall n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $E_n = \{x \in X \,/\, f_n(x) \geq \alpha \cdot \varphi(x)\}$

<u>Ισχυρισμός</u> Η $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι αύξουσα ακολουθία μετρήσιμων συνόλων και $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = X$. Πράγματι, έστω $x \in X$ με $0 < f(x) < \infty$.

Έχουμε $\varphi(x) \leq f(x) \Rightarrow \alpha\varphi(x) < f(x) \Rightarrow \exists n : \underset{\substack{\downarrow \\ f(x)}}{f_n(x)} > \alpha\varphi(x) \Rightarrow x \in E_n$.

Αν $f(x) = +\infty$ τότε $f_n(x) \to +\infty$ και $\alpha \cdot \varphi(x) \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists n \; f_n(x) > \alpha\varphi(x)$ $\Rightarrow x \in E_n$.

Αν $f(x) = 0$ τότε $\varphi(x) = 0$ και $f_n(x) = 0 = \alpha \cdot \varphi(x) \; \forall n$.

Τώρα $\int f_n d\mu \geq \int f_n \chi_{E_n} d\mu \geq \int \alpha \, \varphi \, \chi_{E_n} d\mu = \alpha \int_{E_n} \varphi \, d\mu \xrightarrow{(*)} \alpha \int_X \varphi \, d\mu$

$$\left[\overset{(*)}{\nu(E)} = \int_E \varphi \, d\mu \text{ μέτρο} \qquad E_n \uparrow X \quad \Rightarrow \nu(E_n) \uparrow \nu(X) \right]$$

Άρα $\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu \geq \alpha \int \varphi \, d\mu$

Θεώρημα 1 Αν $\{f_n\}$ πεπερασμένη ή άπειρη ακολουθία θετικών μετρήσιμων συναρτήσεων και $f = \sum_n f_n$ τότε $\int f \, d\mu = \sum_n \int f_n \, d\mu$

απόδειξη • Πρώτα για δύο συναρτήσεις f, g θετικές μετρήσιμες.
Υπάρχουν απλές $0 \leq \varphi_n \leq f$, $0 \leq \psi_n \leq g$ απλές τ.ω.:
$\varphi_n \uparrow f$, $\psi_n \uparrow g \overset{\Theta M \Sigma}{\Longrightarrow} \int \varphi_n \to \int f$ και $\int \psi_n \to \int g$
και $\varphi_n + \psi_n \uparrow f+g \Rightarrow \int \varphi_n + \psi_n = \int \varphi_n + \int \psi_n \to \int f + \int g$

$$\downarrow \Theta M \Sigma$$

$$\int (f+g) \, d\mu$$

• Επαγωγικά $\forall n \in \mathbb{N}$ έχουμε:

$$\int \left(\sum_{n=1}^{N} f_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{N} \int f_n \, d\mu$$

$\Theta M \Sigma \Big\downarrow \sum_{n=1}^{N} f_n \uparrow f \qquad \downarrow$

$$\int f \, d\mu \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n \, d\mu$$

άρα $\int f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n \, d\mu$

Πρόταση 1 Αν f θετική μετρήσιμη τότε $\int f \, d\mu = 0 \Longleftrightarrow f = 0$ μ-σ.π

Πόρισμα 1 (σχεδόν παντού έκδοση του ΘΜΣ)
Αν f_n, f θετικές μετρήσιμες και $f_n \uparrow f$ σ.π τότε $\int f_n \, d\mu \to \int f \, d\mu$

Λήμμα Fatou
Αν $(f_n)_n$ θετική μετρήσιμη τότε $\int \liminf_n f_n \, d\mu \leq \liminf_n \int f_n \, d\mu$

Πόρισμα 2 Αν $(f_n)_n$ θετική μετρήσιμη και $f_n \xrightarrow{\kappa.\sigma.} f$ τότε
$\int f \, d\mu \leq \liminf_n \int f_n \, d\mu$ (Ισχύει και στην σχεδόν παντού έκδοση)

απόδειξη πρότασης 1
($\Rightarrow$) Ξέρουμε ότι $\int f \, d\mu = 0$. Ζητάμε $\mu(\{f > 0\}) = 0$.
Γράφουμε $\{f > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{f > \frac{1}{n}\}$, άρα αρκεί $\mu(\{f > \frac{1}{n}\}) = 0 \ \forall n$.

$$\frac{1}{n}\mu(\{f>\tfrac{1}{n}\}) = \int_{\{f>\frac{1}{n}\}} \frac{1}{n}\, d\mu \le \int_{\{f>\frac{1}{n}\}} f\, d\mu = \int f\cdot \chi_{\{f>\frac{1}{n}\}} \le \int f\, d\mu = 0$$

