Σημείωση: Ισχύει ότι: $f_n \to f$ κατά μέτρο $\Rightarrow (f_n)$ Cauchy κατά μέτρο.
Πράγματι, $\{|f_m - f_n| \geq \varepsilon\} \subseteq \{|f_m - f| \geq \frac{\varepsilon}{2}\} \cup \{|f_n - f| \geq \frac{\varepsilon}{2}\}$, διότι αν για κάποιο $x$ έχω $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ και $|f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ τότε από τριγωνική ανισότητα $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$.
Έστω $\varepsilon > 0$ και $\eta > 0$. $\exists n_0: \forall n \geq n_0$ $\mu(|f_n - f| \geq \frac{\varepsilon}{2}) < \frac{\eta}{2}$.
τότε $\forall n, m \geq n_0$: $\mu(|f_m - f_n| \geq \varepsilon) \leq \mu(|f_m - f| \geq \frac{\varepsilon}{2}) + \mu(|f_n - f| \geq \varepsilon/2) <$
$< \frac{\eta}{2} + \frac{\eta}{2} = \eta$. Άρα $\lim_{m,n\to\infty} \mu(|f_m - f_n| \geq \varepsilon) = 0$.

απόδειξη πρότασης 2
(ii) Έχουμε $f_n \to f$ και $f_n \to g$ κατά μέτρο. Ζητάμε $\mu(|f-g| > 0) = 0$ (δηλ. $f = g$ σ.π.). Γράφουμε $\{|f-g| > 0\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{|f-g| \geq \frac{1}{k}\}$.

Αν λοιπόν $\mu(|f-g|>0) > 0$ τότε $\exists k$: $\mu(|f-g| \geq \frac{1}{k}) > 0$.
Όμως $0 < \mu(|f-g| \geq \frac{1}{k}) \leq \mu(|f - f_n| \geq \frac{1}{2k}) + \mu(|g - f_n| \geq \frac{1}{2k}) \xrightarrow{n\to\infty} 0 + 0$

(διότι $f_n \to f$ και $f_n \to g$ κατά μέτρο). άτοπο.
(i)(β) Υπάρχει γνησίως αύξουσα ακολουθία $(k_n)$ φυσικών αριθμών τ.ω. $\forall m, s \geq k_n$ $\mu(|f_m - f_s| \geq \frac{1}{2^n}) < \frac{1}{2^n}$ (*)

μάθημα 11ο
8/11/18

Επειδή $\underset{m}{k_{n+1}} > \underset{s}{k_n} \geq k_n$ έχουμε $\mu(|f_{k_{n+1}} - f_{k_n}| \geq \frac{1}{2^n}) < \frac{1}{2^n}$
Ορίζουμε $E_n = \{|f_{k_{n+1}} - f_{k_n}| \geq \frac{1}{2^n}\}$ και $F_k = \bigcup_{n=k}^{\infty} E_n = \bigcup_{n=k}^{\infty} \{|f_{k_{n+1}} - f_{k_n}| \geq \frac{1}{2^n}\}$

Έχουμε $\mu(F_k) \leq \sum_{n=k}^{\infty} \mu(E_n) < \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{k-1}}$

Άρα $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(F_k) < \infty \xRightarrow{\text{Λήμμα Borel-Cantelli}} \mu(\underbrace{\limsup F_k}_{:=F}) = 0$

Ορίζουμε $E = X \setminus F$. Δείχνουμε ότι αν $x \in E$ τότε $\exists \lim f_{k_n}(x)$
Αφού $x \notin F$, $\exists k_0: \forall k \geq k_0$ $x \notin F_k \Rightarrow \forall k \geq k_0$ $\forall n \geq k$
$|f_{k_{n+1}}(x) - f_{k_n}(x)| < \frac{1}{2^n} \Rightarrow \forall m > n \geq k$ $|f_{k_m}(x) - f_{k_n}(x)| \leq$

$\leq |f_{k_m}(x) - f_{k_{m-1}}(x)| + \dots + |f_{k_{n+1}}(x) - f_{k_n}(x)| < \frac{1}{2^{m-1}} + \dots + \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^{n-1}}$

Άρα η $(f_{k_n}(x))_n$ είναι βασική. (Παίρνω $\varepsilon>0$, βρίσκω $k_0$: $\frac{1}{2^{k_0-1}}<\varepsilon$ και $\forall m>n\geq k_0$ $|f_{k_m}(x)-f_{k_n}(x)|<\varepsilon$)

