18/10/2004

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω X σύνολο. Το X καλείται Διανυσματικός Χώρος (επί του $\mathbb{R}$ ή του $\mathbb{C}$) αν υπάρχουν

"$+ : X \times X \to X$" και "$\cdot : \mathbb{R} \times X \to X$" και $0 \in X$ τ.ω.

1. $x+y = y+x \quad , \forall x,y \in X$
2. $x+(y+z) = (x+y)+z \quad , \forall x,y,z \in X$
3. $0+x = x \quad , \forall x \in X$
4. $\forall x \in X \quad \exists -x \in X$ τ.ω. $x-x = x+(-x) = 0$
5. $(\lambda+\mu)x = \lambda x + \mu x \quad , \forall x \in X$ και $\forall \lambda,\mu \in \mathbb{R}$
6. $1 \cdot x = x \quad , \forall x \in X$
7. $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x) \quad , \forall \lambda,\mu \in \mathbb{R}$ και $\forall x \in X$

$$\left(\begin{array}{l} 8.\ \ 0 \cdot x = 0 \quad , \forall x \in X \\ 9.\ \ (-1) \cdot x = -x \quad , \forall x \in X \end{array}\right) \rightsquigarrow \lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y, \ \forall x,y \in X, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Παραδείγματα:

(i) $\mathbb{R}^d = \{(x_1, x_2, \dots, x_d) : x_i \in \mathbb{R}, \ \forall i = 1, \dots, d\}$

$(x_1, \dots, x_d) + (y_1, \dots, y_d) = (x_1+y_1, \dots, x_d+y_d)$

$\lambda(x_1, \dots, x_d) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_d)$.

(ii) Πραγματικοί nxn πίνακες.

$M = \{(a_{ij})_{i,j=1}^{n} : a_{ij} \in \mathbb{C}, \ \forall i,j\}$.

$(a_{ij})_{i,j=1}^{n} + (\beta_{ij})_{i,j=1}^{n} = (a_{ij}+\beta_{ij})_{i,j=1}^{n} \quad , \quad \lambda(a_{ij})_{i,j=1}^{n} = (\lambda a_{ij})_{i,j=1}^{n}$.

(iii) $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} : a_n \in \mathbb{R}, \ \forall n \in \mathbb{N}\}$.

$(a_n)_n + (\beta_n)_n = (a_n+\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$\lambda(a_n)_n = (\lambda a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

(iv) X μη κενό σύνολο. Έστω $\mathcal{F}(X) = \{f : X \to \mathbb{R}\}$.
Αν $f,g \in \mathcal{F}(X)$, τότε ορίζουμε $f+g \in \mathcal{F}(X)$ με
$(f+g)(x) = f(x)+g(x)$, $\forall x \in X$ και $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ ορίζουμε
$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$, $\forall x \in X$.

Άσκηση. Δείξτε ότι ο $\mathcal{F}(X)$ με τις παραπάνω πράξεις είναι δ.χ.

(v) $\ell^2(\mathbb{N}) \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N}) \overset{\text{op}}{\iff} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < +\infty$

Για να δούμε αν ο $\ell^2(\mathbb{N})$ είναι δ.χ. πρέπει νδο $\forall (a_n)_n, (\beta_n)_n \in \ell^2$
η $(a_n)_n + (\beta_n)_n = (a_n+\beta_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})$, δηλαδή αρκεί
νδο $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n+\beta_n)^2 < +\infty$.
Αλλά, $(a_n)_n \in \ell^2(\mathbb{N}) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < +\infty$
$(\beta_n)_n \in \ell^2(\mathbb{N}) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^2 < +\infty$
και $\forall n \in \mathbb{N}$ $(a_n+\beta_n)^2 \leq 3(a_n^2+\beta_n^2)$, άρα

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n+\beta_n)^2 \leq 3\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n\right) < +\infty.$$

Άσκηση: Τελειώστε την απόδειξη ότι ο $\ell^2(\mathbb{N})$ είναι δ.χ.

(vi) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Η f είναι συνεχής στο $x_0 \overset{\text{op}}{\iff} \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ τ.ω. $|x-x_0| < \delta$
$\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

$C(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \text{η } f \text{ είναι συνεχής}\}$.
$C(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{F}(\mathbb{R})$.
Το $C(\mathbb{R})$ είναι δ.χ. με τις επόμενες πράξεις

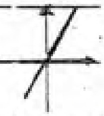
ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω X δ.χ. και $Y \subset X$. Ο Y καλείται υπόχωρος του X αν ο Y με τις επαγόμενες πράξεις είναι δ.χ.

Παραδείγματα:

(i) Το $\{0\}$ είναι διαν. υποχ. του X.

(ii) Έστω $x \in X$. Θεωρούμε το σύνολο $\langle x \rangle = \{\lambda x : \lambda \in \mathbb{R}\}$.



Τότε ο $\langle x \rangle$ είναι διαν. υποχ. του X.

(iii) Ο $\ell^2(\mathbb{N})$ είναι διαν. υποχ. του $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ και ο $C(\mathbb{R})$ είναι διαν. υποχ. του $\mathcal{F}(\mathbb{R})$

Άσκηση: Έστω X δ.χ. και $(Y_i)_{i\in I}$ μια οικογένεια διαν. υποχ. του X. Δείξτε ότι:

(περιέχει το μηδέν)

(1) $\bigcap_{i\in I} Y_i \neq \emptyset$ και (2) $\bigcap_{i\in I} Y_i$ είναι διαν. υποχ. του X.

Ισχύει το ίδιο για ενώσεις υποχώρων. (όχι - αντιπαρ. 2 ευθείες)

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω X δ.χ. και $A \subseteq X$. Με $\langle A \rangle$ συμβολίζουμε το σύνολο (span =) $\langle A \rangle = \bigcap \{Y : Y$ διαν. υπόχωρος του X με $A \subseteq Y\}$.

Το $\langle A \rangle$ καλείται (γραμμική) θήκη του A, είναι ο ελάχιστος διαν. υπόχ. του X που περιέχει το A, δηλαδή $\forall Y$ διαν. υποχ. του X με $A \subseteq Y \Rightarrow \langle A \rangle \subseteq Y$.

Ελαχιστικό όχι
ελάχιστο, γιατί
έχουμε
μη διάταξη, ολ-
[illegible] μερική.

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω X δ.χ. και $A \subseteq X$. Θέτουμε

$B = \{\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k$ με $\lambda_i \in \mathbb{R}, x_i \in A, \forall i = 1, \dots, k$ και $k \in \mathbb{N}\}$. Τότε,

(1) Το B είναι διαν. υποχ. του X με $A \subseteq B$.

(2) Το $B = \langle A \rangle$.

Απόδειξη:

(1) Αρκεί νδο το B είναι δ.χ. με τις επαγόμενες πράξεις.

Έστω $x, y \in B \xRightarrow{\text{ορ. του } B} \exists \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}, x_1, \dots, x_k \in A$

$\exists \mu_1, \dots, \mu_m \in \mathbb{R}, y_1, \dots, y_n \in A$

με $x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i$ και $y = \sum_{i=1}^{n} \mu_i y_i$

$\Rightarrow x + y = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k + \mu_1 y_1 + \dots + \mu_m y_n \in B$.

Ομοια, δείχνουμε ότι ο B είναι διαν. υποχ. του X και $A \subseteq B$.

(2) Το $B \supseteq \langle A \rangle$ είναι άμεσο από τον ορισμό του $\langle A \rangle$ (και από το ∞)

Αρκεί νδο αν Y τυχαίος διαν. υποχ. του X με $Y \supseteq A \Rightarrow B \subseteq Y$, δηλαδή αρκεί νδο

$\forall x \in B \Rightarrow x \in Y$.

εν έχουμε καθορίσει το
Αυτό δείχνεται
: επαγωγή.

Αλλά, αν $x \in B \Rightarrow x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ με $\overset{x_i \in Y}{x_i \in A}$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $\forall i = 1, \dots, ⓚ^{*}$

$\Rightarrow x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i$ με $x_i \in Y$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $\forall i = 1, \dots, k$

$\xRightarrow{Y \delta.\chi.} x \in Y$ *

Άσκηση: Έστω X δ.χ. Δείξτε ότι $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall x_1, \dots, x_k \in X$ και $\forall \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \in X$

(Επαγωγική Υπόθεση το
$\Pi(k)$: $\forall x_1, \dots, x_k \in X$, $\forall \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R} \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \in X$)

29/10/2004

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω X δ.χ. και $x_1,\dots,x_n \in X$. Τα $x_1,\dots,x_n$ καλούνται γραμμικώς ανεξάρτητα ανν $\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\dots+\lambda_n x_n=0 \Leftrightarrow \lambda_i=0$, $\forall i=1,\dots,n$

Παραδείγματα:

1) $\mathbb{R}^d$, $(e_n)_{n=1}^d$ είναι γραμ. ανεξ. όπου $e_n=(0,0,\dots,1,0,\dots,0)$

2) M, $E_{k,l}=(a_{ij})_{i,j=1}^n$ με $a_{ij}=0$ αν $i\neq k, j\neq l$, και $a_{ij}=1$ αν $i=k, j=l$.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω X δ.χ και $A\subseteq X$. Το A καλείται γραμμικά ανεξάρτητο ανν $\forall F\subseteq A$ πεπερασμένο, το F είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

Παραδείγματα:

1) Στον $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. $A=\{e_n : n\in\mathbb{N}\}$ με $e_n=(0,0,\dots,0,\overset{n\text{-θέση}}{1},0,\dots)$

2) $C[0,1]$

$A=\{f_n:[0,1]\to\mathbb{R} : f_n(x)=x^n\}$ γραμμικώς ανεξάρτητα.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω X δ.χ. και $A\subseteq X$. Το A καλείται ΒΑΣΗ (αλγεβρική ή Hamel) του X αν το A είναι γραμμικώς ανεξάρτητο και $\langle A\rangle=X$.

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω X δ.χ. και $A\subseteq X$ γραμ. ανεξ. Τότε $\forall x\in\langle A\rangle$ $\exists!\, x_1,\dots,x_n\in A$ και $\exists!\,\lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{R}$ ώστε $x=\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$.

(Άσκηση).

Άσκηση: Αν X δ.χ. και $A \subseteq X$ γραμ. ανεξ., τότε $\forall x \in A$, $x \neq 0$.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Κάθε δ.χ. X έχει Hamel βάση.

Παράδειγμα:

$c_{00}(\mathbb{N}) = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : \exists k \in \mathbb{N}, \forall \ell > k \quad a_\ell = 0\}$ τελικά μηδενικές

Η Hamel βάση του $c_{00}(\mathbb{N})$ είναι η $H = \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω X, Y δ.χ. και $T : X \to Y$. Ο T καλείται γραμμικός

ανν $\forall x_1, x_2 \in X$: $T(x_1 + x_2) = T(x_1) + T(x_2)$

και $\forall x \in X$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$: $T(\lambda x) = \lambda T(x)$.

Αν $T : X \to Y$ γραμμικός, τότε $\operatorname{Im} T = \{T(x) : x \in X\}$

και $\ker T = \{x \in X : T(x) = 0\}$.

Τότε, $\operatorname{Im} T$ διαν. υποχ. του Y και $\ker T$ διαν. υποχ. του X.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω X δ.χ. Με $X^{\#}$ συμβολίζουμε το σύνολο:

$$X^{\#} = \{T : X \to \mathbb{R} \text{ τ.ω. } T \text{ γραμμικός}\}$$

Ο $X^{\#}$ καλείται αλγεβρικός συζυγής του X.

Ο $X^{\#}$ με τις προφανείς πράξεις είναι δ.χ.

Παραδείγματα:

1) $T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ $\quad Tx = \overset{=(y,x)\,,\, y\in\mathbb{R}^d}{\underset{\sim}{y}\,\underline{x}}$, (y διάνυσμα) $\quad \underset{\sim}{y} \in \mathbb{R}^d$

2) $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

$S : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ $\quad S((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $b_n = a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

γραμμικός.

3) $I: C[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$I(f) = \int_0^1 f(t)dt$ γραμμικός τελεστής.

4) $T: C[0,1] \longrightarrow C[0,1]$

$T(f)(x) = \int_0^x f(t)dt$ παράγουσα $\rightarrow$ γραμμικός τελεστής

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω X δ.χ. και $C \subseteq X$. Το C καλείται *κυρτό* ανν $\forall x,y \in C$ $\forall 0 \leq \lambda \leq 1$ το $\lambda x + (1-\lambda) y \in C$

Άσκηση: Έστω X δ.χ. και $C \subseteq X$ κυρτό. Δείξτε ότι $\forall x_1, \ldots, x_k \in C$ και $\forall \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ με $\lambda_i \geq 0$, $\forall i=1,\ldots,k$, $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$ έχουμε ότι $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \in C$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

Αν X δ.χ. και $(C_i)_{i \in I}$ οικογένεια από κυρτά, τότε το $C = \bigcap_{i \in I} C_i$ είναι κυρτό.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω X δ.χ. και $A \subseteq X$. Με coA συμβολίζουμε το σύνολο $coA = \bigcap \{ C \subseteq X : C \text{ κυρτό και } C \supseteq A \}$.
Το coA ονομάζεται ονομάζεται η *κυρτή θήκη του A*.

Άσκηση: Έστω X δ.χ. και $A \subseteq X$. Δείξτε ότι

$$coA = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i : k \in \mathbb{N},\ x_1, \ldots, x_k \in A \text{ και } \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R} \text{ με } \lambda_i \geq 0\ \forall i=1,\ldots,k \text{ και } \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \right\}.$$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω X σύνολο.

Μια οικογένεια τ υποσυνόλων του X καλείται τοπολογία στον X ανν

1) $\emptyset, X \in \tau$
2) Αν $(U_i)_{i\in I}$ στοιχείων της τ, τότε $\bigcup_{i\in I} U_i \in \tau$
3) Αν $U_1,\dots,U_k \in \tau$, τότε $U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_k \in \tau$

Τα στοιχεία της τ καλούνται **ανοικτά**, τα συμπληρώματά τους **κλειστά** και το ζεύγος (X,τ) τοπολογικός χώρος (X,τ).

Παραδείγματα:

1) $\tau=\{\emptyset, X\}$
2) $\tau=\mathcal{P}(X)$
3) Έστω (X,d) μετρικός χώρος.
Αν συμβολίσουμε με τ την οικογένεια των ανοιχτών υποσυνόλων του (X,d), τότε η τ είναι τοπολογία.

Άσκηση: Αποδείξτε ότι η οικογένεια των ανοιχτών υποσυνόλων του (X,d) είναι τοπολογία

ΟΡΙΣΜΟΣ

Ένας τ.χ. (X,τ) καλείται Hausdorff ανν

$\forall x,y \in X \ \exists U_x, U_y \in \tau$ με

(α) $x \in U_x$
(β) $y \in U_y$
(γ) $U_x \cap U_y = \emptyset$.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω (X,τ) τοπολογικός χώρος και $(x_n)_{n\in N}$ ακολουθία στον X. Θα λέμε ότι η $(x_n)_{n\in N}$ συγκλίνει σε ένα $x_0\in X$ αν $\forall U\subseteq X$ ανοικτό με $x_0\in X$

$\exists n_0\in N \ \forall n\geq n_0 \ x_n\in U$.

και γράφουμε $x_n \to x$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

Αν X σύνολο και $\tau=\{\emptyset, X\}$ η τετριμμένη τοπολογία στον X. Τότε $\forall (x_n)_n$ ακολουθία στον X και $\forall y\in X$

$x_n \to y$.

Το y δηλαδή δεν είναι μοναδικό για οποιοδήποτε τ.χ.