άρα $\mu(\{f>\frac{1}{n}\})=0$

($\Leftarrow$) Αν $f=0$ σ.π. παρατηρώ ότι αν $0\le \varphi \le f$, φ απλή και $\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j \cdot \chi_{E_j}$ η κανονική της αναπαράσταση τότε $\forall j$ τ.ω. $\mu(E_j)>0$

έχουμε $a_j=0$ (Αλλιώς θα είχα $f\ge\varphi=a_j>0$ σε E_j με $\mu(E_j)>0$)

Άρα $\forall\, 0\le\varphi\le f$ έχουμε $\int\varphi\, d\mu = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{a_j\mu(E_j)}_{=0\ \forall j} = 0$

Άρα $\int f\, d\mu = \sup\{\underbrace{\int\varphi\, d\mu}_{=0} \,/\, 0\le\varphi\le f,\ \varphi \text{ απλή}\} = 0$

$\boxed{\text{μάθημα } 9^{o} \quad 1/11/18}$

Παρατήρηση Αν $f:(X,\mathcal{M},\mu)\to[0,\infty]$ μετρήσιμη τότε η $v(A)=\int_A f\, d\mu := \int f\chi_A\, d\mu$, $A\in\mathcal{M}$

είναι μέτρο

απόδειξη Αν (A_n) ξένα στην $\mathcal{M}$ και $A=\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ τότε:

$$v(A) = \int f\chi_A\, d\mu = \int \sum_{n=1}^{\infty} f\chi_{A_n} = \sum_{n=1}^{\infty}\int f\chi_{A_n}\, d\mu =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n} f = \sum_{n=1}^{\infty} v(A_n)$$

$\left[\chi_{\cup A_n} = \sum_n \chi_{A_n}\right]$ επειδή αν ξένα

απόδειξη πορίσματος 1

$\exists\, Z\in\mathcal{M}$ με $\mu(Z)=0$ τ.ω. $\forall x\in X\setminus Z$ $f_n(x)\uparrow f(x)$

$$\int f\, d\mu = \int_{X\setminus Z} f\, d\mu + \int_Z f\, d\mu = \int f\chi_{X\setminus Z}\, d\mu.$$

Όμως $f_n\chi_{X\setminus Z}\uparrow f\cdot\chi_{X\setminus Z}$ παντού άρα:

$$\int f\chi_{X\setminus Z}\, d\mu \overset{\text{ΘΜΣ}}{=} \lim_{n\to\infty}\int f_n\cdot\chi_{X\setminus Z}\, d\mu$$

$$\int f_n\chi_{X\setminus Z}\, d\mu = \int f_n\, d\mu$$

Παρατήρηση Η υπόθεση ότι η $\{f_n\}$ είναι αύξουσα είναι απαραίτητη.

1) $f_n = \chi_{(n,n+1)} \to 0$ όμως $\int f_n = 1 \ \forall n$

2) $f_n = n\chi_{(0,\frac{1}{n})} \to 0$ όμως $\int f_n = 1 \ \forall n$

απόδειξη λήμματος Fatou

$\liminf_n f_n = \lim_{n\to\infty} (\inf_{k \geq n} f_k) = \lim_{n\to\infty} g_n$, όπου $g_n = \inf_{k\geq n} f_k$

Επίσης η $\{g_n\}$ είναι αύξουσα : $g_n \leq g_{n+1}$. Από το ΘΜΣ :

$\int \liminf_n f_n = \int \lim_n g_n \overset{ΘΜΣ}{=} \lim_n \int g_n \, d\mu$

Όμως $g_n = \inf_{k\geq n} f_k \leq f_n \Rightarrow \int g_n \, d\mu \leq \int f_n \, d\mu \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int g_n = \liminf_n \int g_n d\mu \leq \liminf_n \int f_n \, d\mu$

Πρόταση 2 Αν f θετική μετρήσιμη και $\int f d\mu < \infty$ τότε $\mu(\{f = +\infty\}) = 0$ και το $\{f > 0\}$ είναι σ-πεπερασμένο.

Ανισότητα Markov

$\forall a > 0$: $\mu(\{f \geq a\}) \leq \frac{1}{a} \int f \, d\mu$

απόδειξη $\int f \, d\mu \geq \int_{\{f\geq a\}} f \, d\mu \geq \int_{\{f \geq a\}} a \, d\mu = a\mu(\{f \geq a\})$

απόδειξη πρότασης 2

$\{f = +\infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{f \geq n\} \Rightarrow \mu(\{f = +\infty\}) \overset{\forall n}{\leq} \mu(\{f \geq n\}) \leq \frac{1}{n} \int f \, d\mu \to 0$

- $\{f > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{f > \frac{1}{n}\}$ και $\mu(\{f > \frac{1}{n}\}) \leq n \int f \, d\mu < \infty$