$\Rightarrow \exists f(x)=\lim f_{k_n}(x)$. Η $f$ είναι ορισμένη σ.π. και $f_{k_n}\to f$

(α) Δείχνουμε ότι $\mu(|f_{k_n}-f|\geq\varepsilon)\xrightarrow{n\to\infty}0$

Από την ⊛ είχαμε $\forall m>n$ $\mu(|f_{k_m}-f_{k_n}|\geq\frac{1}{2^n})<\frac{1}{2^n}$

Αν $x\notin F_n$ έχουμε $|f_{k_m}(x)-f_{k_n}(x)|<\frac{1}{2^n}$ $\forall m>n$

$\Rightarrow |f(x)-f_{k_n}(x)|\leq\frac{1}{2^n}$

Δηλ. $\mu(|f-f_{k_n}|>\frac{1}{2^n})<\frac{1}{2^n}$. Παίρνω $\varepsilon>0$. Βρίσκω $n_0$: $\forall n\geq n_0$

$\frac{1}{2^n}\leq\frac{1}{2^{n_0}}<\varepsilon$, και έχω $\forall n\geq n_0$ $\mu(|f-f_{k_n}|\geq\varepsilon)\leq$

$\leq\mu(|f-f_{k_n}|>\frac{1}{2^n})<\frac{1}{2^n}$. Άρα $\mu(|f_{k_n}-f|\geq\varepsilon)\xrightarrow{n\to\infty}0$

Τέλος $f_n\to f$ κατά μέτρο

Έστω $\varepsilon>0$ $\mu(|f_n-f|\geq\varepsilon)\leq\mu(|f_n-f_{k_n}|\geq\frac{\varepsilon}{2})+\mu(|f_{k_n}-f|\geq\frac{\varepsilon}{2})\to$

$\xrightarrow{n\to\infty}0+0=0$.

**Θεώρημα** Αν $\|f_n-f\|_{L^1}\to0$ τότε $\exists f_{k_n}\to f$ σ.π.

**απόδειξη** $\|f_n-f\|_{L^1}\to0\Rightarrow f_n\to f$ κατά μέτρο ① $\Rightarrow$

$\Rightarrow (f_n)$ Cauchy κατά μέτρο $\Rightarrow \exists f_{k_n}\to g$ σ.π

και $f_n\to g$ κατά μέτρο ② άρα ①,② $\Rightarrow f=g$ σ.π $\Rightarrow f_{k_n}\to f$ σ.π.

**Θεώρημα Egoroff**

Έστω $(X,\mathcal{M},\mu)$ χώρος μέτρου και $\mu(X)<\infty$. Αν $f,f_n: X\to\mathbb{C}$ μετρήσιμες και $f_n\to f$ σ.π. τότε $\forall\varepsilon>0$ $\exists F_\varepsilon\in\mathcal{M}$ με $\mu(F_\varepsilon)<\varepsilon$ τ.ω. $f_n\to f$ ομοιόμορφα στο $X\setminus F_\varepsilon$.

**απόδειξη** $\forall n,k\in\mathbb{N}$ ορίζουμε $E_{n,k}=\bigcup_{m=n}^{\infty}\{x/|f(x)-f_m(x)|\geq\frac{1}{k}\}$

Η $(E_{n,k})_n$ είναι φθίνουσα (ως προς n, για σταθερό k)

και $\bigcap_{n=1}^{\infty}E_{n,k}=\emptyset$. Πράγματι, $\forall x$ $\exists n_0$: $\forall m\geq n_0$

$|f(x)-f_m(x)|<\frac{1}{k}$ αφού $f_n(x)\to f(x)$ $\Rightarrow x\notin E_{n_0,k}\Rightarrow x\notin\bigcap_{n=1}^{\infty}E_{n,k}$

Αφού $\mu(X)<\infty$ έχουμε $\mu(E_{n,k}) \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Έστω $\varepsilon>0$. $\forall k\in\mathbb{N}$ βρίσκουμε $n_k\in\mathbb{N}$ τ.ω. $\mu(E_{n_k,k})<\frac{\varepsilon}{2^k}$

Ορίζουμε $F_\varepsilon=\bigcup_{k=1}^{\infty} E_{n_k,k}$. Τότε $\mu(F_\varepsilon)\le\sum_{k=1}^{\infty}\mu(E_{n_k,k})<\varepsilon$

Θα δείξουμε ότι $f_n\to f$ ομοιόμορφα στο $X\setminus F_\varepsilon$ ($\subseteq X\setminus E_{n_k,k}$ $\forall k$)

Έστω $\delta>0$. Ζητάμε $N\in\mathbb{N}$: $\forall n\geq N$, $\forall x\notin F_\varepsilon$ $|f_n(x)-f(x)|<\delta$

Βρίσκουμε $k$: $\frac{1}{k}<\delta$. Παίρνουμε $N=n_k$. Έστω $n\geq n_k$.