ΑΜΑ ΠΡΟΤΑΣΗ

Αν (X,τ) τ.χ. Hausdorff και $x_n\to x$, τότε το x είναι μοναδικό.

Απόδειξη:

Έστω όχι. Τότε $\exists y\neq x$ με $x_n\to y$.
Αφού (X,τ) Hausdorff $\exists U_x, U_y$ ανοιχτά με $x\in U_x$, $y\in U_y$ και $U_x\cap U_y=\emptyset$. Αλλά,

$x_n\to x \Rightarrow \exists n_x\in N \ \forall n\geq n_x \ x_n\in U_x$

$x_n\to y \Rightarrow \exists n_y\in N \ \forall n\geq n_y \ x_n\in U_y$ Άτοπο

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω (X,τ) τοπολογικός χώρος και $A\subseteq X$. Με $\overline{A}$ συμβολίζουμε το σύνολο

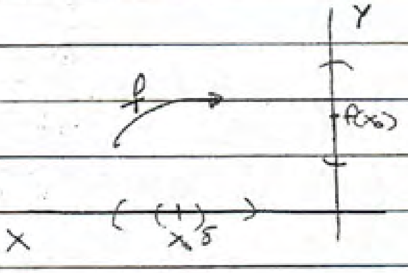
$\overline{A}=\bigcap\{F\subseteq X. \ F$ κλειστό και $F\supseteq A\}$.

Το $\overline{A}$ ονομάζεται η κλειστότητα του A

Με Int A συμβολίζουμε το σύνολο

$\text{Int} A = \bigcup\{U\subseteq X : U$ ανοιχτό και $U\subset A\}$

Το IntA ονομάζεται το εσωτερικό του A.



ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω (X,τ_1), (Y,τ_2) τ.χ. και $f: X \to Y$ συνάρτηση
Η f καλείται συνεχής αν
$f^{-1}(U)$ ανοικτό στον X $(f^{-1}(U) \in \tau_X)$
$\forall U \subseteq Y$ ανοικτό $(U \in \tau_Y)$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

Η $f: X \to Y$ είναι συνεχής αν και μόνο αν
$\forall C \subseteq Y$ κλειστό το $f^{-1}(C)$ είναι κλειστό.

25/10/2004

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω (X,τ) τ.χ. και $B\subseteq\tau$.
Η B καλείται <u>βάση</u> του (X,τ) αν
$\forall U\in\tau \quad \exists (U_i)_{i\in I}\subset B$ τ.ω. $U=\bigcup_{i\in I}U_i$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

Αν (x,τ) είναι τ.χ. και $B\subset\tau$, τότε B είναι βάση
$\Leftrightarrow \forall x\in X \quad \forall U\in\tau$ με $x\in U$ $\quad \exists V\in B$ με $x\in V\subset U$.

Παράδειγμα:

Αν (X,τ) είναι μετρικός, τότε η $B=\underbrace{\{B(x,\varepsilon): x\in X,\ \varepsilon>0\}}_{\text{ανοιχτές μπάλες του } (X,\rho)}$
είναι βάση

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

Έστω X σύνολο και $(\tau_i)_{i\in I}$ μια οικογένεια τοπολογιών στο X. Τότε, και η

$$\tau=\bigcap_{i\in I}\tau_i=\{U\subseteq X : U\in\tau_i,\ \forall i\in I\}.$$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω X σύνολο και $F\subseteq P(X)$. Με τ_F συμβολίζουμε την τοπολογία:

$$\tau_F=\bigcap\{\tau : \tau \text{ τοπολογία στον } X \text{ και } F\subset\tau\}.$$

Η τ_F καλείται η <u>τοπολογία που παράγεται από την</u> F.

ΠΡΟΤΑΣΗ:

Έστω X σύνολο και $B\subseteq P(X)$ τέτοιο ώστε:
(α) $\bigcup_{U\in B}U=X$

(β) Αν $U_1,\dots,U_n\in B \Rightarrow U_1\cap\dots\cap U_n\in B$
Τότε η B είναι βάση για την τ_B.

Απόδειξη:

Ορίζουμε $\tau_1 = \{V \subseteq X : \exists (U_i)_{i \in I} \subseteq B \text{ με } \bigcup_{i \in I} U_i = V \cup \{\emptyset\}\}$

Ισχυρισμός = Η τ_1 είναι τοπολογία στον X.
Πράγματι, $\emptyset \in \tau_1$ και $X \in \tau_1$ από το (α)
Η τ_1 είναι προφανώς κλειστή κάτω από τυχαίες ενώσεις.
Τέλος, αν $U, V \in \tau_1$, τότε

$$U = \bigcup_{i \in I} U_i \quad \text{με } U_i \in B, \ \forall i \in I$$

$$V = \bigcup_{j \in J} V_j \quad \text{με } V_j \in B, \ \forall j \in J.$$

Άρα $U \cap V = \left(\bigcup_{i \in I} U_i\right) \cap \left(\bigcup_{j \in J} V_i\right) = \bigcup_{i \in I} \bigcup_{j \in J} \underset{\overset{\cap}{B \text{ από υπόθεση } (\beta)}}{(U_i \cap V_j)} \in \tau_1$

Άρα, όντως η τ_1 είναι τοπολογία.

Η B είναι βάση για την τ_1.
Αφού $B \subseteq \tau_1$ και τ_B είναι η ελάχιστη τοπολογία
ώστε $B \subseteq \tau_B \Rightarrow \tau_1 \supseteq \tau_B$

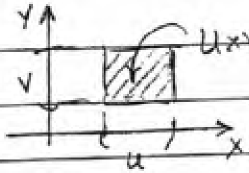
Από την άλλη, από τον ορισμό της τ_1 κάθε $U \in \tau_1 \Rightarrow$
$U \in \tau_B \Rightarrow \tau_1 \subseteq \tau_B$

Άρα, $\tau_1 = \tau_B$.

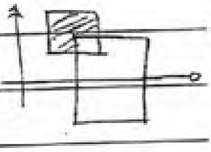
※

ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΓΙΝΟΜΕΝΑ ΤΟΠΟΛΟΓΙΚΩΝ ΧΩΡΩΝ.

Έστω (X,τ_X) και (Y,τ_Y) τοπολογικοί χώροι.
Θεωρούμε το σύνολο των ανοικτών ορθογωνίων του $X\times Y$, με
$$\mathcal{R}=\{U\times V : U\in\tau_X \text{ και } V\in\tau_Y\}.$$



Παρατηρούμε ότι $\bigcup_{R\in\mathcal{R}} R = X\times Y$ και ότι αν
$R_1,R_2\in\mathcal{R} \Rightarrow R_1\cap R_2\in\mathcal{R}$.



Πράγματι, έστω $R_1=U_1\times V_1$
$$R_2=U_2\times V_2$$
$$\Rightarrow R_1\times R_2=(U_1\cap U_2)\times(V_1\cap V_2)$$

ΡΙΣΜΟΣ: Η <u>τοπολογία γινόμενο</u> $\tau_{X\times Y}$ στον $X\times Y$ είναι η τοπολογία που παράγεται από τα ανοικτά ορθογώνια.

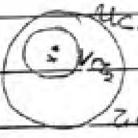
<u>Παράδειγμα:</u>

Αυτές οι 2 τοπολογίες είναι ίδιες

$(\mathbb{R}^2,\rho_2)$ μετρικός χώρος
$(\mathbb{R},\rho_{1,1})\times(\mathbb{R},\rho_{1,1}) \Rightarrow$ Στον $\mathbb{R}^2$ έχουμε και την τοπολογία γινόμενο.

<u>Απόδειξη</u> (παραδείγματος)

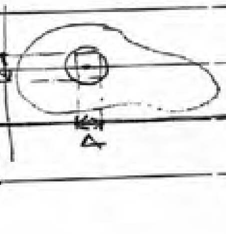
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: (*)
Έστω X σύνολο και τ_1,τ_2 τοπολογίες στον X.
$\underline{\tau_1\subseteq\tau_2} \Leftrightarrow \forall U\in\tau_1,\ \forall x\in U\ \ \exists V_x\in\tau_2$ με $x\in V_x\subset U$.



εννοούμε τ.χ.

Ισχυρισμός = Ο $(\mathbb{R}^2,\rho_2)=(\mathbb{R},\rho_{1,1})\times(\mathbb{R},\rho_{1,1})$

Πράγματι, έστω U ανοικτό στον $(\mathbb{R}^2,\rho_2)$.
Έστω $x\in U$ τυχαίο.
Αφού U ανοικτό $\Rightarrow \exists \varepsilon_x>0$ ώστε $B_1(x,\varepsilon)\subset U$



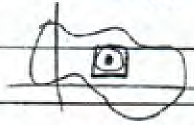
$\Rightarrow \exists A,B \subseteq \mathbb{R}$ ανοιχτά διαστήματα με $\vec{x} \in \overset{(\mathbb{R},\rho_1)\times(\mathbb{R},\rho_1)}{\overset{\cup}{A\times B}} \subset B(\vec{x},\varepsilon)$

Άρα, $(\mathbb{R}^2,\rho_2) \subseteq (\mathbb{R},\rho_{1\cdot 1})\times(\mathbb{R},\rho_{1\cdot 1})$.

Αντίστροφα,

Έστω $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοιχτό για την τοπολογία γινόμενο και $\vec{x} \in \mathcal{U}$ τυχαίο.

Άρα, αφού το $\mathcal{R}$ είναι βάση για την τοπολογία γινόμενο, $\exists A,B \subseteq \mathbb{R}$ ανοιχτά διαστήματα με $\vec{x} \in A\times B \subseteq \mathcal{U}$.



Αλλά $\exists \varepsilon_x > 0$ τ.ω. $\vec{x} \in B(\vec{x},\varepsilon_x) \subseteq A\times B$

Άρα $(\mathbb{R},\rho_{1\cdot 1})\times(\mathbb{R},\rho_{1\cdot 1}) \subseteq (\mathbb{R}^2,\rho_2)$.

Οπότε, δείξαμε ότι $(\mathbb{R}^2,\rho_2) = (\mathbb{R},\rho_{1\cdot 1})\times(\mathbb{R},\rho_{1\cdot 1})$.

\#

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω $X_1,\dots,X_n$. Η συνάρτηση προβολής στην i-θέση

$$\pi_i : X_1\times X_2\times\dots\times X_n \longrightarrow X_i$$

$$\pi_i((x_1,\dots,x_n)) = x_i$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

1) Έστω $(X_1,\tau_1),\dots,(X_n,\tau_n)$ τ.χ.

$\boxed{\alpha}$ Δείξτε ότι αν κάθε (X_i,τ_i) είναι Hausdorff, τότε και ο $(X_1\times\dots\times X_n)$ με την τοπολογία γινόμενο είναι Hausdorff.

$\boxed{B}$ Δείξτε ότι $\forall i \in \{1,\dots,n\}$ η π_i είναι συνεχής όταν ο $X_1\times\dots\times X_n$ εφοδιάζεται με την τοπολογία γινόμενο.

Η ελάχιστη τοπολογία που κάνει μια οικογένεια πραγματικών συναρτήσεων συνεχή.

Έστω X σύνολο και $\mathcal{F}$ μια οικογένεια πραγματικών συναρτήσεων πάνω στο X.
Με $(X,\mathcal{F})$ συμβολίζουμε την ελάχιστη τοπολογία πάνω στον X που κάνει τις συναρτήσεις του $\mathcal{F}$ συνεχείς.
Δηλαδή,

$$(X,\mathcal{F}) = \bigcap\{\tau : \tau \text{ τοπολογία στον } X \text{ και } \forall f\in\mathcal{F} \text{ η } f \text{ είναι } \tau\text{-συνεχής}\}.$$

Κατασκευή της $(X,\mathcal{F})$:

ΒΗΜΑ 1:
$\mathcal{B}_1 = \{f^{-1}(I) : I\subseteq\mathbb{R}$ ανοιχτό διάστημα και $f\in\mathcal{F}\}$.

ΒΗΜΑ 2:

Βάση περιοχών εξασφαλίζεται από την 2η συνθήκη του θεωρήματος

$\mathcal{B}_2 = \{f_1^{-1}(I_1)\cap f_2^{-1}(I_2)\cap\ldots\cap f_n^{-1}(I_n) : I_1,\ldots,I_n\subseteq\mathbb{R}$ ανοιχτά διαστήματα και $f_1,\ldots,f_n\in\mathcal{F}\}$.

Είναι εύκολο να δούμε ότι:
(1) Η $\mathcal{B}_2$ είναι κλειστή κάτω από πεπερασμένες τομές.
(2) $\bigcup_{U\in\mathcal{B}_2} U = X$

Από πρόταση η $\mathcal{B}_2$ είναι βάση για την τοπολογία την οποία παράγει.
Έστω τ η τοπολογία αυτή.
Ισχυρισμός $\Rightarrow$ $\tau = (X,\mathcal{F})$.

Αρχικά δείχνουμε ότι $\forall f \in \mathcal{F}$ η f είναι τ-συνεχής.

Πράγματι,

έστω $U \subseteq \mathbb{R}$ ανοιχτό τυχαίο. Γράφουμε

$U = \bigcup_n I_n$ με I_n ανοιχτά διαστήματα του $\mathbb{R}$.

Τότε, $f^{-1}(U) = f^{-1}\left(\bigcup_n I_n\right) = \bigcup_n \underbrace{f^{-1}(I_n)}_{\in \mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B}_2} \in \tau$.

(δείξαμε ότι η αντίστρ. εικόνα καθε ανοιχτού ανήκει στο τ)

$\Rightarrow (X, \mathcal{F}) \subset \tau$.

Εύκολα, δείχνουμε ότι $\tau \subset (X, \mathcal{F})$.

$\#$

$\mathcal{B}_2 = \{ f^{-1}(I_1) \cap f_2^{-1}(I_2) \cap \ldots \cap f_n^{-1}(I_n) : I_1, \ldots, I_n \subset \mathbb{R}$ ανοιχτά διαστήματα, $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{F}\}$.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Έστω X σύνολο και $\mathcal{F}$ οικογένεια πραγματικών συναρτήσεων στον X.

Τότε, **βάση** για την $(X, \mathcal{F})$ είναι τα σύνολα της μορφής:

$$W(x, F, \varepsilon) = \{ y \in X : |f(y) - f(x)| < \varepsilon, \ \forall f \in F \}$$

όπου

$x \in X$, $F = \{f_1, \ldots, f_n\} \subseteq \mathcal{F}$ πεπερασμένο και $\varepsilon > 0$.

$I_1 = (f_1(x) - \varepsilon, f_1(x) + \varepsilon)$

$f_1^{-1}(I_1) = \{ y : f_1(y) \in I_1, f_2(y) \in I_2, \ldots, f_n(y) \in I_n \}$.

Άσκηση:

Έστω X σύνολο και $\mathcal{F}$ οικογένεια πραγματικών συναρτήσεων στον X. Λέμε ότι η $\mathcal{F}$ ΔΙΑΧΩΡΙΖΕΙ τα σημεία του X αν $\forall x, y \in X$ $\exists f \in \mathcal{F}$ με $f(x) \neq f(y)$. Δείξτε ότι αν η $\mathcal{F}$ διαχωρίζει τα σημεία του $X \Rightarrow (X, \mathcal{F})$ είναι Hausdorff

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω (X,τ_X) και (Y,τ_Y) τ.χ.
Οι (X,τ_X) και (Y,τ_Y) καλούνται ομοιομορφικοί αν υπάρχει $f: X \to Y$ τέτοια ώστε:

(1) Η f "1-1"
(2) Η f "επί"
(3) Οι f, f^{-1} είναι συνεχείς.