Βήμα 3 του ορισμού του Ολοκληρώματος

Έστω $f : (X, \mathcal{M}, \mu) \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη. Θεωρούμε τις $f^+ = \max\{f, 0\}$, $f^- = -\min\{f, 0\} = \max\{-f, 0\}$. Αυτές είναι μετρήσιμες, ≥ 0, και $f = f^+ - f^-$, $|f| = f^+ + f^-$

Ορίζουμε $\int f\,d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu$, αν τουλάχιστον ένα από τα

$\int f^+ d\mu$, $\int f^- d\mu$ $<\infty$, και λέμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη αν $\int f^+ d\mu < \infty$ και $\int f^- d\mu < \infty$

Πρόταση 1 Ο χώρος των ολοκληρώσιμων συναρτήσεων είναι γραμμικός χώρος και το ολοκλήρωμα γραμμικό συναρτησοειδές

απόδειξη αν f, g ολοκληρώσιμες και $a, b \in \mathbb{R}$ τότε:

$|af+bg| \leq |a||f| + |b||g|$ και $\int |af+bg| \leq |a| \underbrace{\int |f|}_{<\infty} + |b| \underbrace{\int |g|}_{<\infty} < \infty$

άρα $|af+bg|$ ολοκληρώσιμη $\Rightarrow af+bg$ ολοκληρώσιμη.

$\int af = a\int f$ (απλό)

Έστω f, g ολοκληρώσιμες. Θέτουμε $h = f+g$ και γράφουμε

$f = f^+ - f^-$, $g = g^+ - g^-$, $h = h^+ - h^-$.

τότε $h^+ - h^- = f^+ - f^- + g^+ - g^- \Rightarrow h^+ + f^- + g^- = f^+ + g^+ + h^- \Rightarrow$

$\Rightarrow \int h^+ + \int f^- + \int g^- = \int f^+ + \int g^+ + \int h^- \Rightarrow$

$\Rightarrow \int h = \int h^+ - \int h^- = \left(\int f^+ - \int f^-\right) + \left(\int g^+ - \int g^-\right) = \int f + \int g$

Βήμα 4 του ορισμού του ολοκληρώματος

Έστω $f : (X, \mathcal{M}, \mu) \to \mathbb{C}$ μετρήσιμη, δηλαδή οι $\mathrm{Re} f$, $\mathrm{Im} f$ είναι μετρήσιμες. Θα λέμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη αν οι $\mathrm{Re} f$, $\mathrm{Im} f$, είναι ολοκληρώσιμες και ορίζουμε $\int f\,d\mu = \int \mathrm{Re} f\,d\mu + i\int \mathrm{Im} f\,d\mu$

Πρόταση 2 Οι ολοκληρώσιμες $f : (X, \mathcal{M}, \mu) \to \mathbb{C}$ είναι μιγαδικός γρ. χώρος και το ολοκλήρωμα μιγαδικό γραμμικό συναρτησοειδές.

Επίσης $\left|\int f\,d\mu\right| \leq \int |f|\,d\mu$ $\forall f$ ολοκληρώσιμη

απόδειξη της ανισότητας

Γράφουμε $\int f\,d\mu = \left|\int f\,d\mu\right| e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$

άρα $\left|\int f\,d\mu\right| = e^{-i\theta}\int f\,d\mu = \int e^{-i\theta} f\,d\mu \overset{|\int f d\mu| \in \mathbb{R}}{=} \int \mathrm{Re}(e^{-i\theta} f)\,d\mu \leq$

$\leq \int |e^{-i\theta} f|\,d\mu = \int \underbrace{|e^{-i\theta}|}_{=1} |f|\,d\mu = \int |f|\,d\mu$

Πρόταση 3

(α) Αν f ολοκληρώσιμη τότε το $\{f \neq 0\}$ είναι σ-πεπερασμένο

(β) Αν f, g ολοκληρώσιμες τότε $\forall E \in \mathcal{M}$ $\int_E f = \int_E g \overset{(1)}{\iff} \int |f-g| d\mu = 0 \overset{(2)}{\iff}$

$\iff f = g$ σ.π.

<u>απόδειξη</u> (α) $\{f \neq 0\} = \{|f| > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{|f| > \frac{1}{n}\}$ και $\mu(\{|f| > \frac{1}{n}\}) \leq$

$\leq n \int |f| d\mu < \infty$

(β) Το (2) είναι απλό.

Για το (1): ($\Leftarrow$) Έστω $E \in \mathcal{M}$ τότε $\left| \int_E f - \int_E g \right| = \left| \int (f-g) \chi_E \right| \leq$

$\leq \int |f-g| \chi_E \leq \int |f-g| = 0$

($\Rightarrow$) Θ.δ.ο $\int_E f = \int_E g \Rightarrow f = g$ μ.σ.π.