Έχουμε $x\notin F_\varepsilon \Rightarrow x\notin E_{n_k,k}$. Έχουμε $n\geq n_k$ και $x\notin E_{n_k,k}$, άρα

$\forall n\geq n_k$ $|f_n(x)-f(x)|<\frac{1}{k}<\delta$

## Σύγκριση του Ολοκληρώματος Lebesgue με το Ολ. Riemann

**Θεώρημα 1** Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Αν η $f$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη τότε είναι και Lebesgue ολοκληρώσιμη

και $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx=\int_{[\alpha,\beta]} f\,dm$

$L(f,P)=\sum_{j=1}^{N} m_j(t_j-t_{j-1})$ $\quad U(f,P)=\sum_{j=1}^{N} M_j(t_j-t_{j-1})$

Υπάρχουν $P_k\subseteq P_{k+1}$ με $\delta(P_k)\to 0$ $\quad(\delta(P_k)=\max(t_j-t_{j-1}))$

τ.ω. $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx=\lim_k L(f,P_k)=\lim_k U(f,P_k)$

Ορίζουμε $g_k=\sum_{j=1}^{N_k} m_j\,\chi_{(t_{j-1},t_j)}$, $\quad G_k=\sum_{j=1}^{N_k} M_j\cdot\chi_{(t_{j-1},t_j)}$

Τότε $g_k\le f\le G_k$, $g_k\uparrow g$, $G_k\downarrow G$ και $g\le f\le G$

$\int_{[\alpha,\beta]} g_k\,dm=L(f,P_k)$, $\quad\int_{[\alpha,\beta]} G_k\,dm=U(f,P_k)$

Τότε $\int g_k\to\int g$ και $\int G_k\to\int G$ από ΘΚΣ

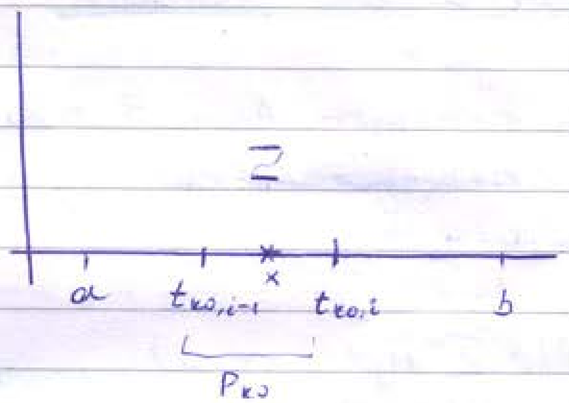
$$\underset{L(f,P_k)\,\to\,\int_\alpha^\beta f(x)\,dx}{\overset{\parallel}{\phantom{x}}}\qquad\qquad \underset{U(f,P_k)\,\to\,\int_\alpha^\beta f(x)\,dx}{\overset{\parallel}{\phantom{x}}}$$

άρα $\int_{[\alpha,\beta]} G\,dm=\int_\alpha^\beta f(x)\,dx=\int_{[\alpha,\beta]} g\,dm \Rightarrow \int(G-g)\,dm=0$

και $G-g \geq 0$ άρα $G=g$ σ.π. $\Rightarrow G=g=f$ σ.π.
Άρα $f$ μετρήσιμη και $\int f\,dm = \int G\,dm = \int_a^b f(x)\,dx$

Θεώρημα 2 Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ φραγμένη, τότε $f$ Riemann ολοκληρώσιμη $\Leftrightarrow m(\{x\in[a,b] \,/\, f$ ασυνεχής στο $x\})=0$

απόδειξη ($\Rightarrow$) Θεωρούμε τις $P_k \subseteq P_{k+1}$, $\delta(P_k)\to 0$ της προηγούμενης απόδειξης, επίσης τις $g_k \uparrow g$, $G_k \downarrow G$ και έχουμε $G=g$ έξω από ένα $Z\subseteq[a,b]$ με $m(Z)=0$. Αν $P=\bigcup_{k=1}^{\infty} P_k$ τότε $f$ συνεχής $\forall x\notin Z\cup P$. Το $P$ είναι αριθμήσιμο και $m(Z\cup P)=0$