Η συνάρτηση f καλείται ομοιομορφισμός.

ΤΟΠΟΛΟΓΙΚΟΙ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ

ΟΡΙΣΜΟΣ

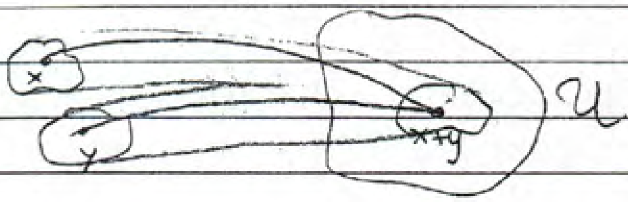
Ένας διανυσματικός χώρος X καλείται **τοπολογικός δ.χ.** (τ.δ.χ.) αν έχει μια **Hausdorff** τοπολογία τ τέτοια ώστε:

(1) Η "$+: X \times X \to X$" να είναι **συνεχής** όταν ο $X \times X$ εφοδιαστεί με την τοπολογία γινόμενο.
(2) Η "$\bullet: \mathbb{R} \times X \to X$" να είναι **συνεχής** όταν ο $\mathbb{R} \times X$ εφοδιαστεί με την τοπολογία γινόμενο.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ: (δηλ. η πράξη είναι αμφισυνεχής)

(α) Η συνθήκη 1 σημαίνει ότι
$\forall U \subseteq X$ ανοιχτό και $\forall x,y \in X$ με $x+y \in U$ $\exists V_x, V_y \subseteq X$ ανοιχτά με: (i) $x \in V_x$, $y \in V_y$
(ii) $V_x + V_y = \{z+w : z \in V_x, w \in V_y\} \subseteq U$.

(β) Η συνθήκη 2 σημαίνει ότι
$\forall U \subseteq X$ ανοιχτό, $\forall x \in X$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, με $\lambda x \in U$ $\exists I \subseteq \mathbb{R}$ ανοιχτό και $V \subseteq X$ ανοιχτό με:
(i) $\lambda \in I$, $x \in V$
(ii) $I \cdot V = \{\mu \cdot z \ \mu \in I, z \in V\} \subseteq U$


x
y
x+y
U

29/10/2004

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω X τ.δ.χ. και $x \in X$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
Ορίζουμε $T_x : X \to X$, $M_\lambda : X \to X$ με $T_x(y) = x+y$, $M_\lambda(x) = \lambda \cdot x$.

ΠΡΟΤΑΣΗ

Αν X τ.δ.χ. τότε $\forall x \in X$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ οι T_x, M_λ είναι ομοιομορφισμοί.

Απόδειξη:

Έστω $x \in X$ τυχαίο. Τότε προφανώς ο T_x είναι 1-1 και επί. Επιπλέον, $T_x^{-1} = T_{-x}$. Αρκεί νδο ο T_x είναι συνεχής για τυχαίο $x \in X$. Έστω $U \subseteq X$ ανοικτό τυχαίο. Τότε, ~~$y \in$~~ $y \in T_x^{-1}(U) \Leftrightarrow x+y \in U$. Από τη συνέχεια της πράξης $\exists V \subseteq X$ ανοικτό με $y \in V$ τέτοιο ώστε $x+V \subseteq U \Rightarrow$ $y \in V \subset T_x^{-1}(U) \Rightarrow T^{-1}(U)$ ανοικτό.

⇝ Η απόδειξη για το M_λ είναι όμοια. ✱

ΠΟΡΙΣΜΑ

Έστω X τ.δ.χ. και $U \subseteq X$. Τ.Α.Ε.Ι. (ισοδύναμα):

(1) U ανοικτό
(2) $\exists x \in X$ ώστε $x+U$ ανοικτό
(3) $\forall x \in X$ το $x+U$ ανοικτό
(4) $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ ώστε το λU ανοικτό
(5) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ το λU ανοικτό

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω X τ.δ.χ., $T : X \to \mathbb{R}$ γραμμική. Τ.Α.Ε.Ι.

(1) Το T είναι συνεχές
(2) Το T είναι συνεχές στο 0

(3) $\exists V \subseteq X$ ανοιχτό με $0 \in V$ και $M \in \mathbb{R}^+$ ώστε $T(V) \subseteq (-M,M$

Απόδειξη:

(1) $\Rightarrow$ (2) προφανές

(2) $\Rightarrow$ (1)

Έστω $U \subseteq \mathbb{R}$ ανοιχτό και $x \in T^{-1}(U)$. Έστω $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $(T(x)-\varepsilon, T(x)+\varepsilon) \subseteq U$.

Αφού T συνεχής στο 0, $\exists V \subset X$ ανοιχτό στο $0 \in V$ τέτοιο ώστε $T(V) \subseteq (-\varepsilon,\varepsilon)$. Τότε,

$$T(x+V) = T(x)+T(V) \subseteq (T(x)-\varepsilon, T(x)+\varepsilon) \subseteq U \Rightarrow$$
$$x+V \subseteq T^{-1}(U)$$

Άρα, T συνεχής.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω X, Y τ.χ., $f: X \to Y$ και $x_0 \in X$. Η f καλείται συνεχής στο $x_0 \in X$ αν $\forall U \subseteq Y$ ανοιχτό με $f(x_0) \in U$ $\exists V \subseteq X$ ανοιχτό με $x_0 \in V$ και $f(V) \subseteq U$.

(2) $\Rightarrow$ (3) προφανές

(3) $\Rightarrow$ (2)

Έστω $\varepsilon > 0$, τότε θέτουμε $W = \frac{\varepsilon}{M} V$. Τότε $W \subseteq X$ ανοιχτό με $0 \in W$ και $T(W) = T\left(\frac{\varepsilon}{M} V\right) = \frac{\varepsilon}{M} T(V) \subseteq (-\varepsilon,\varepsilon)$

$\Rightarrow$ Η T είναι συνεχής στο 0

*

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω X δ.χ. και $p: X \to \mathbb{R}$

(α) Η p καλείται υποπροσθετική, αν $p(x+y) \leq p(x)+p(y)$, $\forall x,y \in X$

(β) Η p καλείται θετικά ομογενής, αν $p(\lambda x) = \lambda p(x)$, $\forall \lambda \geq 0$, $\forall x \in X$

(γ) Η p καλείται υπογραμμική, αν ικανοποιεί τα (α), (β).

(δ) Η p καλείται ημινόρμα αν είναι υποπροσθετική και
$p(\lambda x) = |\lambda| \cdot p(x)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall x \in X$.

(ε) Η p καλείται νόρμα, αν η p είναι ημινόρμα και ισχύει
$p(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(στ) Η p καλείται κυρτή αν $\forall \lambda \in [0,1]$, $\forall x,y \in X$ έχουμε
$p(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda p(x) + (1-\lambda) p(y)$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

Νόρμα $\Rightarrow$ Ημινόρμα $\Rightarrow$ Υπογραμμική $\Rightarrow$ Κυρτή.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Ένα μερικά διατεταγμένο ζεύγος είναι ένα ζεύγος $(\mathbb{P}, \leq)$, όπου $\mathbb{P}$ σύνολο και $\leq$ είναι μια διμελής σχέση στο $\mathbb{P}$ που ικανοποιεί τα:

(1) $x \leq x$ αυτοπαθής, $\forall x \in X$

(2) $x \leq y$ και $y \leq z \Rightarrow x \leq z$, $\forall x,y,z \in X$, μεταβατική

(3) $x \leq y$ και $y \leq x \Rightarrow x = y$ αντισυμμετρική

Η $\leq$ καλείται ΜΕΡΙΚΗ ΔΙΑΤΑΞΗ

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω $(\mathbb{P}, \leq)$ μερικά διατεταγμένο ζεύγος και $C \subseteq \mathbb{P}$.
Το C καλείται **αλυσίδα** αν
$\forall x,y \in C \Rightarrow$ ή $x \leq y$ ή $y \leq x$.

- Ένα σημείο $x_0 \in \mathbb{P}$ καλείται **μεγιστικό** (maximal) αν (δεν μπορείς να βρεις)

$$\nexists y \in \mathbb{P} \text{ με } x_0 \le y \text{ και } y \ne x_0.$$

- Αν $C \subseteq \mathbb{P}$ αλυσίδα, ένα στοιχείο $x \in \mathbb{P}$ καλείται **άνω φράγμα** της C, αν $\forall y \in C \Rightarrow y \le x$.

ΛΗΜΜΑ (ZORN)

Έστω $(\mathbb{P}, \le)$ μερικά διατεταγμένο ζεύγος.
Αν κάθε αλυσίδα έχει άνω φράγμα, τότε το $(\mathbb{P}, \le)$ έχει τουλάχιστον ένα μεγιστικό στοιχείο.

Άσκηση: Κάθε δ.χ. έχει Hamel βάση.

ΛΗΜΜΑ

- Έστω X δ.χ. και $Y \subseteq X$, $f: Y \to \mathbb{R}$ γραμμική και $p: X \to \mathbb{R}$ υπογραμμική τέτοια ώστε $f(y) \le p(y)$ $\forall y \in Y$.
Έστω $z_0 \notin Y$. Θέτουμε $Z = \langle Y \cup \{z_0\} \rangle$. Τότε υπάρχει μία $\tilde{f}: Z \to \mathbb{R}$ γραμμική τ.ω.:

(1) $\tilde{f}(y) = f(y)$, $\forall y \in Y$

(2) $\tilde{f}(z) \le p(z)$, $\forall z \in Z$

Απόδειξη:

Για να είναι η $\tilde{f}: Z \to \mathbb{R}$ γραμμική επέκταση της f θα πρέπει η $\tilde{f}$ να είναι της μορφής:

$$\tilde{f}(y + \lambda z_0) = f(y) + \lambda \tilde{f}(z_0)$$

Θέτουμε $c_0 = \tilde{f}(z_0)$. Αρκεί να προσδιορίσουμε την τιμή c_0 έτσι ώστε $\tilde{f}(z) \le p(z)$, $\forall z \in Z$, $\tilde{f}(y) + \lambda c_0 \le f(y + \lambda z_0)$, $\forall y, \lambda$

Έστω $x, y \in Y$ τυχαία. Τότε, $f(x-y) \le p(x-y) =$

$$= p(x + z_0 - z_0 - y) \le p(x + z_0) + p(-y - z_0)$$

αλλά $f(x) - f(y) = f(x-y)$.

(αφού f γραμμική)

$\Rightarrow \quad -p(-y-z_0)-f(y) \le p(x+z_0)-f(x) \quad , \quad \forall x,y\in Y$

$\Rightarrow \quad \exists c_0$ ώστε $-p(-y-z_0)-f(y) \le c_0 \le p(x+z_0)-f(x)$ (*) $\forall x,y \in Y$.

Ορίζουμε $\tilde{f}: Z \to \mathbb{R}$ με $\tilde{f}(y+\lambda z_0) = f(y) + \lambda c_0$.
Τότε, προφανώς $\tilde{f}$ γραμμική και $\tilde{f}|_Y = f$.
Αρκεί νδο $\tilde{f}(y+\lambda z_0) \le p(y+\lambda z_0)$ $\forall y \in Y$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

Περίπτωση 1η: $\lambda = 0$ ισχύει από υπόθεση
Περίπτωση 2η: $\lambda > 0$ θέτω στην (*) $x = \frac{y}{\lambda}$ (στη δεξιά ανισότητα)

$$c_0 \le p\left(\frac{y}{\lambda}+z_0\right) - f\left(\frac{y}{\lambda}\right)$$

$$\lambda c_0 \le \lambda p\left(\frac{y}{\lambda}+z_0\right) - \lambda f\left(\frac{y}{\lambda}\right) \Rightarrow$$

$$\lambda c_0 \le p(y+\lambda z_0) - f(y) \Rightarrow$$

$$\tilde{f}(y+\lambda z_0) = f(y) + \lambda c_0 \le p(y+\lambda z_0)$$

Περίπτωση 3η: $\lambda < 0$ (*) (στην αριστερή ανισότητα) θέτω $y \to \frac{y}{\lambda}$.

$$c_0 \ge -p\left(-\frac{y}{\lambda}-z_0\right) - f\left(\frac{y}{\lambda}\right) \Rightarrow$$

$$\lambda c_0 \le -\lambda p\left(-\frac{y}{\lambda}-z_0\right) - \lambda f\left(\frac{y}{\lambda}\right) \Rightarrow$$

$$\lambda c_0 \le p(y+\lambda z_0) - f(y) \Rightarrow$$

$$\tilde{f}(y+\lambda z_0) = f(y) + \lambda c_0 \le p(y+\lambda z_0)$$

$\#$

ΘΕΩΡΗΜΑ (Hahn-Banach)

Έστω X δ.χ., $Y \hookrightarrow X$, $f: Y \to \mathbb{R}$ γραμμική, $p: X \to \mathbb{R}$ υπογραμμικό με $f(y) \le p(y)$, $\forall y \in Y$. Τότε υπάρχει $\tilde{f}: X \to \mathbb{R}$ γραμμική με

(1) $\tilde{f}(y) = f(y)$, $\forall y \in Y$

(2) $\tilde{f}(x) \le p(x)$, $\forall x \in X$.

Απόδειξη:

Ορίζουμε $\mathbb{P} = \{(Z,g) : Z \hookrightarrow X,\ Y \hookrightarrow Z,\ g: Z \to \mathbb{R}$ γραμμική με $g(z) \le p(z), \forall z \in Z$ και $g|_Y = f\}$

Στο $\mathbb{P}$ ορίζουμε την

$$(Z_1, g_1) \le (Z_2, g_2) \overset{ορ}{\iff} Z_1 \hookrightarrow Z_2 \text{ και } g_2|_{Z_1} = g_1$$

Το $(\mathbb{P}, \le)$ είναι μερικά διατεταγμένο σύνολο. (Άσκηση)

Έστω C αλυσίδα στο $\mathbb{P}$ $C = \{(Z_i, g_i)\}_{i \in I}$

Θέτουμε $Z = \bigcup_{i \in I} Z_i$

Ισχυρίζομαι ότι το $Z \hookrightarrow X$.

Πράγματι, έστω $x, y \in Z \Rightarrow \exists\, i_x \in I$ με $x \in Z_{i_x}$

$\exists\, i_y \in I$ με $y \in Z_{i_y}$

Αφού C αλυσίδα $\Rightarrow$ ή $(Z_{i_x}, g_{i_x}) \le (Z_{i_y}, g_{i_y}) \Rightarrow Z_{i_x} \hookrightarrow Z_{i}$

ή $(Z_{i_y}, g_{i_y}) \le (Z_{i_x}, g_{i_x}) \Rightarrow Z_{i_y} \hookrightarrow Z$

$$\left.\begin{array}{l} Z_{i_x} \hookrightarrow Z_{i_y} \Rightarrow x+y \in Z_{i_y} \\ Z_{i_y} \hookrightarrow Z_{i_x} \Rightarrow x+y \in Z_{i_x} \end{array}\right\} \Rightarrow x+y \in Z$$

Άρα, $Z \hookrightarrow X$ και προφανώς $Z_i \hookrightarrow Z$, $\forall i \in I$.

$Y \hookrightarrow Z$

(αφού $Y \hookrightarrow Z_i$ $\forall i$)

Ορίζουμε $g: Z \to \mathbb{R}$ με $g(z) = g_i(z)$, όπου $i \in I$ είναι τέτοιο ώστε $\boxed{z \in Z_i}$

Η g είναι καλά ορισμένη.

Πράγματι, $z \in Z$ και $i_1, i_2 \in I$ με το $z \in Z_{i_1}$, $z \in Z_{i_2}$.