Έστω ότι $\mu(\{f-g \neq 0\}) > 0$. Γράφουμε $u = Re(f-g), v = Im(f-g)$ και $f-g = (u^+ - u^-) + i(v^+ - v^-)$. Κάποιο από τα $\{u^+ \neq 0\}, \{u^- \neq 0\}, \{v^+ \neq 0\}, \{v^- \neq 0\}$ έχει θετικό μέτρο.

Έστω ότι $\mu(\underbrace{\{u^+ \neq 0\}}_{:= E}) > 0$. Στο E έχω $u^- = 0$. Άρα:

$$\int_E (f-g) d\mu = \int_E u \, d\mu + i \int_E v \, d\mu \overset{⊛}{=} \underbrace{\int_E u^+ d\mu}_{> 0} + i \int_E v \, d\mu \neq 0 \quad \text{άτοπο}$$

⊛ <u>Άσκηση</u> Αν $f: E \to \mathbb{R}$, $f > 0$, $\mu(E) > 0$ τότε $\int_E f \, d\mu > 0$

Ορισμός <u>ο χώρος $L^1(X, \mathcal{M}, \mu) = L^1(\mu)$</u>

Αν f, g ολοκληρώσιμες και $f = g$ σ.π. τότε $\int_E f \, d\mu = \int_E g \, d\mu$, $E \in \mathcal{M}$

Ορίζουμε σχέση ισοδυναμίας στο γρ. χώρο των ολοκληρώσιμων συναρτήσεων:

$f \sim g \overset{\text{ορ}}{\iff} f = g$ σ.π

Ο $L^1(\mu)$ είναι ο χώρος των κλάσεων ισοδυναμίας $[f] = \{g \text{ ολοκληρώσιμη και } f = g \text{ σ.π.}\}$

Γίνεται γρ. χώρος με πράξεις $[\alpha f + \beta g] = \{ \alpha u + \beta v \,/\, u \sim f, v \sim g \}$
(αν $f \sim g$ τότε $\int f = \int g$)
Ορίζουμε $d([f],[g]) := d(f,g) = \int |f-g| \, d\mu$. Η d είναι μετρική
Θα δούμε επίσης ότι ο $(L^1(\mu), d)$ είναι πλήρης.
Θα υποθέτουμε ότι αν $f \in L^1(\mu)$ τότε η f παίρνει πεπερασμένες τιμές.

Θεώρημα Κυριαρχημένης σύγκλισης

Έστω $f_n \in L^1(\mu)$ και $f_n \xrightarrow{\sigma.\pi.} f$ σχεδόν παντού. Υποθέτουμε ότι $\exists\, g \geq 0$, $g \in L^1(\mu)$ τ.ω. $\forall n$ $|f_n| \leq g$ σχεδόν παντού.
Τότε $\int f_n \, d\mu \to \int f \, d\mu$

<u>απόδειξη</u> $\exists\, N \in \mathcal{M}$ με $\mu(N) = 0$ τ.ω. $\forall x \in X \setminus N$ $f_n(x) \to f(x)$
$\forall x \in X \setminus N$ $|f_n(x)| \leq g(x)$

Τότε $\forall x \in X \setminus N$ $|f(x)| = \lim_{n\to\infty} |f_n(x)| \leq g(x)$ και $\int g \, d\mu < \infty \Rightarrow$

$\Rightarrow \int |f| = \int_{X \setminus N} |f| \leq \int_{X\setminus N} g = \int_X g < \infty$ άρα f ολοκληρώσιμη.

Έχουμε $-g \leq f_n \leq g \Rightarrow g - f_n \geq 0$, $g + f_n \geq 0$ | $g - f_n \to g - f$, $g + f_n \to g + f$ στο $X \setminus N$

άρα από Fatou $\int (g-f) \, d\mu \leq \liminf \int (g - f_n) \, d\mu \Rightarrow$
$\Rightarrow \int g - \int f \leq \int g + \liminf \int (-f_n) \, d\mu = \int g - \limsup \int f_n \, d\mu \Rightarrow$

$\Rightarrow \limsup \int f_n \, d\mu \leq \int f$
και $\int g + \int f = \int (g + f) \, d\mu \leq \liminf \int (g + f_n) \, d\mu = \int g + \liminf_n \int f_n \, d\mu$

$\Rightarrow \int f \leq \liminf \int f_n$.
Όμως $\liminf \int f_n \leq \limsup \int f_n$ άρα έχουμε παντού ισότητα, δηλ. $\exists \lim_n \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu$

Έτσι έχουμε το ΘΚΣ για πραγματικές συναρτήσεις.
Αν $f_n = \underbrace{u_n}_{\mathrm{Re} f_n} + i \underbrace{v_n}_{\mathrm{Im} f_n} \to f = \underbrace{u}_{\mathrm{Re} f} + i \underbrace{v}_{\mathrm{Im} f}$ έχουμε $u_n \to u$, $v_n \to v$

Επίσης $|u_n| \leq |f_n| \leq g$, $|v_n| \leq |f_n| \leq g$.
Από το ΘΚΣ για τις $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l}\int u_n d\mu \to \int u\, d\mu \\ \int v_n d\mu \to \int v\, d\mu\end{array}\right\} \Rightarrow \int f_n d\mu \to \int f\, d\mu$$

μαθημα 10
6/11/18

Θεώρημα Αν $f_n \in L^1(\mu)$ και $\sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n| d\mu < \infty$ Τοτε ορίζεται η $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$, $f \in L^1(\mu)$ και $\int f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n d\mu$

αποδειξη ορίζουμε $g = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$. Απο το Θεώρημα Beppo-Levi

$\int g\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n| d\mu < \infty$ δηλ η g είναι ολοκληρώσιμη.