Έστω $\varepsilon>0$. Αφού $x\notin Z$ έχουμε $G_k(x)-g_k(x)\to G(x)-g(x)=0$
Άρα $\exists k_0$: $\underset{M_{k_0,i-1}}{\underset{\shortparallel}{G_{k_0}(x)}} - \underset{m_{k_0,i-1}}{\underset{\shortparallel}{g_{k_0}(x)}} < \varepsilon$

Αφού $x\notin P$ έχουμε $x\in(t_{k_0,i-1},t_{k_0,i}) \Rightarrow \exists\delta>0$:
$(x-\delta,x+\delta)\subseteq(t_{k_0,i-1},t_{k_0,i})$
Έστω $y\in(x-\delta,x+\delta)$ τότε $|f(y)-f(x)|\leq M_{k_0,i-1}-m_{k_0,i-1}=$
$=G_{k_0}(x)-g_{k_0}(x)<\varepsilon$

Μέτρο γινόμενο

| μάθημα 12 13/11/18 |
|---|

$(X,\mathcal{M},\mu)$, $(Y,\mathcal{N},\nu)$ χώροι μέτρου.
Στο $X\times Y$ έχουμε ορίσει τη σ-άλγεβρα γινόμενο $\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}$
Ορισμός (γενικότερα) Αν $(X_i,\mathcal{M}_i)$ μετρήσιμοι χώροι, $i\in I$ (όπου $I$ αριθμήσιμο) θεωρούμε τις $\pi_i:\prod_{j\in I}X_j\to X_i$ με $\pi_i((x_j)_{j\in I})=x_i$

και την $\mathcal{F}=\{\pi_i^{-1}(E_i) \,/\, E_i\in\mathcal{M}_i,\ i\in I\}$

Ορίζουμε $\bigotimes_{i\in I}\mathcal{M}_i = \sigma(\mathcal{F})$

**Άσκηση**

1) Αν $\mathcal{F}' = \{\prod_{i\in I} E_i \,,\, E_i\in\mathcal{M}_i\}$ τότε $\sigma(\mathcal{F}')=\sigma(\mathcal{F})$

[ $\mathcal{F}\subseteq\mathcal{F}' \Rightarrow \sigma(\mathcal{F})\subseteq\sigma(\mathcal{F}')$. Αν $\prod_{i\in I}E_i\in\mathcal{F}$ $\quad \bigcap_{i\in I}\pi_i^{-1}(E_i)\in\sigma(\mathcal{F})$

άρα $\sigma(\mathcal{F}')\subseteq\sigma(\mathcal{F})$ ]

2) Αν $\sigma(\mathcal{E}_i)=\mathcal{M}_i$ $(\mathcal{E}_i\subseteq P(X_i))$ τότε αν ορίσουμε $\mathcal{F}''=\{\prod_{i\in I}E_i / E_i\in\mathcal{E}_i\}$
έχουμε $\sigma(\mathcal{F}'')=\sigma(\mathcal{F}')=\sigma(\mathcal{F})$

Θέλουμε να ορίσουμε με φυσιολογικό τρόπο ένα μέτρο $\mu\times\nu$ στον $(X\times Y, \mathcal{M}\otimes\mathcal{N})$ Ζητάμε: αν $A\in\mathcal{M}$, $B\in\mathcal{N}$ να έχουμε $\mu\times\nu(A\times B)=\mu(A)\nu(B)$

**Παρατήρηση** Η κλάση $\mathcal{F} = \{A\times B \,/\, A\in\mathcal{M}, B\in\mathcal{N}\}$ είναι στοιχειώδης οικογένεια.

Πράγματι, $\emptyset\in\mathcal{F}$, $(A\times B)\cap(C\times D)=(A\cap C)\times(B\cap D)\in\mathcal{F}$,

$(A\times B)^c = \underbrace{(A\times B^c)}_{\in\mathcal{F}} \cup \underbrace{(A^c\times Y)}_{\in\mathcal{F}} \in \mathcal{F}$


Γνωρίζουμε ότι η οικογένεια $\mathcal{A}$ των πεπερασμένων ξένων ενώσεων συνόλων από την $\mathcal{F}$ είναι άλγεβρα (πρόταση στα 5). Επίσης $\sigma(\mathcal{A})=\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}$. Ορίζουμε προμέτρο $\pi$ στην $\mathcal{A}$: αν $E = \bigcup_{j=1}^{N}(A_j\times B_j)\in\mathcal{A}$ ξένη ένωση

ορίζουμε $\pi(E) = \sum_{j=1}^{N}\mu(A_j)\nu(B_j)$. Δείχνουμε ότι το $\pi$ είναι καλά

ορισμένο και προμέτρο.