Το C είναι αλυσίδα, άρα

ή $(Z_{i_1}, g_{i_1}) \le (Z_{i_2}, g_{i_2})$ ή $(Z_{i_2}, g_{i_2}) \le (Z_{i_1}, g_{i_1})$.

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$g_{i_2}|_{Z_{i_1}} = g_{i_1} \Rightarrow g_{i_1}(z) = g_{i_2}(z) \qquad g_{i_1}|_{Z_{i_2}} = g_{i_2} \Rightarrow g_{i_1}(z) = g_{i_2}(z).$$

$\Rightarrow$ Η τιμή του g είναι ανεξ. από το i $\Rightarrow$ g καλά ορισμένη.

Άσκηση: Δείξτε ότι:

(α) Το g είναι γραμμικό.

(β) Το $g|_Y = f$

(γ) $g(z) \le p(z)$, $\forall z \in Z$.

Άρα, $Z \subseteq X$, $Y \subseteq Z$, $g: Z \to \mathbb{R}$ γραμμική με $g|_Y = f$ και $g(z) \le p(z)$, $\forall z \in Z$ $\Rightarrow$ $(Z, g) \in \mathbb{P}$ και $\forall i \in I$ $(Z_i, g_i) \le (Z, g)$.

Άρα, το (Z, g) είναι άνω φράγμα.

Από λήμμα Zorn $\Rightarrow$ $\exists (M, h)$ μεγιστικό του $\mathbb{P}$.

Αρκεί νδο $M = X$. Έστω όχι.

Δηλαδή $\exists z_0 \in X$ και $z_0 \notin M$. Θέτουμε $M' = \langle M \cup \{z_0\} \rangle$. Από το προηγούμενο λήμμα (της κατά 1-επέκτασης) $\exists \tilde{h}: M' \to \mathbb{R}$ με $\tilde{h}|_M = h$ και $\tilde{h}(x) \le p(x)$, $\forall x \in M'$.

Τότε $(M', \tilde{h}) \in \mathbb{P}$ και $(M, h) \le (M', \tilde{h})$ $\Rightarrow$ (M, h) δεν είναι μεγιστικό. Άτοπο.

#

1/11/2004

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω X τ.δ.χ. και $p: X \to \mathbb{R}$ υπογραμμικό **Τ.Α.Ε.Ι.**

(1) Το p είναι συνεχές

Απόδειξη ⇓ Άσκηση.

(2) Το p είναι συνεχές στο 0.

(3) $\exists\, V \subseteq X$ ανοικτή περιοχή του 0 και $M > 0$ τ.ω. $p(V) \subset (-M, M)$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω X δ.χ. και $K \subset X$. Ένα σημείο $x_0 \in K$ καλείται ***γεωμετρικό εσωτερικό του K*** αν $\forall x \in X$ $\exists\, \varepsilon_x > 0$ τ.ω. $x_0 + tx \in K$, $\forall |t| < \varepsilon_x$.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω X δ.χ. και $K \subseteq X$. Ορίζουμε $p_K : X \to \mathbb{R}$ με

$$p_K(x) = \inf\left\{ \tau > 0 : \frac{x}{\tau} \in K \right\}$$

Το p_K καλείται **συναρτησιακό Minkowski** του K.

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω X δ.χ. και $K \subseteq X$ κυρτό με το $0 \in K$ να είναι γεωμετρικό εσωτερικό του K. Τότε, το p_K είναι καλά ορισμένο υπογραμμικό συναρτησιακό και

$$\{x \in X : p_K(x) < 1\} \subseteq K \subseteq \{x \in X : p_K(x) \leq 1\}.$$

Απόδειξη:

(I) Το p_K καλά ορισμένο.

Έστω $x \in X$.

ν ύπαρξη του των εξασφαλίζα ρόσωπα των πραγματικών αριθμών

(α) Αν $x = 0$, τότε $\left\{\tau > 0 : \frac{0}{\tau} \in K\right\} = \{\tau > 0\} \Rightarrow p_K(0) = 0$.

(β) Αν $x \neq 0$, αφού το 0 γεωμετρικό εσωτερικό του K,

$\Rightarrow \exists\, \varepsilon_x > 0$ τ.ω. $0 + tx \in K$, $\forall |t| < \varepsilon_x \Rightarrow$

$\exists\, \tau > 0$. $\frac{x}{\tau} \in K \Rightarrow \left\{\tau > 0 : \frac{x}{\tau} \in K\right\} \neq \emptyset \Rightarrow$

$\Rightarrow$ το $p_K(x)$ ορίζεται.

(ΙΙ) $\{x\in X : p_k(x) < 1\} \subseteq k$.

Έστω $x\in X$ με $p_k(x)<1 \Rightarrow \inf\{\tau>0 : \frac{x}{\tau}\in k\}\leq 1$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \exists\, 0<\theta<1,\ \frac{x}{\theta}\in k \\ 0\in k \\ 0<\theta<1 \\ K \text{ κυρτό} \end{array}\right\} \Rightarrow (1-\theta)\cdot 0 + \cancel{\theta}\cdot\frac{x}{\cancel{\theta}} \in K \Rightarrow x\in K$$

(ΙΙΙ) $K\subseteq\{x\in X: p_k(x)\leq 1\}$

$x\in k \Rightarrow 1\in\{\tau>0: \frac{x}{\tau}\in k\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \inf\{\tau>0:\frac{x}{\tau}\in k\}\leq 1 \Rightarrow p_k(x)\leq 1$.

(IV) p_k θετικά ομογενές.

Έστω $x\in X$ και $\lambda>0$.

• Αν $x=0 \Rightarrow p_k(\lambda\cdot 0) = 0 = \lambda\cdot p_k(0)$. οκ ✓

• Αν $x\neq 0$: $p_k(\lambda\cdot x) = \inf\{\tau>0 : \frac{\lambda x}{\tau}\in k\} =$

$= \inf\{\tau>0: \frac{x}{\tau/\lambda}\in k\} \xlongequal{\tau'=\tau/\lambda} \inf\{\tau>0 : \frac{x}{\tau'}\in k\} =$

$=\inf\{\lambda\tau'>0 : \frac{x}{\tau'}\in k\} = \lambda\cdot\inf\{\tau'>0 : \frac{x}{\tau'}\in k\} =$

$=\lambda\cdot p_k(x)$

(V) Το p_k υποπροσθετικό.

Έστω $x,y\in X$. Πρέπει νδο $p_k(x+y)\leq p(x)+p_k(y)$

Έστω $\varepsilon>0$ τυχαίο.

Θέτουμε $\tau_1 = p_k(x)$ και $\tau_2 = p_k(y)$

Τότε, $p_k(x) < p_k(x)+\frac{\varepsilon}{2}$, $p_k(y) < p_k(y)+\frac{\varepsilon}{2}$

$p_k(x) < \tau_1+\varepsilon/2$, $p_k(y)<\tau_2+\varepsilon/2$.

$\Rightarrow \exists\,\theta_1$ με $\tau_1\leq\theta_1<\tau_1+\varepsilon/2$ και $\frac{x}{\theta_1}\in K$.

$\Rightarrow \exists\,\theta_2$ με $\tau_2\leq\theta_2<\tau_2+\varepsilon/2$ και $x/\theta_2\in K$

ολπάκι! ☺ $\left(p_K(x) < \tau_1 + \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \frac{1}{\tau_1 + \frac{\varepsilon}{2}} p_K(x) < 1 \Rightarrow \right.$

$\left. \Rightarrow p_K\left(\frac{x}{\tau_1+\frac{\varepsilon}{2}}\right) < 1 \Rightarrow \frac{x}{\tau_1+\frac{\varepsilon}{2}} \in K. \right)$ ← Πλεονασμός των απδ.)

Θέτουμε $\theta = \theta_1 + \theta_2$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{x}{\theta_1} \in K \\ &\frac{x}{\theta_2} \in K \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\theta_1}{\theta} \cdot \frac{x}{\theta_1} + \left(1 - \frac{\theta_1}{\theta}\right)\frac{y}{\theta_2} \in K \Rightarrow \frac{x}{\theta} + \frac{y}{\theta} \in K \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x+y}{\theta} \in K \Rightarrow \theta \in \left\{\tau > 0 : \frac{x+y}{\tau} \in K\right\}$$

$$\Rightarrow p_K(x+y) \leq \theta = \theta_1 + \theta_2 \leq \tau_1 + \tau_2 + \varepsilon =$$

$$= p_K(x) + p_K(y) + \varepsilon.$$

Αφού το ε ήταν τυχαίο $\Rightarrow$

$$p_K(x+y) \leq p_K(x) + p_K(y).$$

#

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω X τ.δ.χ. και $x \in X$. Τότε, η συνάρτηση $f_x : \mathbb{R} \to X$ με $f_x(\lambda) = \lambda x$ είναι συνεχής.

ΔΕΝ ΘΑ ΚΑΝΟΥΜΕ ΑΠΔ.

ΛΗΜΜΑ

Έστω X τ.δ.χ. και $K \subseteq X$ κυρτό με $0 \in Int(K)$. ~~Τότε~~, Τότε το 0 είναι γεωμετρικό εσωτερικό του K.

Απόδειξη:

Έστω $x \in X$ τυχαίο. Η συνάρτηση $f_x : \mathbb{R} \to X$ είναι συνεχής:

$f_x(0) = 0 \in Int(K) \Rightarrow$

$\Rightarrow f_x^{-1}(\text{Int}\,K) \subseteq \mathbb{R}$ ανοικτό με $0 \in f_x^{-1}(\text{Int}\,k)$.

$\Rightarrow \exists \varepsilon_x > 0$ τ.ω. $(-\varepsilon_x, \varepsilon_x) \subseteq f_x^{-1}(\text{Int}\,k)$

$\Rightarrow \forall |t| < \varepsilon_x \quad f_x(t) = t \cdot x \in \text{Int}\,K \subseteq K$.

$\Rightarrow$ Το 0 είναι γεωμετρικό εσωτερικό του K.

\#

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω X τ.δ.χ. και $K \subseteq X$ κυρτό με $0 \in \text{Int}(K)$. Τότε το συναρτησιακό Minkowski p_K ορίζεται και είναι συνεχές

Απόδειξη: → αφού $0 \in \text{Int}(k) \Rightarrow 0$ γεωμ. εσωτ. $\Rightarrow$ ισχύει το Λήμμα

Από το Λήμμα και την Πρόταση το p_K ορίζεται.
Για να είναι συνεχές αρκεί νδο $\exists V \subseteq X$ ανοικτή περιοχή του 0 με $p_K(V)^{(*)}$ φραγμένο:
Πράγματι, αν $V = \text{Int}(k)$ τότε το V είναι ανοικτή περιοχή του 0 και $V = \text{Int}(k) \subset K \subset \{x : p_K(x) \leq 1\}$
$\Rightarrow p_K(V) \subseteq [-1, 1]$ φραγμένο

πως λέγαμε
∃U αν. περ. του 0
M>0 τ.ω.
$p(V) \subset (-M, M)$

\#

X ← ...

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω X τ.δ.χ. και $K \subseteq X$ κυρτό με $0 \in \text{Int}(k)$.
Τότε,

(1) $x \in \text{Int}(k) \Leftrightarrow p_K(x) < 1$.

(2) $x \in \overline{K} \Leftrightarrow p_K(x) \leq 1$.

Απόδειξη:

(1) Θέτουμε $V = \{x : p_K(x) < 1\} = p_K^{-1}((-\infty, 1))$

Το p_K είναι συνεχές $\Rightarrow$ V ανοικτό και $V \subseteq K$ $\Big\} \Rightarrow x \in \text{Int}(k)$

Αντίστροφα,

έστω $x \in Int(K)$ Η συνάρτηση $f_x : \mathbb{R} \to X$ με $f_x(\lambda) = \lambda x$ είναι συνεχής και $f_x(1) = x \in Int(K) \Rightarrow$

$\Rightarrow I = f_x^{-1}(Int(K)) \subseteq \mathbb{R}$ ανοικτό και $1 \in I$

$\Rightarrow \exists \varepsilon_x > 0$ τ.ω. $(1-\varepsilon_x, 1+\varepsilon_x) \subseteq f_x^{-1}(Int(K))$.

$$\underset{\substack{\| \\ \dfrac{x}{\frac{1}{1+\frac{\varepsilon_x}{2}}}}}{\left(1+\frac{\varepsilon_x}{2}\right)x} = f_x\left(1+\frac{\varepsilon_x}{2}\right) \in Int(K) \subseteq K.$$

$$\frac{x}{\frac{1}{1+\frac{\varepsilon_x}{2}}} \in K \Rightarrow p_K(x) \leq \frac{1}{1+\frac{\varepsilon_x}{2}} < 1$$

(2) Πρέπει νδο $x \in \overline{K} \Leftrightarrow p_K(x) \leq 1$.

Θέτουμε $F = \{x : p_K(x) \leq 1\} = p_K^{-1}((-\infty, 1])$

Άρα, αφού η p_K συνεχής, $F \subseteq X$ κλειστό και $F \supseteq K$. Άρα $F \supseteq \overline{K}$

Αρκεί, τώρα, νδο

αν $x \notin \overline{K} \Rightarrow p_K(x) > 1 \Leftrightarrow X \setminus \overline{K} \subseteq \{x : p_K(x) > 1\}$

$\overline{K} \supseteq \{x : p_K(x) \leq 1\}$

Έστω $x \notin \overline{K}$.

Η συνάρτηση $f_x : \mathbb{R} \to X$ με $f_x(\lambda) = \lambda x$ συνεχής.

Άρα, $1 \in I = f_x^{-1}(\underbrace{X \setminus \overline{K}}_{\text{ανοικτό}})$. Αφού f_x συνεχής $\Rightarrow$

$\Rightarrow I \subseteq \mathbb{R}$ ανοικτό $\Rightarrow \exists \varepsilon_x > 0$ τ.ω. $(1-\varepsilon_x, 1+\varepsilon_x) \subset I \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall t \in (1-\varepsilon_x, 1+\varepsilon_x) \quad tx \notin \overline{K} \Rightarrow tx \notin K$.

Ισχυρισμός: Έστω X δ.χ. $K \subseteq X$ κυρτό με $0 \in K$, $x \in X$ και $\lambda > 0$ τ.ω. $\lambda x \notin K$. Τότε, $\forall \mu \geq \lambda \quad \mu x \notin K$.

Απδ.

Έστω όχι. $\Rightarrow \exists \mu \geq \lambda$ με $\mu \cdot x \in K$

$$\left.\begin{array}{r} \mu x \in K \\ 0 \in K \\ 1 > \frac{\lambda}{\mu} > 0 \\ K \text{ κυρτό} \end{array}\right\} \Rightarrow \left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)0 + \frac{\lambda}{\mu}\mu x \in K \Rightarrow \lambda x \in K$$

ΑΤΟΠ

Ξέρουμε ότι $\left(1-\frac{\varepsilon_x}{2}\right).x \notin K$.

Από τον ισχυρισμό ξέρουμε ότι

$$\forall \mu \geq 1-\frac{\varepsilon_x}{2}, \quad \mu x \notin K. \qquad \left(\mu=\frac{1}{s}\right) \Rightarrow \mu \geq 1-\frac{\varepsilon_x}{2} \Rightarrow \alpha s \leq \frac{1}{1-\frac{\varepsilon_x}{2}}$$

$$\xRightarrow{\mu=\frac{1}{s}} \forall 0<s\leq \frac{1}{1-\frac{\varepsilon_x}{2}} \quad \frac{x}{s}\notin K$$

$$\Rightarrow \underset{p_k(x)}{\underset{\shortparallel}{\inf\{t>0 \text{ τ.ω. } \tfrac{x}{t}\in k\}}} \geq \frac{1}{1-\frac{\varepsilon_x}{2}} > 1. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_k(x) > 1.$$

\#

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

Αφού το $p_k(x)$ είναι υπογραμμικό, τα σύνολα $\{x : p_k(x)<1\}$ και $\{x : p_k(x)\leq 1\}$ είναι κυρτά.