Αρα $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| < \infty$ σ.π., άρα η $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ συγκλίνει σ.π.

δηλ η $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ ορίζεται καλα (σ.π.) και έχει πεπερασμενες τιμές

Επισης $\sum_{n=1}^{N} f_n(x) \to f(x)$ σ.π.

Εχουμε $\left|\sum_{n=1}^{N} f_n\right| \le \sum_{n=1}^{N} |f_n| \le g$ και $g \in L^1(\mu)$ αρα απο Θ.Κ.Σ. η f είναι ολοκληρώσιμη και $\int f d\mu = \lim_{N\to\infty} \int \left(\sum_{n=1}^{N} f_n\right) d\mu = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \int f_n d\mu$

Δηλ $\int f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n d\mu$

Θεώρημα προσέγγισης απο απλές συναρτήσεις
Εστω $f \in L^1(\mu)$. Ισχύουν τα εξής:
(i) $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \varphi$ απλή ολοκληρώσιμη τ.ω. $\int |f-\varphi| d\mu < \varepsilon \Leftrightarrow \|f-\varphi\|_{L^1} < \varepsilon$
(ii) Αν το μ είναι Lebesgue-Stieltjes μέτρο στο $\mathbb{R}$ τοτε μπορούμε να πάρουμε $\varphi = \sum_{j=1}^{m} a_j \chi_{E_j}$, οπου τα E_j είναι πεπερασμένες ενώσεις ανοιχτών διαστημάτων.
(iii) Με τις υποθέσεις του (ii) $\forall f \in L^1(\mu)$ και $\forall \varepsilon > 0$ $\exists g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

συνεχής με συμπαγή φορέα τ.ω. $\|f-g\|_{L^1}<\varepsilon$

[$supp(g):=\{x \,/\, g(x)\neq 0\}$, ο φορέας της g]

απόδειξη (i) Υπάρχουν απλές μετρήσιμες φ_n τ.ω.:
$0\le|\varphi_1|\le\dots\le|\varphi_n|\le|\varphi_{n+1}|\le\dots\le|f|$ και $\varphi_n\to f$.

Ισχύει $\int|f-\varphi_n|d\mu\to 0$ Από το ΘΚΣ γιατί $f-\varphi_n\to 0$ και
$|f-\varphi_n|\le|f|+|\varphi_n|\le 2|f|$ και η $2|f|$ είναι ολοκληρώσιμη

Άρα $\forall\varepsilon>0$ μπορούμε να βρούμε n αρκετά μεγάλο ώστε $\int|f-\varphi_n|d\mu<\varepsilon$

Σημείωση Αν $\varphi=\sum_{j=1}^{m} a_j\chi_{E_j}$ η κανονική αναπαράσταση της φ

και $|\varphi|\le|f|$ τότε αν $a_j\neq 0$ τότε $\mu(E_j)<\infty$

$$|a_j|\mu(E_j)\le\int_{E_j}|\varphi|\le\int|\varphi|<\infty$$

(ii) Χρησιμοποιούμε το ότι αν $E\subseteq\mathbb{R}$ μ-μετρήσιμο τότε υπάρχει
$I=I_1\cup\dots\cup I_N$ ένωση ανοιχτών διαστημάτων τ.ω. $\mu(E\triangle I)<\varepsilon$

Επίσης $\int|\chi_A-\chi_B|d\mu=\mu(A\setminus B)+\mu(B\setminus A)=\mu(A\triangle B)$

Έστω $f\in L^1(\mu)$ και $\varepsilon>0$. Από το (i) υπάρχει απλή $\varphi=\sum_{j=1}^{m} a_j\chi_{E_j}\in L^1(\mu)$
τ.ω. $\|f-\varphi\|_{L^1}<\varepsilon/2$

$\forall j$ βρίσκουμε I_j = ένωση πεπερασμένων διαστημάτων τ.ω.

$$|a_j|\mu(E_j\triangle I_j)<\frac{\varepsilon}{2m}\iff|a_j|\int|\chi_{E_j}-\chi_{I_j}|\,d\mu<\frac{\varepsilon}{2m}$$