**Λήμμα** Αν $A\times B = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\times B_k$ ξένη ένωση, τότε $\mu(A)\nu(B)=\sum_{k=1}^{\infty}\mu(A_k)\nu(B_k)$

απόδειξη $\chi_{A\times B}(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty}\chi_{A_k\times B_k}(x,y) \Rightarrow \chi_A(x)\chi_B(y) = \sum_{k=1}^{\infty}\chi_{A_k}(x)\chi_{B_k}(y)$

σταθεροποιούμε το $x$ και από Beppo-Levi για το $\nu$ έχουμε:

$\chi_A(x)\int_Y\chi_B\,d\nu = \sum_{k=1}^{\infty}\chi_{A_k}(x)\int_Y\chi_{B_k}\,d\nu \Rightarrow \nu(B)\chi_A(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\nu(B_k)\chi_{A_k}(x)$

$\xRightarrow[\text{για το } \mu]{\text{Beppo-Levi}} \nu(B)\int\chi_A\,d\mu = \sum_{k=1}^{\infty}\nu(B_k)\int\chi_{A_k}\,d\mu \Rightarrow \nu(B)\mu(A) = \sum_{k=1}^{\infty}\nu(B_k)\mu(A_k)$

Για το καλά ορισμένο του $\pi$: αν $E = \bigcup_{j=1}^{N} A_j \times B_j = \bigcup_{i=1}^{M} C_i \times D_i \Rightarrow$

$$\Rightarrow E = \bigcup_{j=1}^{N} \bigcup_{i=1}^{M} (A_j \cap C_i) \times (B_j \cap D_i) \overset{\text{λήμμα}}{\Longrightarrow} \sum_j \mu(A_j)\nu(B_j) =$$

$$= \sum_{i,j} \mu(A_j \cap C_i)\nu(B_j \cap D_i) = \sum_i \mu(C_i)\nu(D_i)$$

Ορίζουμε εξωτερικό μέτρο $\pi^*(E) = \inf\{\sum \pi(E_j) \,/\, E \subseteq \bigcup E_j \,, E_j \in \mathcal{A}\}$
Έχουμε δει ότι ο περιορισμός του $\pi^*$ στην $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ είναι μέτρο, το οποίο συμβολίζουμε με $\mu \times \nu$, και επίσης $\forall E \in \mathcal{A}$ $(\mu\times\nu)(E) = \pi(E)$
Ειδικότερα, $(\mu\times\nu)(A\times B) = \pi(A\times B) = \mu(A)\nu(B)$ (*)

Σημείωση: Αν τα $\mu$ και $\nu$ είναι σ-πεπερασμένα τότε το $\mu\times\nu$ είναι το μοναδικό μέτρο στην $\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}$ που ικανοποιεί την (*)

Ορισμός (α) Αν $E \subseteq X \times Y$ τότε $\forall x \in X$ ορίζουμε $E_x = \{y \in Y \,/\, (x,y) \in E\}$
$\forall y \in Y$ ορίζουμε $E^y = \{x \in X \,/\, (x,y) \in E\}$
(β) Αν $f: X\times Y \to \mathbb{R}$ τότε $\forall x \in X$ ορίζουμε $f_x : Y \to \mathbb{R}$ με $f_x(y) = f(x,y)$
$\forall y \in Y$ ορίζουμε $f^y : X \to \mathbb{R}$ με $f^y(x) = f(x,y)$

Άσκηση $(\chi_E)_x = \chi_{E_x}$ , $(\chi_E)^y = \chi_{E^y}$
πράγματι, $\chi_{E_x}(y) = 1 \Leftrightarrow y \in E_x \Leftrightarrow (x,y) \in E \Leftrightarrow \chi_E(x,y) = 1 \Leftrightarrow (\chi_E)_x(y) = 1$