Απδ. Πράγματι, $y,z\in\{x : p_k(x)<1]$ και $\lambda\in[0,1]$

Τότε $p_k(\lambda y+(1-\lambda)z) \leq p_k(\lambda y)+p_k((1-\lambda)z) =$

$$= \lambda \underbrace{p_k(y)}_{<1} + (1-\lambda)\underbrace{p_k(z)}_{<2} < \lambda+(1-\lambda)=1$$

*

ΠΟΡΙΣΜΑ

Έστω X τ.δ.χ. και $K\subseteq X$ κυρτό με $Int(K)\neq\emptyset$. Τότε τα σύνολο $\overline{K}$ και $Int(K)$ είναι κυρτά.

Απόδειξη:

Έστω $a\in Int(K)$. Θέτουμε $L=K-a$.

Τότε L κυρτό και $0\in Int(L)$

$$\left(\begin{array}{l} \underbrace{Int\,K}_{\text{ανοιχτό}} - a \subseteq K-a=L \\ \text{ανοιχτό} \Rightarrow Int(K)-a \subseteq Int(L) \\ \qquad \Rightarrow 0\in Int(K)-a \end{array}\right)$$

$Int(K)-a \supseteq Int\,L$ / επίσης $\overset{\text{ανοιχτό}}{Int\,L+a} \subseteq K \Rightarrow$

$Int\,K \supseteq Int\,L+a \Rightarrow Int\,L \subseteq Int\,K-a$

Από προηγούμενη πρόταση,

$Int(K) - a = Int\,L = \{x : p_L(x) < 1\}$ άρα κυρτό

$\boxed{\overline{K} - a = \overline{L}} = \{x : p_L(x) \le 1\}$ άρα κυρτό.

→ άσκηση ότι $\overline{L} = \overline{K} - a$.

Ξέρω ότι $Int(L)$ κυρτό $\Rightarrow$ $Int(K) - a$ κυρτό.

Απδ: Έστω $x, y \in Int(K)$ και $\lambda \in [0,1]$.

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow x - a \in Int(L) \\ \quad y - a \in Int(L) \\ \quad 0 \le \lambda \le 1 \\ \quad Int(L) \text{ κυρτό} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \lambda(x-a) + (1-\lambda)(y-a) \in Int \\ (\lambda x + (1-\lambda)y) - a \in Int(L \\ \Rightarrow (\lambda x + (1-\lambda)y) \in \underset{\overset{\parallel}{Int(K)}}{Int(L)+a} \end{array}$$

$\#$

ΘΕΩΡΗΜΑ

Κάθε δ.χ. έχει Hamel βάση

Σκιαγράφηση απόδειξης:

$\mathbb{P} = \{A \subseteq X : \text{το } A \text{ είναι γραμμ. ανεξ.}\}$

$A \le B \overset{\text{ορ.}}{\Longleftrightarrow} A \subseteq B$

Αν $C = (A_i)_{i \in I}$ αλυσίδα στο $(\mathbb{P}, \le)$

Θέλουμε $B = \bigcup_{i \in I} A_i$ ← γρ. ανεξ. αφού C αλυσίδα.

$\Rightarrow B \in \mathbb{P}$ και $B \supseteq A_i \ \forall i \in I$

$\Rightarrow B \ge A_i \ \forall i \in I$. άνω φράγμα

Λήμμα Zorn $\Rightarrow$ $\exists B \in \mathbb{P}$ μεγιστικό.

Ισχυριζόμαστε ότι $\langle B \rangle = X$.

Πράγματι, αν όχι, $\Rightarrow \langle B \rangle \neq X \Rightarrow \exists x_0 \in X$ τ.ω

$x_0 \notin B$. $\Rightarrow B' = B \cup \{x_0\}$ γρ. ανεξ.

$\Downarrow$ $B' \in \mathbb{P}$ και $B' \supseteq B \Rightarrow$

$B' \ge B$ άτοπο.

$\#$

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω X τ.δ.χ. και $K \subseteq X$ κυρτό με $0 \in \mathrm{Int}(k) \neq \emptyset$.
Τότε $\forall x \in X$ $\quad p_K(x) = p_{\bar{K}}(x) = p_{\mathrm{Int}(k)}(x)$

Απόδειξη:

Παρατηρούμε ότι:

$$\{t>0 : \tfrac{x}{t} \in \mathrm{Int}(k)\} \subseteq \{t>0 : \tfrac{x}{t} \in k\}$$

$$\Rightarrow p_{\mathrm{Int}(k)}(x) \geq p_k(x) \,. \quad (1)$$

Αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\forall s>0 \text{ τ.ω. } p_k(x) < s \Rightarrow p_{\mathrm{Int}(k)}(x) \leq s \,.$$

Έστω, λοιπόν, $s>0$ με $p_k(x) < s \Rightarrow$

$$\frac{1}{s}\, p_k(x) < 1 \Rightarrow p_k\left(\frac{x}{s}\right) < 1 \Rightarrow$$

$$\frac{x}{s} \in \mathrm{Int}(k) \Rightarrow p_{\mathrm{Int}(k)}\left(\frac{x}{s}\right) \leq 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_{\mathrm{Int}(k)}(x) \leq s \,. \qquad \underline{p_{\mathrm{Int}}(x) = p_k(x)}$$

Πάλι παρατηρούμε ότι

$$\{t>0 : \tfrac{x}{t} \in k\} \subseteq \{t>0 : \tfrac{x}{t} \in \bar{k}\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_k(x) \geq p_{\bar{k}}(x) \,.$$

Αρκεί νδο $\forall s>0$ αν $p_{\bar{k}}(x) < s \Rightarrow p_k(x) \leq s$?

Αλλά $p_{\bar{k}}(x) < s \Rightarrow p_k\left(\frac{x}{s}\right) < 1$ $\Big\}$ Ισχυ

ΠΟΡΙΣΜΑ

Έστω X τ.δ.χ. και $K \subseteq X$ κυρτό με $Int(K) \neq \emptyset$. Τότε,

$$\overline{Int(K)} = \overline{K}$$

$$Int(\overline{K}) = Int(K)$$

Απόδειξη: Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $0 \in Int($

$x \in \overline{Int(K)} \Leftrightarrow p_{Int(K)}(x) \leq 1 \Leftrightarrow p_K(x) \leq 1 \Leftrightarrow x \in \overline{K}$.

$x \in Int(\overline{K}) \Leftrightarrow p_{\overline{K}}(x) < 1 \Leftrightarrow p_K(x) < 1 \Leftrightarrow x \in Int(K)$

#

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω X τ.δ.χ. Με X^* συμβολίζουμε το σύνολο όλων των γραμμικών συναρτησιακών $f \in X^{\#}$ τα οποία είναι **συνεχή**.
Ο X^* καλείται **τοπολογικός δυϊκός** του X.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

Είναι σαφές ότι $0 \in X^*$. Ενδέχεται, όμως, $\{0\} = X^*$. Παράδειγμα τέτοιου τ.δ.χ. είναι οι χώροι $L^p(\lambda)$ (λ το μέτρο Lebesgue) για $0 < p < 1$.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω X τ.χ. και $x \in X$. **Βάση περιοχών του X** καλείται μία οικογένεια $B_x = (U_i)_{i \in I}$ από ανοικτά σύνολα, τέτοια ώστε

(1) $x \in U_i$, $i \in I$

(2) $\forall V \subseteq X$ ανοικτό με $x \in V \Rightarrow$
$\exists i \in I$ με $x \in U_i \subseteq V$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

Αν X τ.χ. και $\forall x\in X$ $\mathcal{B}_x$ η βάση περιοχών του x. Τότε, το σύνολο $\mathcal{B}=\bigcup_{x\in X}\mathcal{B}_x=\{U:\exists x\in X, U\in\mathcal{B}_x\}$ είναι **βάση της τοπολογίας**.

Απόδ. Πράγματι, $\bigcup_{U\in\mathcal{B}}U=X$ και $\forall V\subset X$ ανοιχτό και $\forall x\in V$

Αφού $\mathcal{B}\supseteq\mathcal{B}_x\Rightarrow\exists U\subset\mathcal{B}_x\subseteq\mathcal{B}$ με $x\in U\subseteq V$

\#

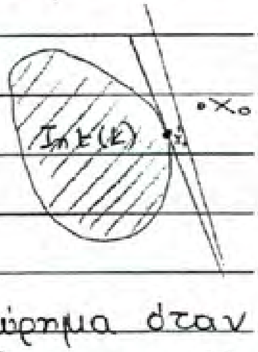
ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω X τ.δ.χ. Ο X καλείται **τοπικά κυρτός** αν το 0 έχει βάση περιοχών που να αποτελείται από κυρτά σύνολα.

ΘΕΩΡΗΜΑ (Θεμελιώδες Διαχωριστικό Θεώρημα)

Έστω X τ.δ.χ. και $K\subseteq X$ κυρτό, $x_0\in X$ με $Int(K)\neq\emptyset$ και $x_0\notin Int(K)$. Τότε,

$$\exists f\in X^* \text{ τ.ω. } \sup_{x\in K}f(x)\leq f(x_0).$$



Απόδειξη:

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $0\in Int(K)$. Πράγματι, έστω ότι ξέραμε το Θεώρημα όταν $Int(L)\ni 0$ και έστω K, x_0 όπως στο Θεώρημα. Επιλέγουμε $z\in Int L$. Θέτουμε $L=K-z_0$, ~~$y_0=x_0-z$~~ $y_0=x_0-z$. Άρα, $\exists f\in X^*$ τ.ω. $\sup_{x\in L}f(x)\leq f(y_0)\Rightarrow$

$$\Rightarrow\sup_{y\in K}f(y-z)\leq f(y_0)\Rightarrow\sup_{x\in K}f(x)\leq f(x_0).$$

Δείχνουμε αν Int με απλή μεταφορά ρούμε- να το κάνουμε.

→

Έστω, λοιπόν, $L \subseteq X$ κυρτό, $x_0 \in X$ με $0 \in Int(L)$ και $x_0 \notin Int(L)$. Το p_L ορίζεται. Θέτουμε $Y = \langle x_0 \rangle = \{\lambda x_0 : \lambda \in \mathbb{R}\}$ και $f : Y \to \mathbb{R}$ με $f(y) = f(\lambda x_0) = \lambda$

Η f είναι προφανώς γραμμική, και $f(y) \leq p_L(y)$, $\forall y \in Y$.

Πράγματι, αν $\lambda = 0$ ✓

Αν $\lambda > 0$, τότε

$$\left.\begin{array}{l} f(\lambda x_0) = \lambda \\ x_0 \notin Int(L) \Rightarrow p_L(x_0) \geq 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(\lambda x_0) = \lambda = \lambda \cdot 1 \leq \lambda \cdot p_L(x_0) = p_L(\lambda x_0) = p_L(y)$$

Από Θ. Hahn-Banach

$\exists \tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ τ.ω. (1) $\tilde{f}$ γραμμικό

(2) $\tilde{f}|_Y = f$

(3) $\tilde{f}(x) \leq p_L(x)$, $\forall x \in X$.

Έχουμε ότι $p_L(x) < 1$, $\forall x \in Int(L)$.

Ισχυριζόμαστε ότι $\forall x \in Int(L)$ $|\tilde{f}(x)| < 1$.

Πράγματι, αν $x \in Int(L) \Rightarrow \tilde{f}(x) \leq p_L(x) < 1$ και

$$\tilde{f}(-x) = -\tilde{f}(x) \geq -p_L(x) > -1$$

$$\Longrightarrow \tilde{f} \in X^*$$

$$\left.\begin{array}{l} (2) \Rightarrow \tilde{f}(x_0) \overset{(\text{αφού } x_0 \in Y)}{=} f(x_0) = 1 \\ (3) \Rightarrow \forall x \in Int(L) \quad \tilde{f}(x) < 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \sup_{x \in Int(L)} \tilde{f}(x) \leq 1 = \tilde{f}(x_0).$$

Αλλά, $(x \in L \Rightarrow p_L(x) \leq 1) \Rightarrow \forall x \in L$

$$\tilde{f}(x) \leq p_L(x) \leq 1 \Rightarrow$$

$$\sup_{x \in L} \tilde{f}(x) \leq 1 = \tilde{f}(x_0).$$

$\not\!\!\times$.

ΘΕΩΡΗΜΑ (1º - διαχωριστικό — "υπό την ευρεία έννοια")

Έστω X τ.δ.χ. $k_1, k_2 \subseteq X$ κυρτά με $Int(k_1) \neq \emptyset$ και $Int(k_1) \cap k_2 = \emptyset$. Τότε, $\exists f \in X^*$ τ.ω.

$$\sup_{x \in k_1} f(x) \leq \inf_{x \in k_2} f(x).$$

Απόδειξη:

Θέτουμε $L = Int(k_1) - k_2 = \{k_1 - k_2 : k_1 \in Int(K_1),\ k_2 \in k_2\}$.

Τότε, (1) Το L κυρτό (ως διαφορά κυρτών).

(2) $0 \notin L$

(3) Το L είναι ανοικτό, γιατί $L = \bigcup_{k_2 \in k_2} Int(k_1) - k_2$ ✓

Από το Θεμελιώδες Διαχωριστικό Θεώρημα $\exists f \in X^*$

$$\sup_{x \in L} f(x) \leq 0 \Rightarrow \sup_{\substack{k_1 \in Int(k_1) \\ k_2 \in K_2}} f(k_1 - k_2) \leq 0$$

$$\Rightarrow \sup_{k_1 \in Int(k_1)} f(k_1) \leq \overset{\overset{c}{\shortparallel}}{\inf_{k_2 \in k_2}} f(k_2)$$

$$Int(k_1) \subset f^{-1}((-\infty, c])$$

Αν θέσουμε $F = f^{-1}((-\infty, c])$ τότε F κλειστό κυρτό και $Int(k_1) \subseteq F. \Rightarrow Int(k_1) \subseteq F.$

$$\therefore K_1 \subseteq \overline{K_1} \subseteq F = \{x : \tilde{f}(x) \leq c\}.$$

$$\Rightarrow \sup_{x \in k_1} f(x) \leq c = \inf_{x \in k_2} f(x).$$

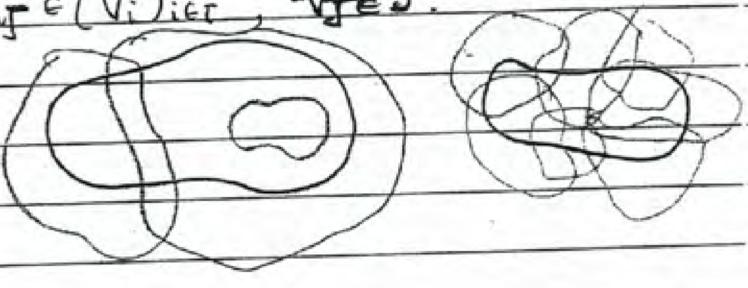
$\divideontimes$.

ΣΥΜΠΑΓΕΙΑ.