Θεωρούμε την $\psi=\sum_{j=1}^{m} a_j\chi_{I_j}$ και $\left\|\sum_{j=1}^{m} a_j\chi_{E_j}-\sum_{j=1}^{m} a_j\chi_{I_j}\right\|_{L^1}\le$

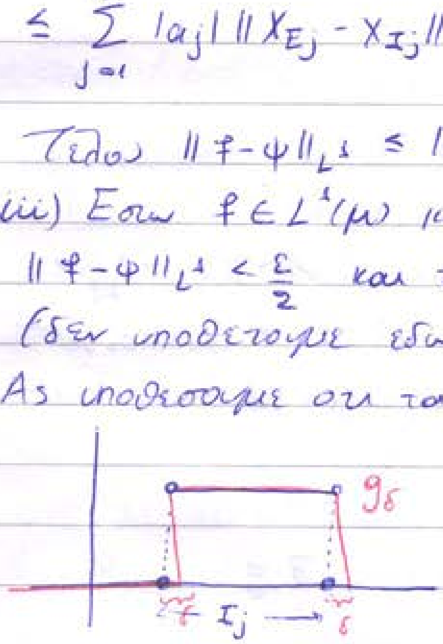
$$\le\sum_{j=1}^{m}|a_j|\,\|\chi_{E_j}-\chi_{I_j}\|_{L^1}<m\frac{\varepsilon}{2m}=\frac{\varepsilon}{2}$$

Τέλος $\|f-\psi\|_{L^1}\le\|f-\varphi\|_{L^1}+\|\varphi-\psi\|_{L^1}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$

(iii) Έστω $f\in L^1(\mu)$ και $\varepsilon>0$. Υπάρχει απλή $\psi=\sum_{j=1}^{m} a_j\chi_{I_j}$ τ.ω.
$\|f-\psi\|_{L^1}<\frac{\varepsilon}{2}$ και τα I_j = ανοιχτά διαστήματα.

(δεν υποθέτουμε εδώ ότι τα a_j είναι διακεκριμένα)

Ας υποθέσουμε ότι τα I_j είναι και φραγμένα.



$\forall j$ βρίσκουμε συνεχή g_j όπως στο σχήμα έτσι ώστε $|a_j|\int|\chi_{I_j}-g_j|\,d\mu<\frac{\varepsilon}{2m}$

Τότε για την $g = \sum_{j=1}^{m} a_j g_j$ έχουμε ότι είναι συνεχής (με συμπαγή φορέα αν τα I_j είναι φραγμένα (*)) και $\int |\varphi - g| d\mu \leq \sum_{j=1}^{m} |a_j| \int |\chi_{I_j} - g_j| d\mu < \frac{\varepsilon}{2}$

(*) Θα μπορούσα να έχω υποθέσει από την αρχή ότι $supp(f)$ = συμπαγής γιατί αν $f_n = f \cdot \chi_{[-n,n]} \to f$, $|f - f_n| \leq |f| \overset{\Theta K \Sigma}{\Longrightarrow} \int |f - f_n| d\mu \to 0$
$\Rightarrow \exists n_0 \quad \|f - f_{n_0}\| < \varepsilon$ και ξεκινάμε την προηγούμενη διαδικασία με την f_n.

Θεώρημα Έστω $(X, \mathcal{M}, \mu)$ χ.μ. και $f: X \times [a, b] \to \mathbb{C}$. Υποθέτουμε ότι $\forall t \in [a, b]$ η $f(\cdot, t): X \to \mathbb{C}$ είναι ολοκληρώσιμη
$x \mapsto f(x, t)$

και ορίζουμε $F: [a, b] \to \mathbb{C}$ με $F(t) = \int f(x, t) d\mu(x)$

(i) Αν υπάρχει $g \in L^1(\mu)$ τ.ω. $\forall t, \forall x \quad |f(x, t)| \leq g(x)$ και $\lim_{t \to t_0} f(x, t) = f(x, t_0)$ (*) για κάποιο t_0, $\forall x$ τότε $\lim_{t \to t_0} F(t) = F(t_0)$

(ii) Αν υπάρχει η $\frac{\partial f}{\partial t}$ και $\exists g \in L^1(\mu) \quad \forall x \ \forall t \quad \left|\frac{\partial f}{\partial t}(x, t)\right| \leq g(x)$

τότε $F'(t) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) d\mu(x)$

__απόδειξη__ (i) α.ν.δ.ο. αν $t_n \to t_0$ τότε $F(t_n) \to F(t_0)$ (αρχή της μεταφοράς)

Ζητάμε $\int \underbrace{f(x, t_n)}_{g_n} d\mu \to \int \underbrace{f(x, t_0)}_{g_0} d\mu$

- $g_n(x) = f(x, t_n) \xrightarrow{(*)} f(x, t_0) = g_0(x)$
- $|g_n(x)| = |f(x, t_n)| \leq g(x)$ και $g \in L^1(\mu)$

} Εφαρμόζεται το Θ.Κ.Σ.