Πρόταση (α) Αν $E \in \mathcal{M}\otimes\mathcal{N}$ τότε $\forall x$ $E_x \in \mathcal{N}$ και $\forall y$ $E^y \in \mathcal{M}$
(β) Αν η $f: X\times Y \to \mathbb{R}$ είναι $\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}$ μετρήσιμη, τότε $\forall x$ η $f_x$ είναι $\mathcal{N}$-μετρήσιμη και $\forall y$ η $f^y$ είναι $\mathcal{M}$-μετρήσιμη.
απόδειξη (α) Θεωρούμε την οικογένεια $R = \{E \in \mathcal{M}\otimes\mathcal{N} \,/\, \text{το } E \text{ ικανοποιεί το ζητούμενο}\}$
Ζητάμε $R = \mathcal{M}\otimes\mathcal{N}$. Θδο 1) $A\times B \in R$ , 2) $R$ σ-άλγεβρα.
1) $\forall x \in X$, $E_x = \begin{cases} \emptyset & \text{αν } x \notin A \\ B & \text{αν } x \in A \end{cases} \in \mathcal{N}$ | $\forall y \in Y$ $E^y = \begin{cases} \emptyset, & \text{αν } y \notin B \\ A, & \text{αν } y \in B \end{cases} \in \mathcal{M}$

2) Αν $(E_j)_{j=1}^{\infty} \subseteq R$ τότε $\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right)_x = \bigcup_{j=1}^{\infty} \underbrace{(E_j)_x}_{\in\mathcal{N}} \in \mathcal{N}$

και $\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right)^y = \bigcup_{j=1}^{\infty} \underbrace{(E_j)^y}_{\in\mathcal{M}} \in \mathcal{M}$

Αν $E \in R$ τότε $(E^c)_x = \underbrace{(E_x)^c}_{\in\mathcal{N}} \in \mathcal{N}$ κ.λ.π.

(β) B - Borel $f_x^{-1}(B) = \{y \in Y / f_x(y) \in B\} = \{y \in Y / f(x,y) \in B\} =$
$= \{y \in Y / (x,y) \in f^{-1}(B)\} = \underbrace{(f^{-1}(B))_x}_{\in \mu \otimes \nu} \in \mathcal{N}$

Ορισμος μονοτονη κλαση
Μια οικογενεια $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$ λεγεται μονοτονη κλαση αν:
(i) $\forall (C_j)_{j=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{C}$ αυξουσα εχουμε $\bigcup_{j=1}^{\infty} C_j \in \mathcal{C}$

(ii) $\forall (C_j)_{j=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{C}$ φθινουσα εχουμε $\bigcap_{j=1}^{\infty} C_j \in \mathcal{C}$

Παρατηρησεις
1) Καθε σ-αλγεβρα ειναι μονοτονη κλαση.
2) Τομη μονοτονων κλασεων ειναι μονοτονη κλαση.
3) $\forall \mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ $\mathcal{C}(\mathcal{F}) = \bigcap \{\mathcal{D} / \mathcal{F} \subseteq \mathcal{D}, \mathcal{D}$ μονοτονη κλαση$\}$ η μικροτερη μονοτονη κλαση που περιεχει την $\mathcal{F}$.

Λημμα μονοτονων κλασεων
Αν $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ αλγεβρα τοτε $\mathcal{C}(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A})$
αποδειξη Αφου $\mathcal{A} \subseteq \sigma(\mathcal{A})$ και η $\sigma(\mathcal{A})$ ειναι μονοτονη κλαση, εχουμε οτι $\mathcal{C}(\mathcal{A}) \subseteq \sigma(\mathcal{A})$. Για τον αντιστροφο εγκλεισμο, αφου $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}(\mathcal{A})$ αρκει ν.δ.ο. $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ ειναι σ-αλγεβρα. και επειδη $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ ειναι μονοτονη κλαση αρκει ν.δ.ο ειναι αλγεβρα [διοτι "κλειστη ως προς αυξουσες ενωσεις" + αλγεβρα ⇒ σ-αλγεβρα

$\forall E \in \overset{=\mathcal{C}}{\mathcal{C}(\mathcal{A})}$ οριζουμε $\mathcal{C}(E) = \{F \in \mathcal{C}(\mathcal{A}) / E \setminus F, F \setminus E, E \cap F \in \mathcal{C}(\mathcal{A})\}$
- $\mathcal{C}(E) \neq \emptyset$ διοτι $\emptyset, E \in \mathcal{C}(E)$
- $F \in \mathcal{C}(E) \Leftrightarrow E \in \mathcal{C}(F)$
- Το $\mathcal{C}(E)$ ειναι μονοτονη κλαση. Πραγματι:

Εστω $F_j \in \mathcal{C}(E)$, $F = \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j$
$E \setminus \bigcup F_j = \bigcap \underbrace{(E \setminus F_j)}_{\in \mathcal{C},\ \text{φθινουσα}} \in \mathcal{C}$, $\bigcup F_j \setminus E = \bigcup_j \underbrace{(F_j \setminus E)}_{\in \mathcal{C}\ \text{αυξουσα}} \in \mathcal{C}$

$E \cap (\bigcup F_j) = \bigcup_j \underbrace{(E \cap F_j)}_{\in \mathcal{C},\ \text{αυξουσα}} \in \mathcal{C}$. Το ιδιο για την $\bigcap_j F_j$, $F_j \downarrow$

Εστω τωρα $E \in \mathcal{A}$. $\forall F \in \mathcal{A}$ εχουμε $F \in \mathcal{C}(E)$ (γιατι $F \setminus E, E \setminus F, E \cap F \in \mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$)

Εχουμε $\mathcal{A} \subseteq \underbrace{\mathcal{C}(E)}_{\text{μονοτονη κλαση}} \Rightarrow \mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{C}(E)$

Αρα $\forall F \in \mathcal{C}(\mathcal{A})$ ισχυει $F \in \mathcal{C}(E) \overset{(2)}{\Rightarrow} \forall E \in \mathcal{A},\ \forall F \in \mathcal{C}(\mathcal{A})\quad E \in \mathcal{C}(F)$

$\Rightarrow \forall F \in \mathcal{C}(\mathcal{A})\quad \mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}(F)$

$\Rightarrow \forall F \in \mathcal{C}(\mathcal{A})\quad \mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{C}(F)$

$\Rightarrow \forall E, F \in \mathcal{C}(\mathcal{A})$ ισχυει $F \setminus E,\ E \setminus F,\ E \cap F \in \mathcal{C}(\mathcal{A})$

αρα $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ αλγεβρα.

**Θεωρημα** Εστω $(X, \mathcal{M}, \mu)$, $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ σ-πεπερασμενοι χωροι μετρου. Εστω $E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$. Οριζουμε $g(x) = \nu(E_x)$, $h(y) = \mu(E^y)$. Οι $g$ και $h$ ειναι μετρησιμες και $(\mu \times \nu)(E) = \int_X g(x)\,d\mu(x) = \int_Y h(y)\,d\nu(y)$ $\left( = \int \nu(E_x)\,d\mu(x) = \int \mu(E^y)\,d\nu(x) \right)$

αποδειξη Υποθετουμε αρχικα οτι $\mu(X) < \infty$ και $\nu(Y) < \infty$.

Οριζουμε $\mathcal{C} = \left\{ E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N} \,/\, \text{οι } x \mapsto \nu(E_x),\ y \mapsto \mu(E^y) \text{ ειναι μετρησιμες και } (\mu \times \nu)(E) = \int \nu(E_x)\,d\mu(x) = \int \mu(E^y)\,d\nu(y) \right\}$

$\mathcal{A}$ = πεπερασμενες ξενες ενωσεις ορθογωνιων

$\mathcal{C}(\mathcal{A}) \xlongequal[\text{πασων}]{\text{λημμα κοινωνη}} \sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$

ΘΔΟ ③ $\mathcal{C} \supseteq \mathcal{A}$ και ② $\mathcal{C}$ μονοτονη κλαση. Τοτε $\mathcal{C} \supseteq \mathcal{C}(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$

Αρα καθε $E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ ειναι στη $\mathcal{C}$ επ. ικανοποιει το ζητουμενο.

① Παιρνω $E = A \times B$, $A \in \mathcal{M}$, $B \in \mathcal{N}$.

$g(x) = \nu(E_x) = \begin{cases} \nu(B), & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases} = \nu(B)\chi_A$. Ομοια $h(y) = \mu(A)\chi_B$

$(\mu \times \nu)(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$. $\int g\,d\mu = \int_A \nu(B)\,d\mu = \nu(B)\mu(A)$

$\int h\,d\nu = \int_B \mu(A)\,d\nu = \mu(A)\nu(B)$.