Έστω X τ.χ.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω $A \subseteq X$. Ανοιχτό κάλυμμα του A είναι μια οικογένεια $(V_i)_{i\in I}$ από ανοιχτά υποσύνολα του X τ.ω. $A \subseteq \bigcup_{i\in I} V_i$. Αν $(V_i)_{i\in I}$ ανοιχτό κάλυμμα του A, υποκάλυμμα του $(V_i)_{i\in I}$ είναι ένα κάλυμμα του A $(U_j)_{j\in J}$, όπου $U_j \in (V_i)_{i\in I}$, $\forall j \in J$.



ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω X τ.χ. και $K \subseteq X$. Το K καλείται **συμπαγές**, αν κάθε ανοικτό κάλυμμα του A έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα

[Αν $(V_i)_{i\in I}$ ανοιχτό κάλυμμα του K $\Rightarrow \exists i_1,\dots,i_n \in I$ με $K \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} V_{i_k}$]

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

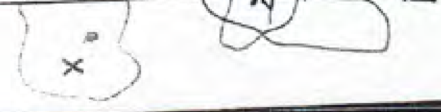
Κάθε πεπερασμένο σύνολο είναι συμπαγές.

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω X Hausdorff τ.χ. και $K \subseteq X$ συμπαγές. Τότε το K είναι κλειστό.

Απόδειξη:

Ισχυρισμός 1: $\forall x \notin K$ $\exists U_x \subseteq X$ ανοιχτό με $x \in U_x$ και $U_x \cap K = \emptyset$



Απόδειξη ισχυρισμού.

$\forall y \in K,\ x \neq y \xrightarrow{\text{Hausdorff}} \exists V_y, \mathcal{U}_y \subseteq X$ ανοιχτά
με $x \in V_y$, $y \in \mathcal{U}_y$ και
$V_y \cap \mathcal{U}_y = \emptyset$

Έστω η οικογένεια $(\mathcal{U}_y)_{y\in K}$ είναι ανοιχτό κάλυμμα του K. Από τη συμπάγεια του K $\exists y_1, \dots, y_n \in K$ τ.ω.
$\mathcal{U}_{y_1} \cup \mathcal{U}_{y_2} \cup \dots \cup \mathcal{U}_{y_n} \supseteq K$.
Θέτουμε $V = \bigcap_{i=1}^{n} V_{y_i} = V_{y_1} \cap V_{y_2} \cap \dots \cap V_{y_n}$

Τότε, $V \subseteq X$ ανοιχτό, $x \in V$ και

$$V \cap K \subseteq V \cap (\mathcal{U}_{y_1} \cup \dots \cup \mathcal{U}_{y_n}) = \bigcup_{i=1}^{n} (V \cap \mathcal{U}_{y_i}) \subseteq$$

$$\subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (V_{y_i} \cap \mathcal{U}_{y_i}) = \emptyset$$

✓

Από τον ισχυρισμό

α.χ. $\forall x \notin K \ \exists V_x \subseteq X$ ανοιχτό με $x \in V_x$ και $V_x \cap K = \emptyset$.
Θέτουμε $\mathcal{U} = \bigcup_{x \notin K} V_x$ ανοιχτό.

$X \setminus K \supseteq \mathcal{U} \supseteq X \setminus K \Rightarrow \mathcal{U} = X \setminus K \Rightarrow K$ κλειστό.

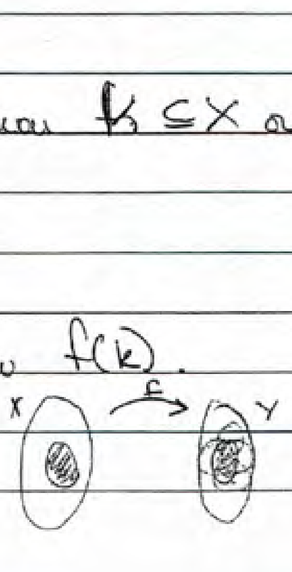
✱

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω X, Y τ.χ., $f: X \to Y$ συνεχής και $K \subseteq X$ συμπαγές.
Τότε $f(K)$ είναι συμπαγές.

Απόδειξη:

Έστω $(\mathcal{U}_i)_{i\in I}$ ανοιχτό κάλυμμα του $f(K)$.
Η οικογένεια $(f^{-1}(\mathcal{U}_i))_{i\in I}$ είναι ανοικτό κάλυμμα του K.



Από τη συμπάγεια του K, $\exists\, f^{-1}(U_{i_1}) \dots f^{-1}(U_{i_n})$ πεπερασμένο υποκάλυμμα του K.

Ισχυριζόμαστε ότι $U_{i_1}, U_{i_2}, \dots, U_{i_n}$ είναι ανοιχτό υποκάλυμμα του $f(K)$.

Πράγματι,

$$K \subset \bigcup_{k=1}^{n} f^{-1}(U_{i_k}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(K) \subseteq f\left(\bigcup_{k=1}^{n} f^{-1}(U_{i_k})\right) \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} f\left(f^{-1}(U_{i_k})\right) \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} U_{i_k}$$

$\Rightarrow$ το $f(K)$ είναι συμπαγές

*

(*) Η ακόλουθη απόδειξη είναι ΕΚΤΟΣ ΥΛΗΣ.

Οι χώροι $L^p(0,1)$ για $0<p<1$ δεν είναι τοπικά κυρτοί. Για την ακρίβεια, τα μόνα ανοιχτά κυρτά είναι οι ίδιοι οι χώροι. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα $L^p(0,1)^* = \{0\}$.

$L^p(0,1) = \{ f:(0,1)\to\mathbb{R}$ Lebesgue ολοκληρώσιμες τ.ε. $\int |f|^p\, d\lambda < +\infty \}$.

$\rho(f,g) = \int |f-g|^p\, d\lambda$ μετρική.

Ο $(L^p(0,1), \rho)$ είναι πλήρης μετρικός και $\forall\, f,g,h \in L^p$ $\rho(f,g) = \rho(f+h, g+h)$.

Απόδ. Έστω $V \subseteq L^p(0,1)$ ανοιχτό, κυρτό, μη κενό.

Χ.β.γ. υποθέτουμε ότι $0 \in V$. $\Rightarrow \exists\, r>0$

$B(0,r) = \{ g \in L^p : \rho(0,g) < r \} \subseteq V$.

Θα δείξουμε ότι $V = L^p(0,1)$.

Έστω $f \in L^p(0,1)$ τυχαία συνάρτηση.

Ορίζουμε $\Delta(f) = \rho(0,f) = \int |f|^p\, d\lambda$.

Αφού $p<1$ $\exists n \in \mathbb{N}$ $n^{p-1} \Delta(f) < r$

Αν $f \in L^p(0,1)$ η συνάρτηση $h: (0,1) \to \mathbb{R}$ με

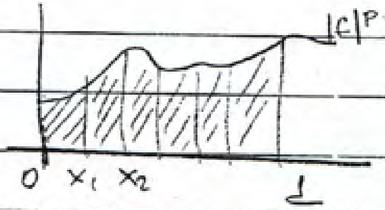
$h(x) = \int_0^x |f|^p d\lambda$ είναι συνεχής.

$\exists\ 0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = 1$

τ.ω. $\int_{x_i}^{x_{i+1}} |f|^p d\lambda = \frac{\Delta(f)}{n}$ $\forall i \in \{0, \dots, n-1\}$.

$\forall i = \{0, \dots, n-1\}$ θέτουμε

$$g_i = n \cdot f \cdot \chi_{[x_i, x_{i+1})}$$



Τότε, $f = \frac{g_0 + g_2 + \dots + g_{n-1}}{n}$

Αν δείξουμε ότι $\Delta(g_i) < r \Rightarrow g_i \in V$, $\forall i$.

Τότε, $f \in V$.

$\Delta(g_i) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} n^p |f|^p d\lambda = n^p \int_{x_i}^{x_{i+1}} |f|^p d\lambda = n^p \frac{\Delta f}{n} = n^{p-1} \Delta f < r$

8|11|2004

ΛΗΜΜΑ

Έστω X τ.κ.τ.δ.χ. και $W \subseteq X$ ανοικτή περιοχή του 0. Τότε $\exists V \subseteq X$ ανοικτή κυρτή, συμμετρική $(-V=V)$ περιοχή του 0 τέτοια ώστε $V+V \subseteq W$.

Απόδειξη

Αφού $0+0 \in W$ από τη συνέχεια της "+" και το γεγονός ότι ο X είναι τοπικά κυρτός $\exists\, V_1, V_2 \subset X$ ανοικτές περιοχές του 0 κυρτές τ.ω. $V_1+V_2 \subset W$.

Θέτουμε $V = V_1 \cap V_2 \cap (-V_1) \cap (-V_2)$

#

ΛΗΜΜΑ

Έστω X και W όπως στο προηγούμενο λήμμα. Τότε $\exists V$ ανοικτή κυρτή συμμετρική περιοχή του 0

$V+V+V+V \subseteq W$

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω X τ.κ.τ.δ.χ. και $K \subseteq X$ συμπαγές, $F \subseteq X$ κλειστό με $K \cap F = \emptyset$. Τότε $\exists V \subseteq X$ ανοικτή κυρτή συμμετρική περιοχή του 0 τ.ω. $(K+V) \cap F = \emptyset$

Απόδειξη:

Έστω $x \in K$ τυχαίο.

Αφού $K \cap F - \emptyset \Rightarrow x \in \overset{\omega}{\overline{X \setminus F}} \Rightarrow \exists W_x \subseteq X$ ανοικτή περιοχή του 0 τ.ω. $x + W_x \cap F = \emptyset$.

Από το λήμμα $\exists V_x \subseteq X$ ανοικτή κυρτή συμμετρική περιοχή του 0 τ.ω. $V_x + V_x + V_x + V_x \subseteq W_x$

Η οικογένεια $(x+V_x)_{x \in K}$ είναι ανοικτό κάλυμμα του K.

Αφού το K συμπαγές $\Rightarrow \exists x_1, \dots, x_n \in K$ τ.ω.

$$\bigcup_{i=1}^{n} x_i + V_{x_i} \supseteq K$$

Θέλουμε $V = \bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i}$. Τότε, V ανοικτή κυρτή συμμετρική περιοχή του 0.

Ισχύει ότι $(K+V)\cap F=\emptyset$.

Πράγματι,

$$K+V \subseteq \left(\bigcup_{i=1}^{n} x_i+V_{x_i}\right)+V = \bigcup_{i=1}^{n}\left(x_i+V_{x_i}+V\right) \subseteq$$

$$\subseteq \bigcup_{i=1}^{n}\left(x_i+V_{x_i}+V_{x_i}\right)$$

Για κάθε $i=1,\dots,n$ έχουμε [redacted] ότι

$$x_i+V_{x_i}+V_{x_i} \subseteq x_i+V_{x_i}+V_{x_i}+V_{x_i}+V_{x_i} \subseteq x_i+W_{x_i}$$

αφού $(x_i+W_{x_i})\cap F=\emptyset \Longrightarrow$

$$(x_i+V_{x_i}+V_{x_i})\cap F=\emptyset$$

Άρα $(K+V)\cap F=\emptyset$.

#

ΑΣΚΗΣΗ

Αν X τοπικά κυρτός τδχ., $K\subseteq X$ συμπαγές, $F\subseteq X$ κλειστό. Δείξτε ότι το σύνολο $K-F$ είναι κλειστό.

ΘΕΟΡΗΜΑ (2ο Διαχωριστικό Θεώρημα)

Έστω X τ.κ. τ.δ.χ., $K \subseteq X$ συμπαγές κυρτό, $F \subseteq X$ κλειστό κυρτό με $K \cap F = \emptyset$. Τότε, υπάρχει $f \in X^*$ τ.ω. $\sup\limits_{x\in K} f(x) < \inf\limits_{x \in F} f(x)$

Απόδειξη:

Από την Πρόταση $\exists V \subseteq X$ ανοικτή κυρτή συμμετρική περιοχή του 0 τ.ω. $K+V \cap F = \emptyset$. Θέτουμε $U = K+V$. Τότε,

$$\left.\begin{array}{l} (1)\quad U = \bigcup\limits_{x\in K} x+V \text{ ανοικτό} \\ (2)\quad U \text{ κυρτό (ως άθροισμα κυρτών)} \\ (3)\quad U \cap F = \emptyset. \end{array}\right\} \xRightarrow{1^{ο} \text{ Διαχ. Θεωρ.}}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \exists f \in X^* \\ f \neq 0 \end{array}\right\} \text{ τέτοιο ώστε } \sup_{x \in U} f(x) \leq \inf_{y\in F} f(y).$$

Το σύνολο $f(K)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}$, άρα $\sup\{f(x) : k \in K\} = \max\{f(k) : k \in K\} = c_0$.

Άρα, $\exists k_0 \in K$ τ.ω. $c_0 = f(k_0) \geq \sup\{f(x) : k \in K\}$.

Επιπλέον, $\exists z \in V$ τ.ω. $f(z) > 0$.

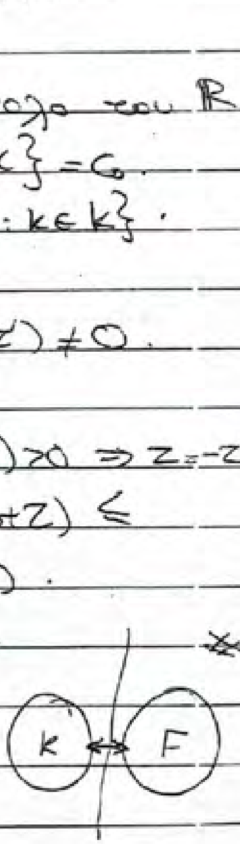
Πράγματι, αφού $f \neq 0$, $\exists z' \in V$ με $f(z') \neq 0$.

Αν $f(z') > 0 \Rightarrow z = z'$

Αν $f(z') < 0 \Rightarrow -z' \in V$ συμμετρική $\Rightarrow f(-z') > 0 \Rightarrow z = -z'$

Άρα, $\sup\limits_{x\in K} f(x) \leq f(k_0) < f(k_0) + f(z) = f(k_0+z) \leq$

$$\leq \sup_{x\in K+V} f(x) \leq \inf_{y \in F} f(y).$$



ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Αν X δ.χ και $\|\cdot\|$ νόρμα στον X, τότε η $d_{\|\cdot\|} : X \times X \to \mathbb{R}$ με $d_{\|\cdot\|}(x,y) = \|x-y\|$ είναι μετρική και ο $(X, d_{\|\cdot\|})$ είναι μετρικός χώρος.
Αν ο $(X, d_{\|\cdot\|})$ είναι ΠΛΗΡΗΣ, τότε ο X καλείται χώρος Banach.

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω X, Y χώροι με νόρμα και $T : X \to Y$ γραμμικός.
Τ.Α.Ε.Ι.

(1) Το T είναι συνεχές.

(2) Το T είναι συνεχές στο 0.

(3) $\exists M > 0$ τ.ω. $\|Tx\|_Y \leq M \cdot \|x\|_X$, $\forall x \in X$.

απόδειξη → εύκολη.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω X, Y χώροι με νόρμα. Θέτουμε

$$\mathcal{L}(X,Y) = \{T : X \to Y, \text{ γραμμικός}\}$$

και $$\mathcal{B}(X,Y) = \{T : X \to Y, \text{ γραμμικός κ' φραγμένος}\}.$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Ο $\mathcal{B}(X,Y)$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathcal{L}(X,Y)$.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Ορίζουμε $\|\cdot\| : \mathcal{B}(X,Y) \to \mathbb{R}$ με

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\|_Y : \|x\|_X \leq 1\}$$

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω X, Y χώροι με νόρμα. Τότε:

(1) Η $\|\cdot\|$ είναι νόρμα στον $\mathcal{B}(X,Y)$.