(ii) Πάλι με ακολουθίες, παίρνουμε $t_n \to t_0 \in [a, b]$ και ζητάμε
$$\lim_{n \to \infty} \frac{F(t_n) - F(t_0)}{t_n - t_0} = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0) d\mu$$

Έχουμε $\frac{F(t_n) - F(t_0)}{t_n - t_0} = \int \frac{f(x, t_n) - f(x, t_0)}{t_n - t_0} d\mu \xrightarrow[\Theta K \Sigma]{(1), (2)} \int \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0) d\mu$

(1) $\forall x \quad \frac{f(x, t_n) - f(x, t_0)}{t_n - t_0} \xrightarrow{n \to \infty} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0)$

(2) $\left|\frac{f(x, t_n) - f(x, t_0)}{t_n - t_0}\right| \underset{\Theta M T}{=} \left|\frac{\partial f}{\partial t} f(x, \xi_n)\right| \leq g(x)$, $\forall x$, όπου ξ_n ανάμεσα στα t_n και t_0

Είδη σύγκλισης

• $f_n \xrightarrow{\text{ομ}} f \underset{\text{ορ}}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon>0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \ \forall x \in X \ |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$

η ομοιόμορφη σύγκλιση

• $f_n \xrightarrow{\kappa.\sigma} f \underset{\text{ορ}}{\Leftrightarrow} \forall x \in X \ f_n(x) \to f(x) \Leftrightarrow \forall x \in X \ \forall \varepsilon>0 \ \exists n_0 = n_0(\varepsilon, x)$ τ.ω. $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon \ \forall n \geq n_0$

η σύγκλιση κατά σημείο

• $f_n \xrightarrow{L^1} f \Leftrightarrow \|f-f_n\|_{L^1} = \int |f-f_n| d\mu \xrightarrow{n\to\infty} 0$

η L^1-σύγκλιση

Παραδείγματα

1) $f_n = \frac{1}{n} \chi_{(0,n)}$ $\left[f_n \xrightarrow{\text{ομ}} 0 \ \middle| \ \int |f_n - 0| = \int f_n = 1 \not\to 0 \right]$

2) $f_n = \chi_{(n,n+1)}$ $\left[f_n \xrightarrow{\kappa\sigma} 0 \ \middle| \ \|f_n\|_\infty = 1 \not\to 0 \right.$, άρα $f_n \overset{\text{ομ}}{\not\to} 0 \ \middle| \ \int |f_n - 0| = 1 \not\to 0$ άρα $f_n \not\to 0$

3) $f_n = n \chi_{[0,\frac{1}{n}]} = \begin{cases} \infty, & x=0 \\ 0, & x\neq 0 \end{cases}$ $\left[f_n \xrightarrow{\sigma\pi} 0 \ \middle| \ \|f_n\|_\infty = n \to \infty \ \middle| \ f_n = 1 \not\to 0 \right]$

4) $[f_1 = \chi_{[0,1]}]$, $[f_2 = \chi_{[0,\frac{1}{2}]}, f_3 = \chi_{[\frac{1}{2},1]}]$, $[f_4 = \chi_{[0,\frac{1}{4}]}, f_5 = \chi_{[\frac{1}{4},\frac{1}{2}]}, f_6 = \chi_{[\frac{1}{2},\frac{3}{4}]}, f_7 = \chi_{[\frac{3}{4},1]}$

$\forall x \in [0,1]$ έχουμε $f_n(x)=1$ για άπειρες τιμές του n και $f_n(x)=0$ για άπειρες τιμές του n. $\Rightarrow \forall x \in [0,1] \ \nexists \lim f_n(x)$.

Για μεγάλα n έχουμε $f_n = \chi_{I_n}$ και $m(I_n)$ = μικρό $\Rightarrow \int f_n dm \to 0$

Ορισμοί Έστω $(X, \mathcal{M}, \mu)$ χώρος μέτρου.

(i) Μια ακολουθία (f_n) μετρήσιμων συναρτήσεων λέγεται Cauchy κατά μέτρο αν $\forall \varepsilon>0 \ \mu(\{x \in X / |f_n(x)-f_m(x)| \geq \varepsilon\}) \xrightarrow{n,m\to\infty} 0$

$[\forall \varepsilon>0 \ \forall \eta>0 \ \exists n_0 : \forall n,m \geq n_0 \ \mu(|f_n - f_m| \geq \varepsilon) < \eta]$

(ii) Λέμε ότι η (f_n) συγκλίνει κατά μέτρο στη μετρήσιμη συνάρτηση f αν $\forall \varepsilon>0 \ \lim_{n\to\infty} \mu(|f-f_n| \geq \varepsilon) = 0$

Πρόταση Αν $\|f-f_n\|_{L^1} \to 0$ τότε $f_n \to f$ κατά μέτρο

απόδειξη Έστω $\varepsilon>0$ Από Markov, $\mu(|f-f_n| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon} \int |f-f_n| d\mu \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Πρόταση 2 (i)(a) Αν η (f_n) είναι Cauchy κατά μέτρο τότε υπάρχει f μετρήσιμη τ.ω. $f_n \to f$ κατά μέτρο. (β) Επίσης υπάρχει υπακολουθία (f_{k_n}) της (f_n) τ.ω. $f_{k_n} \to f$ σ.π. (ii) Τέλος αν $f_n \to g$ κατά μέτρο, τότε $g = f$ σ.π.