② Εστω $E_j \in \mathcal{C}$ και $E_j \uparrow E = \bigcup_j E_j$. $g_j(x) = \nu((E_j)_x)$

$h_j(y) = \mu((E_j)^y)$

Παρατηρουμε οτι $(E_j)_x \uparrow E_x$ και $(E_j)^y \uparrow E^y \Rightarrow$

$\Rightarrow \nu((E_j)_x) \to \nu(E_x)$ και $\mu((E_j)^y) \to \mu(E^y) \Rightarrow$

$\Rightarrow g_j \uparrow g(x) = \nu(E_x)$ και $h_j \uparrow h(y) = \mu(E^y)$

$$
\begin{array}{ccccc}
\text{Εχουμε } (\mu \times \nu)(E_j) & = & \int g_j\,d\mu & = & \int h_j\,d\nu \\
\big\downarrow {\scriptstyle E_j \uparrow E} & & \big\downarrow {\scriptstyle \Theta M \Sigma} & & \big\downarrow {\scriptstyle \Theta M \Sigma} \\
(\mu \times \nu)(E) & = & \int g\,d\mu & = & \int h\,d\nu
\end{array}
$$

Αν $E_j \downarrow E = \bigcap_{j=1}^{\infty} E_j$ έχουμε ομοίως $g_j \downarrow g$ και $h_j \downarrow h \Rightarrow g, h$ μετρήσιμες

Έχουμε $(\mu \times \nu)(E_j) = \int g_j \, d\mu = \int h_j \, d\nu \quad 0 \leq h_j, h \leq \mu(X) < \infty$

$$\begin{array}{ccccc} (\mu\times\nu)(E_j) & = & \int g_j\,d\mu & = & \int h_j\,d\nu \\ \Big\downarrow {\scriptstyle (*)\, E_j \downarrow E} & & \Big\downarrow {\scriptstyle \Theta K \Sigma} & & \Big\downarrow {\scriptstyle \Theta K \Sigma} \\ (\mu \times \nu)(E) & = & \int g \, d\mu & = & \int h \, d\nu \end{array}$$

και $\nu(Y) < \infty$

(*) $(\mu \times \nu)(X \times Y) = \mu(X)\nu(Y) < \infty$

<u>Θεώρημα Tonelli</u> Έστω $X, Y$ σ-πεπερασμένοι χώροι

| μάθημα 13° |
|---|
| <u>20/11/18</u> |

Αν $f \in L(X \times Y)$, $f \geq 0$ τότε οι $g(x) = \int_Y f(x,y) \, d\nu(y)$, $h(y) = \int_X f(x,y) \, d\mu(x)$ είναι μετρήσιμες και:

$$\int_{X \times Y} f \, d(\mu \times \nu) = \int_X g \, d\mu = \int_Y h \, d\nu \quad (*)$$, δηλαδή:

$$\int f(x,y) \, d(\mu \times \nu) = \int_X \left( \int_Y f(x,y) \, d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left( \int_X f(x,y) \, d\mu(x) \right) d\nu(y)$$

<u>απόδειξη</u> (α) $f = \chi_E$, $E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$. Τότε:

$$\int \chi_E \, d(\mu \times \nu) = (\mu \times \nu)(E) \overset{\text{προηγούμενο θεώρημα}}{=} \int_X \nu(E_x) \, d\mu = \int_Y \mu(E^y) \, d\nu$$

και $g(x) = \int_Y \chi_E(x,y) \, d\nu(y) = \int_Y \chi_{E_x}(y) \, d\nu(y) = \nu(E_x)$

$$h(y) = \int_X \chi_{E^y}(x) \, d\mu(x) = \mu(E^y)$$

(β) Αν $\varphi = \sum_{j=1}^{N} a_j \chi_{E_j}$ τότε ισχύει η (*) για την $\varphi$ από τη γραμμικότητα. (ισχύουν $(w+u)_x = w_x + u_x$, $(w+u)^y = w^y + u^y$, $(aw)_x = aw_x$ $(aw)^y = aw^y$)

(γ) Έστω $f \in L(X, Y)$, $f \geq 0$. Υπάρχουν απλές μετρήσιμες $\varphi_n$: $0 \leq \varphi_n \uparrow f$. Ορίζουμε $g_n(x) = \int \varphi_n(x,y) \, d\nu(y)$, $h_n(y) = \int \varphi_n(x,y) \, d\mu(x)$

Ξέρουμε ότι

$$\begin{array}{ccccc} \int_{X \times Y} \varphi_n \, d(\mu \times \nu) & = & \int_X g_n \, d\mu & = & \int_Y h_n \, d\nu \\ \Big\downarrow & & \Big\downarrow {\scriptstyle (1)} & & \Big\downarrow {\scriptstyle (2)} \\ \int_{X \times Y} f \, d(\mu \times \nu) & & \int_X g \, d\mu & & \int h \, d\nu \end{array}$$