(2) $\|T\| = \inf\{M > 0 : \|Tx\|_Y \leq M \cdot \|x\|_X, \forall x \in X\}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν X χώρος με νόρμα και Y χώρος Banach, τότε ο $B(X,Y)$ είναι χώρος Banach.

Απόδειξη:

Θέλω νδο Αν κάθε ακολουθία Cauchy (για τη μετρική που επάγει η νόρμα) είναι και συγκλίνουσα.

Έστω, λοιπόν, $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία Cauchy.

Άρα, $\forall \varepsilon>0 \; \exists n_0\in\mathbb{N} \; \forall n,m\geq n_0 \; \|T_n-T_m\|<\varepsilon$ (1)

Έστω $x\in X$ τυχαίο. Τότε,

$$\|T_n x - T_m x\| = \|(T_n-T_m)(x)\| \leq \|T_n-T_m\|\cdot\|x\| \quad (2)$$

Άρα, (1),(2) $\Rightarrow$ η ακολουθία $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy

Αφού ο Y είναι χώρος Banach $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ η $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα και έστω Tx το όριό της.

Ορίζουμε $T: X\to Y$, $T(x)=\lim\limits_{n\to\infty} T_n(x)$ ← κατά σημείο όχι ομοιόμορφη σύγκλιση.

Ισχυριζόμαστε ότι ο T είναι γραμμικός.

Πράγματι, έστω $x_1,x_2\in X$, $\lambda,\mu\in\mathbb{K}$ τότε,

$$T(\lambda x_1+\mu x_2) = \lim_{n\to\infty} T_n(\lambda x_1+\mu x_2) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}(\lambda T_n(x_1)+\mu T_n(x_2)) =$$

$$= \lambda\lim_{n\to\infty} T_n(x_1) + \mu\lim_{n\to\infty} T_n(x_2) = \lambda T(x_1)+\mu T(x_2).$$

$\Rightarrow$ T γραμμικός.

Για τυχαίο $\varepsilon>0$ $\exists n_0\in\mathbb{N}$ τω $\forall n,m\geq n_0$ και

προκύπτει από (1),(2) ↪ $\forall x\in X$ $\|T_n x - T_m x\| \leq \varepsilon\cdot\|x\|$. (3)

Για $m\to\infty$ η (3) δίνει

$$\|T_n x - Tx\| = \|(T_n-T)(x)\| \leq \varepsilon\cdot\|x\| \; (4), \; \forall x\in X, \; \forall n\geq n_0$$

$\Rightarrow$ ο $T_n - T \in B(X,Y)$ και

Άρα, $$\left.\begin{array}{l} -T_n+T \in \mathcal{B}(X,Y) \\ T_n \in \mathcal{B}(X,Y) \end{array}\right\} \Rightarrow T=(-T_n+T)+T_n \in \mathcal{B}(X,Y)$$

Αρκεί νδο $T_n \xrightarrow{\|\cdot\|} T$

Δηλαδή, $\forall \varepsilon>0 \ \exists n_0, \ \forall n \geq n_0 \ \|T_n-T\| \leq \varepsilon \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sup\{\|T_n x - Tx\| : \|x\| \leq 1\}$.

Από την (#) αν $\|x\| \leq 1 \Rightarrow \|T_n x - Tx\| \leq \varepsilon, \ \forall \|x\| \leq 1$

$\Rightarrow \|T_n - T\| \leq \varepsilon, \ \forall n \geq n_0$.

Άρα, $T_n \xrightarrow{\|\cdot\|} T$. #

ΠΟΡΙΣΜΑ

Έστω X χώρος με νόρμα. Τότε ο X^* είναι χώρος Banach.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

Αν X χώρος με νόρμα και $f \in X^*$, τότε

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| : \|x\| \leq 1\}$$

ΠΡΟΤΑΣΗ:

Έστω X χώρος με νόρμα και $x_0 \in X$. Τότε,
$\exists f \in X^*$, $\|f\| = 1$ και $f(x_0) = \|x_0\|$.

Απόδειξη:

Έστω $x_0 \in X$. Θέτουμε $Y = \langle x_0 \rangle = \{\lambda x_0 : \lambda \in \mathbb{R}\}$

Ορίζουμε $f : Y \to \mathbb{R}$ με $f(y) = f(\lambda x_0) = \lambda \cdot \|x_0\|$.

Τότε, f γραμμική και $\forall y \in Y$ $|f(y)| = |\lambda \|x_0\|| = |\lambda| \|x_0\| =$
$= \| |\lambda| x_0 \| = \|y\|$.

Από Θ. Hahn-Banach

$\exists \tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ γραμμικό με (1) $\tilde{f}|_Y = f$

(2) $|\tilde{f}(x)| \leq \|x\|, \ \forall x \in X$.

(1) $\Rightarrow \tilde{f}(x_0) = f(x_0) = \|x_0\|$.

(2) $\Rightarrow \|\tilde{f}\| = \sup\{|\tilde{f}(x)| : \|x\| \leq 1\} \leq 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \tilde{f} \in X^*$ και $\tilde{f}(x_0) = \|x_0\| \Rightarrow$

$\Rightarrow \tilde{f}\left(\frac{x_0}{\|x_0\|}\right) = 1$

Αφού $\left\|\frac{x_0}{\|x_0\|}\right\| = \frac{\|x_0\|}{\|x_0\|} = 1$ $\Big\} \Rightarrow \|\tilde{f}\| \geq 1$.

$\Rightarrow \|\tilde{f}\| = 1$ και $\tilde{f}(x_0) = \|x_0\|$.

⁂

ΠΟΡΙΣΜΑ

Έστω X χώρος Banach και $x \in X$. Τότε,

$$\|x\| = \sup\{|f(x)| : \|f\| \leq 1\} = \max\{|f(x)| : \|f\| \leq 1\}.$$

Απόδειξη:

Έστω $f \in X^*$, $\|f\| \leq 1$. Τότε $|f(x)| \leq \|f\| \cdot \|x\| \leq \|x\|$.

$\Rightarrow \sup\{|f(x)| : \|f\| \leq 1\} \leq \|x\|$.

Η αντίστροφη ανισότητα προκύπτει από την προηγούμενη πρόταση.

και

⁂

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω X χώρος Banach, $Y \subset X$ κλειστός υπόχωρος του X και $x_0 \notin Y$. Τότε $\exists f \in X^*$ $\|f\| = 1$, τ.ω. $f(x_0) = d(x_0, Y) = \inf\{\|y - x_0\| : y \in Y\}$.

Απόδειξη:

Έστω $Z = \langle Y \cup \{x_0\} \rangle = \{y + \lambda x_0 : y \in Y, \lambda \in \mathbb{R}\}$

Ορίζουμε $f : Z \to \mathbb{R}$ με $f(z) = f(y + \lambda x_0) = \lambda \cdot d$,

όπου $d = d(x_0, Y)$.

Τότε f γραμμικό και $\forall z \in Z$

$$\|z\| = \|y+\lambda x_0\| = \|(-\lambda)(\tfrac{y}{-\lambda} - x_0)\| =$$
$$= |\lambda| \cdot \|\tfrac{y}{-\lambda} - x_0\| \geqslant |\lambda| \cdot d = |f(y+\lambda x_0)| = |f(z)|$$

Άρα, από Θ. Hahn-Banach $\exists \tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ γραμμική τ.ω.

(1) $\tilde{f}|_Z = f$.

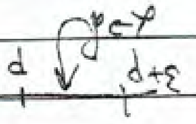
(2) $|\tilde{f}(x)| \leq \|x\|$, $\forall x \in X$.

$$\Rightarrow \boxed{\|\tilde{f}\| \leq 1}$$

Από (1) $\Rightarrow \tilde{f}(x_0) = f(x_0) = d = d(x_0, Y)$.

Επιλέγουμε $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στοιχείων του Y τ.ω. $\|y_n - x_0\| \to d$ καθώς $n \to +\infty$.

(Από τον ορισμό του infimum προκύπτει:
$\{\|y-x_0\| : y \in Y\} \cap [d, d+\varepsilon)$ $\exists y \in Y$



$d \leq \|y - x_0\| < d+\varepsilon$.

Τότε $d = |\tilde{f}(y_n - x_0)| = |\tilde{f}(y_n - x_0)| \leq \|\tilde{f}\| \cdot \|y_n - x_0\|$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Για $n \to \infty$

$$d \leq \|\tilde{f}\| \cdot d \Rightarrow \boxed{\|\tilde{f}\| \geq 1}$$

$\to \underline{\|\tilde{f}\| = 1}$ και $\tilde{f}(x_0) = d(x_0, Y)$.

✗

12/11/2004

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω X, Y χώρος με νόρμα και $T: X \to Y$ γραμμικός.

(1) Ο T καλείται "**ισομορφισμός**" αν ο T είναι "1-1", "επί" και $\|T\|, \|T^{-1}\| < \infty$. Στην περίπτωση αυτή οι X, Y καλούνται ισομορφικοί $(X \cong Y)$.

(2) Αν ο T ισομορφισμός και $\forall x \in X$ $\|x\|_X = \|Tx\|_Y$, τότε ο T καλείται "**ισομετρία**". Στην περίπτωση αυτή οι X, Y καλούνται ισομετρικοί $(X = Y)$.

(3) Αν T στο (2) όχι επί ο T καλείται **ισομετρική εμφύτευση**.

π.χ. $I: \ell_1 \to c_0$, $x \in \ell_1$ $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1$

I: γραμμική, συνεχής

Άσκηση

Η ισομετρική εμφύτευση ενός χώρου Banach σε ένα άλλο χώρο Banach είναι πάντα κλειστή.

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω X χώρος Banach.

Τότε, η απεικόνιση $\hat{} : X \to X^{**}$ που ορίζεται ως

$$x \in X \to \hat{x} \in X^{**}$$

με $\hat{x}(x^*) = x^*(x)$, $\forall x^* \in X^*$ είναι καλά ορισμένη και ισομετρική εμφύτευση.

Απόδειξη:

Το $\hat{x} : X^* \to \mathbb{R}$ είναι γραμμικό.

$$\hat{x}(\lambda x^* + \mu y^*) = (\lambda x^* + \mu y^*)(x) = \lambda x^*(x) + \mu y^*(x) =$$
$$= \lambda \hat{x}(x^*) + \mu \hat{x}(y^*).$$

και

$$\|\hat{x}\|_{X^{**}} = \sup\{|\hat{x}(x^*)| : \|x^*\|_{X^*} \leq 1\} =$$

$$= \sup\{|x^*(x)| : \|x^*\|_{X^*} \leq 1\} \overset{\text{Θ. H-B}}{=\!=} \|x\|_X$$

Άρα, $\|\hat{x}\|_{X^{**}} < +\infty \Rightarrow \hat{x} \in X^{**}$

Ο $\wedge$ είναι γραμμικός, δηλαδή

$$\widehat{(\lambda x+\mu y)} = \lambda\hat{x} + \mu\hat{y}$$

$$\widehat{(\lambda x+\mu y)}(x^*) = x^*(\lambda x+\mu y) = \lambda x^*(x) + \mu x^*(y) =$$

$$= \lambda\hat{x}(x^*) + \mu\hat{y}(x^*), \quad \forall x^* \in X^*.$$

Για νδο $\wedge$ είναι "1-1", αρκεί νδο

$\forall x,y \in X$ με $x \neq y$ $\exists x^* \in X^*$ με $\hat{x}(x^*) \neq \hat{y}(x^*)$

$\Leftrightarrow x^*(x) \neq x^*(y)$

$$\hat{x} = \hat{y} \Rightarrow \hat{x} - \hat{y} = 0 \Leftrightarrow \|\hat{x} - \hat{y}\| = 0 \Rightarrow \|\widehat{x-y}\| = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|(x-y)\| = 0 \Rightarrow x = y$$

$\divideontimes$

Άσκηση

Δείξτε ότι αν X χώρος Banach, τότε τα στοιχεία του X^* διαχωρίζουν τα σημεία του X.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Η $\wedge$ της προηγούμενης πρότασης καλείται η **κανονική εμφύτευση** του X στον X^{**}.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω X τοπολογικός χώρος και $A \subset X$.

- Το A καλείται **πυκνό** αν $\overline{A} = X$
- Ο X καλείται **διαχωρίσιμος** αν $\exists A \subseteq X$ αριθμήσιμο και πυκνό
- Ο X καλείται **πρώτος αριθμήσιμος** αν $\forall x \in X$ το x έχει αριθμήσιμη βάση περιοχών του x.
- Ο X καλείται **δεύτερος αριθμήσιμος** αν ο X έχει αριθμήσιμη βάση.

Μετρικός Χώρος $\Rightarrow$ Πρώτος Αριθμήσιμος (X μετρικός $\Rightarrow$ διαχ.)

Δεύτερος Αριθμήσιμος $\Rightarrow$ Πυκνός (X μετρικός τότε διαχωρίσιμος $\Updownarrow$ 2ος αριθμήσιμος).

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω X χώρος Banach τ.ω. ο X^* είναι διαχωρίσιμος. Τότε και ο X είναι διαχωρίσιμος.

Απόδειξη:

Αφού X^* διαχωρίσιμος η σφαίρα $S_{X^*} = \{x^* \in X^* : \|x^*\| = 1\}$ είναι διαχωρίσιμος.

Έστω $(x_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$ αριθμήσιμο πυκνό στη S_{X^*}, δηλαδή

(*) $\forall x^* \in X^*$ με $\|x^*\| = 1$ και $\forall \varepsilon > 0$ $\exists k \in \mathbb{N}$ ώστε $\|x^* - x_k^*\| < \varepsilon$

$\forall n \in \mathbb{N}$ επιλέγουμε $x_n \in X$ με $\|x_n\| \leq 1$ τ.ω. $x_n^*(x_n) > \frac{1}{2}$

Έστω $Y = \overline{\langle (x_n)_n \rangle}$. Ο Y κλειστός υπόχωρος του X και διαχωρίσιμος γιατί το σύνολο $\langle (x_n) \rangle_{\mathbb{Q}} = \{\sum_{n \in F} q_n x_n : q_n \in \mathbb{Q}$, $F \subseteq \mathbb{N}$ πεπερασμένο$\}$ είναι αριθμήσιμο και πυκνό στον X.

Ισχυριζόμαστε ότι $Y = X$.

Έστω $\delta < 1$, άρα $\exists x_0 \in X$ με $x_0 \notin Y$. Θέτουμε $d = d(x_0, Y)$

Από πόρισμα H-B $\exists x^* \in X^*$, $\|x^*\| = 1$ τ.ω.

$$x^*(y) = 0, \ \forall y \in Y \quad , \quad x^*(x_0) = d .$$

$$\Downarrow$$

$$x^*(x_n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Τότε, $\|x^* - x_n^*\| = \sup\{|(x^* - x_n^*)(x)| : \|x\| \leq 1\} =$

$= \sup\{|x^*(x) - x_n^*(x)| : \|x\| \leq 1\} \geq$

$\geq |x^*(x_n) - x_n^*(x_n)| \geq |0 - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Άτοπο, από την (*) #

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Αν (X, ρ) μετρικός χώρος και $A \subset X$, τότε

A πυκνό $\Leftrightarrow \forall x \in X, \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists y \in A$ τ.ω. $\rho(x, y) < \varepsilon$.

ΘΕΩΡΗΜΑ (Cantor)

Ένας μετρικός χώρος (X, ρ) είναι πλήρης αν και μόνο αν $\forall (F_n)_n$ με $F_n \subseteq X$ $\forall n$ κλειστά με $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \ldots \supseteq F_n \supseteq F_{n+1} \supseteq \ldots$ φθίνουσα και $\rho\text{-diam} F_n = \sup\{\rho(x,y) : x, y \in F_n\} \to 0$

$\Rightarrow \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n = \{x_0\}$ με $x_0 \in X$.