Σημείωση Ισχύει ότι: $f_n \to f$ κατά μέτρο $\Rightarrow (f_n)$ Cauchy κατά μέτρο
Πράγματι, $\{|f_m - f_n| \geq \varepsilon\} \subseteq \{|f_m - f| \geq \frac{\varepsilon}{2}\} \cup \{|f_n - f| \geq \frac{\varepsilon}{2}\}$, διότι αν για κάποιο x έχω $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ και $|f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ τότε από τριγωνική ανισότητα $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$.
Έστω $\varepsilon > 0$ και $\eta > 0$. $\exists n_0 : \forall n \geq n_0 \ \mu(|f_n - f| \geq \frac{\varepsilon}{2}) < \frac{\eta}{2}$.
τότε $\forall n, m \geq n_0$: $\mu(|f_m - f_n| \geq \varepsilon) \leq \mu(|f_m - f| \geq \frac{\varepsilon}{2}) + \mu(|f_n - f| \geq \varepsilon/2) <$
$< \frac{\eta}{2} + \frac{\eta}{2} = \eta$. Άρα $\lim_{m,n \to \infty} \mu(|f_m - f_n| \geq \varepsilon) = 0$.

απόδειξη πρότασης 2
(i) Έχουμε $f_n \to f$ και $f_n \to g$ κατά μέτρο. Ζητάμε $\mu(|f-g| > 0) = 0$ (δηλ. $f = g$ σ.π.). Γράφουμε $\{|f-g| > 0\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{|f-g| \geq \frac{1}{k}\}$.

Αν λοιπόν $\mu(|f-g| > 0) > 0$ τότε $\exists k : \mu(|f-g| \geq \frac{1}{k}) > 0$
Όμως $0 < \mu(|f-g| \geq \frac{1}{k}) \leq \mu(|f - f_n| \geq \frac{1}{2k}) + \mu(|g - f_n| \geq \frac{1}{2k}) \xrightarrow{n \to \infty} 0 + 0$

(διότι $f_n \to f$ και $f_n \to g$ κατά μέτρο). άτοπο.
(ii) (β) Υπάρχει γνησίως αύξουσα ακολουθία (k_n) φυσικών αριθμών τ.ω. $\forall m, s \geq k_n \quad \mu(|f_m - f_s| \geq \frac{1}{2^n}) < \frac{1}{2^n}$ (*)

$\boxed{\text{μάθημα } 11^{\text{ο}} \quad 8/11/18}$

Επειδή $\underset{m}{k_{n+1}} > \underset{n}{k_n} \geq k_n$ έχουμε $\mu(|f_{k_{n+1}} - f_{k_n}| \geq \frac{1}{2^n}) < \frac{1}{2^n}$

Ορίζουμε $E_n = \{|f_{k_{n+1}} - f_{k_n}| \geq \frac{1}{2^n}\}$ και $F_k = \bigcup_{n=k}^{\infty} E_n = \bigcup_{n=k}^{\infty} \{|f_{k_{n+1}} - f_{k_n}| \geq \frac{1}{2^n}\}$

Έχουμε $\mu(F_k) \leq \sum_{n=k}^{\infty} \mu(E_n) < \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{k-1}}$

Άρα $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(F_k) < \infty \xRightarrow{\text{Λήμμα Borel-Cantelli}} \mu(\underbrace{\limsup F_k}_{:= F}) = 0$

Ορίζουμε $E = X \setminus F$. Δείχνουμε ότι αν $x \in E$ τότε $\exists \lim f_{k_n}(x)$
Αφού $x \notin F$, $\exists k_0 : \forall k \geq k_0 \quad x \notin F_k \Rightarrow \forall k \geq k_0 \quad \forall n \geq k$
$|f_{k_{n+1}}(x) - f_{k_n}(x)| < \frac{1}{2^n} \Rightarrow \forall m > n \geq k \quad |f_{k_m}(x) - f_{k_n}(x)| \leq$

$\leq |f_{k_m}(x) - f_{k_{m-1}}(x)| + \dots + |f_{k_{n+1}}(x) - f_{k_n}(x)| < \frac{1}{2^{m-1}} + \dots + \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^{n-1}}$