ΛΗΜΜΑ (BAIRE)

Έστω (X,ρ) πλήρης μετρικός χώρος και $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία από ανοικτά και πυκνά υποσύνολα του X. Τότε το $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{U}_n$ είναι πυκνό υποσύνολο του X.

Απόδειξη

Αρκεί νδο $\forall V \subseteq X$ ανοικτό το $V \cap \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{U}_n\right) \neq \emptyset$.

Έστω $V \subseteq X$ ανοικτό τυχαίο.

Αφού $\mathcal{U}_1$ ανοικτό και πυκνό $\Rightarrow W_1 = V \cap \mathcal{U}_1 \neq \emptyset$ κ' ανοικτ

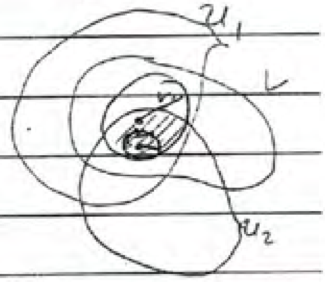
Υπάρχει $x_1 \in W_1$ και $\frac{1}{2} > r_1 > 0$ ώστε $\overline{B(x_1, r_1)} \subseteq W_1$.

Αφού $\mathcal{U}_2$ ανοικτό και πυκνό $\Rightarrow$

$\Rightarrow W_2 = B(x_1, r_1) \cap \mathcal{U}_2 \neq \emptyset$ και ανοικτό

Υπάρχει $x_2 \in W_2$ και $0 < r_2 < \frac{1}{2^2}$, $r_2 < r_1$ με

$\overline{B(x_2, r_2)} \subseteq W_2$



Επαγωγικά κατασκευάζουμε $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ και $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ τέτοια ώστε

(1) Η r_n φθίνουσα και $r_n < \frac{1}{2^n} \to 0$

(2) $\left(\overline{B(x_n, r_n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα.

(3) $\overline{B(x_n, r_n)} \subseteq W_n = \mathcal{U}_n \cap B(x_{n-1}, r_{n-1}) \subseteq \mathcal{U}_i$, $\forall i = 1, \dots, n$

(4) $\overline{B(x_n, r_n)} \subseteq V$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Από (1), (2) και το Θ. Cantor $\Rightarrow \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{B(x_n, r_n)} = \{x_0\}$

Από (4) $\Rightarrow x_0 \in V$

Από (3) $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_0 \in \mathcal{U}_i$ $\forall i \in \{1, \dots, n\} \Rightarrow x_0 \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{U}_n$

Άρα $x_0 \in V \cap \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{U}_n\right) \neq \emptyset$.

⁂

19/11/2004

ΘΕΩΡΗΜΑ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΟΥ ΦΡΑΓΜΑΤΟΣ (Banach-Steinhauss)

Απόδειξη
↓
Άσκηση

Πόρισμα:

Έστω (X,d) πλήρης μετρικός χώρος και $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία από κλειστά υποσύνολα του (X,d) τ.ω. $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n = X$.
Τότε υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ με $Int(F_{n_0}) \neq \emptyset$

ΘΕΩΡΗΜΑ Banach-Steinhauss

Έστω X, Y χώρος Banach και $(T_i)_{i\in J}$ οικογένεια από γραμμικούς και φραγμένους τελεστές από το X στο Y (δηλ. $\forall i\in J$ $T_i : X\to Y$) Υποθέτουμε ότι $\forall x\in X$ $\sup\|T_i(x)\|_Y < +\infty$.
Τότε, $\sup_{i\in J}\|T_i\| < +\infty$.

Απόδειξη:

$\forall n\in\mathbb{N}$ ορίζουμε $F_n = \{x\in X : \sup_{i\in J}\|T_i(x)\| \le n\}$.
Από υπόθεση $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n = X$.
Θδο $\forall n\in\mathbb{N}$ το F_n είναι κλειστό. ~~και~~ Έστω $(x_m)_m$ ακολουθία με $x_m\in F_n$ $\forall m\in\mathbb{N}$ και $x_m \longrightarrow x$.
Αρκεί νδο $x\in F_n$.
$x_m\in F_n \Rightarrow \sup_{i\in J}\|T_i(x_m)\| \le n$. Έστω $i\in J$ τυχαίο:

$$\|T_i(x)\| = \|T_i(x-x_m+x_m)\| \le \|T_i\|\cdot\|x-x_m\| + \|T_i(x_m)\| \le$$
$$\le \|T_i\|\cdot\|x-x_m\| + n$$

Για $m\to\infty$

$$\|T_i(x)\| \le n$$

Αφού $i\in J$ τυχαίο $\sup_{i\in J}\|T_i(x)\| \le n \Rightarrow x\in F_n$.
Άρα, F_n κλειστό.
Από λήμμα Baire (Πόρισμα) $\exists n_0$ τ.ω. $\exists x_0\in X$ και $r>0$ ώστε
$x_0 + rB(0,1) = B(x_0,r) \subseteq Int(F_{n_0}) \subseteq F_{n_0}$.

Άρα, $\forall w \in \overline{B(0,1)}$

$$\|T_i(x_0+rw)\| \leq n_0 \quad \forall i \in I \Rightarrow$$

$$r\|T_i(w)\|-\|T_i(x_0)\| \leq \|T_i(x_0) + r\,T_i(w)\| \leq n_0, \quad \forall i\in I,\ \forall w \in \overline{B(0,1)}$$

$$\Rightarrow \|T_i(w)\| \leq \frac{n_0 + \|T_i(x_0)\|}{r} \leq \frac{2n_0}{r}, \quad \forall i \in I,\ \forall w \in \overline{B(0,1)}$$

$$\Rightarrow \|T_i\| \leq \frac{2n_0}{r}, \quad \forall i \in I$$

$$\Rightarrow \sup_{i\in I} \|T_i\| \leq \frac{2n_0}{r} < +\infty$$

✱

Πόρισμα

Έστω X, Y χώροι Banach και $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία από γραμμικούς και φραγμένους τελεστές. Υποθέτουμε ότι $\forall x\in X$ η $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει. Ορίζουμε $T: X\to Y$ με $T(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x)$. Τότε,

① Ο T είναι γραμμικός.
② Ο T είναι φραγμένος.
③ $\|T\| \leq \liminf \|T_n\|$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:
a_n ακολουθία, $\beta_k = \inf_{n\geq k} a_n$.
$\liminf a_n = \sup_k \inf_{n\geq k} a_n$.

Απόδειξη:

① Ο T προφανώς γραμμικός.

② Αφού η $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνουσα $\forall x\in X \Rightarrow$
$\Rightarrow \forall x\in X \ \sup_{n\in\mathbb{N}}\|T_n(x)\| < +\infty$.

$\overset{\Theta.\alpha.\varphi}{\Longrightarrow}$ $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| = c < +\infty$.

Έστω $x \in \overline{B(0,1)}$.

$$\|T_n x\| \le \|T_n\| \cdot \|x\| \le c \cdot \|x\| \quad , \forall n \in \mathbb{N}. \quad (*)$$

Για $n \to \infty$.

$$\|Tx\| \le c \cdot \|x\| \quad , \forall x \in \overline{B(0,1)}$$

Άρα ο τελεστής είναι φραγμένος.

Άσκηση: $(a_n)_n$, $(\beta_n)_n$ ακολουθίες, με $a_n \le \beta_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ και $a_n \to a$.
Τότε, $a \le \liminf \beta_n$ (υπάρχει υπακολουθία που συγκλίνει ~~[illegible]~~ $\beta_{n_k} \to \liminf \beta_n$ επειδή είναι ακραίο σημείο.
οπότε $a_{n_k} \le \beta_{n_k} \to \liminf$

Επιπλέον από (*) για $n \to \infty$:

$$\|Tx\| \le \left(\liminf \|T_n\|\right) \cdot \|x\| \quad , \forall x \in \overline{B(0,1)}$$

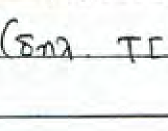
$$\Rightarrow \|T\| \le \liminf \|T_n\| .$$

⁂

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω X, Y τ.χ. και $f : X \to Y$. Η f καλείται ανοικτή αν $\forall \mathcal{U} \subseteq X$ ανοικτό το $f(\mathcal{U})$ είναι ανοικτή στον Y.

Π.χ.



← επί συνεχής, αλλά όχι ανοικτή!!! ⇒ επειδή δεν είναι γραμμική.

ΘΕΩΡΗΜΑ (Ανοικτής Απεικόνισης)

Έστω X, Y χώροι Banach και $T : X \to Y$ συνεχής, γραμμική και επί (δηλ. $T[X] = Y$). Τότε η T είναι ανοικτή.

/

Η εικόνα κάθε ανοικτού έχει μη κενό εσωτερικό

λέει ότι..

Απόδειξη :

(ΒΗΜΑ 1º) Έστω $T : X \to Y$ γραμμικός τ.ω. $\exists c > 0$ με $T[\overset{\in X}{B_X(0,1)}] \underset{(*)}{\supseteq} \overset{\in Y}{B_Y(0,c)}$.
Τότε η T είναι ανοικτή.

Απόδειξη

Έστω $\mathcal{U} \subset X$ $\overset{\text{ανοικτό}}{\text{τυχαίο}}$. Θέλω νδο $T[\mathcal{U}]$ ανοικτό.
Έστω $y \in T[\mathcal{U}]$ τυχαίο και επιλέγω $x \in \mathcal{U}$ με $Tx = y$.
$x \in \mathcal{U} \Rightarrow \exists r > 0$ τ.ω. $B(x,r) \subseteq \mathcal{U}$. $\Rightarrow$

$$T[x + rB(0,1)] = T[B(x,r)] \subseteq T[\mathcal{U}]$$

$$\|$$

$$Tx + rT[B(0,1)] \supseteq Tx + rB_Y(0,1)$$

Αλλά, $Tx + rB_Y(0,c) = y + B_Y(0,rc) = B(y,rc) \subseteq T[\mathcal{U}]$

$\Rightarrow T[\mathcal{U}]$ ανοικτό και επειδή $\mathcal{U}$ τυχαίο $\Rightarrow T$ ανοικτή

(ΒΗΜΑ 2º) Αν $T : X \to Y$ γραμμική - φραγμένη και $\overline{T[B_X(0,1)]} \supseteq B(0,2c)$ (1)
τότε $T[B_X(0,1)] \supseteq B(0,c)$ (2)

Απόδειξη:

Για $n \in \mathbb{N}$, πολλαπλασιάζουμε την (1) με $\frac{1}{2^n}$.

$$\Rightarrow \overline{T[B(0,1/2^n)]} \supseteq B_Y(0, \tfrac{c}{2^{n-1}}) \quad ③$$

Άρα, $\forall n \in \mathbb{N}$ και $\forall y \in Y$ με $\|y\| < \frac{c}{2^{n-1}}$, $\forall \varepsilon > 0$
$\exists z \in X$ $\|z\| < \frac{1}{2^n}$ τ.ω. $\|y - Tz\| < \varepsilon$ ④

Θέλουμε να δείξουμε την (2). Έστω, λοιπόν, $y_0 \in Y$
με $\|y_0\| < c$.

Από (4) για $n = 1$, $y = y_0$, $\varepsilon = \frac{c}{2}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists z_1$ με $\|z_1\| < \frac{1}{2}$ και $\|y_0 - Tz_1\| < \frac{c}{2}$.

Θέτω $w_1 = y - Tz_1$.

Από (4) για $n=2$, $y = w_1$, $\varepsilon = \frac{c}{2^2} \Rightarrow \exists z_2$ $\|z_2\| < \frac{1}{2^2}$ και $\|w_1 - Tz_2\| < \frac{c}{2^2} \Rightarrow \|y_0 - Tz_1 - Tz_2\| < \frac{c}{2^2} \Rightarrow$

$$\|y_0 - T(z_1 + z_2)\| < \frac{c}{2^2}$$

Επαγωγικά κατασκευάζουμε $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον X, τ.ω.

(α) $\|z_n\| < \frac{1}{2^n}$.

(β) $\|y_0 - T(z_1 + z_2 + \dots + z_n)\| < \frac{c}{2^n}$

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε $x_n = \sum_{i=1}^{n} z_i$ (δηλ. $x_1 = z_1$, $x_2 = z_1 + z_2$, $x_3 = z_1 + z_2 + z_3$ κτλ)

Ισχυρίζομαι ότι η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy.

Πράγματι έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\sum_{i=n_0}^{+\infty} \frac{1}{2^i} < \varepsilon$

Τότε, $\forall n > m \geq n_0$

$$\|x_n - x_m\| = \left\| \sum_{i=m+1}^{n} z_i \right\| \leq \sum_{i=m+1}^{n} \|z_i\| \overset{(\alpha)}{\leq} \sum_{i=m+1}^{n} \frac{1}{2^i} \leq \sum_{i=n_0}^{\infty} \frac{1}{2^i} <$$

Άρα, η x_n είναι Cauchy.

Αφού X χώρος Banach $x_n \longrightarrow x$ στο X.

$$\|x\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n\| \leq \lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{i=1}^{n} z_n \right\| \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \|z_i\| < 1.$$

Άρα, $x \in B(0,1)$.

Από (β) $\|y_0 - Tx_n\| < \frac{c}{2^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

$$x_n \to x \xrightarrow{T \text{ φραγμένος}} Tx_n \to Tx$$

Άρα, από παραπάνω για $n \to \infty$, $\|y_0 - Tx\| = 0 \Rightarrow$

$y_0 = Tx$.

Δείξαμε, δηλαδή, ότι $T[B_X(0,1)] \supseteq B_Y(0,c)$.

Βήμα 3ο) Αν $T: X \to Y$ γραμμικός, φραγμένος και <u>επί</u>, τότε $\exists c>0$ ώστε

$$\overline{T[B_X(0,1)]} \supseteq B_Y(0,2c).$$

<u>Απόδειξη:</u>

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε $F_n = \overline{T[B_X(0,n)]}$.

Προφανώς κάθε F_n κλειστό και $F_n \supseteq T[B_X(0,n)]$.

Αλλά, αφού T επί ο $Y = \bigcup_n T[B_X(0,n)] \subseteq \bigcup_n F_n \subseteq Y$.

δηλαδή $Y = \bigcup_n F_n$.

Από λήμμα Baire $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ με $Int(F_{n_0}) \neq \emptyset$.

Δηλαδή $\exists y \in Y$ $\exists r>0$

$$y + B(0,r) = B(y,r) \subset \overline{T[B_X(0,n_0)]} \quad (**)$$

Το $B_X(0,n_0)$ κυρτό συμμετρικό, ο T γραμμικός

$\Longrightarrow$ $T[B_X(0,n_0)]$ κυρτό συμμετρικό

$\Longrightarrow$ $\overline{T[B(0,n_0)]}$ κυρτό συμμετρικό.

$\xRightarrow{(**)}$ $-y \in \overline{T[B_X(0,n_0)]}$ $(***)$

Από $(**)$ και $(***)$ προσθέτοντας κατά μέρη έχουμε

$$B_Y(0,r) \subset \overline{T[B_X(0,n_0)]} + \overline{T[B_X(0,n_0)]} =$$
$$= \overline{T[B_X(0,2n_0)]} = 2n_0 \cdot \overline{T[B_X(0,1)]}$$

$$\Longrightarrow B_Y\left(0,\frac{r}{2n_0}\right) \subseteq \overline{T[B_X(0,1)]}$$

Θέτουμε $c = \frac{r}{4n_0}$ $\Longrightarrow$ $B_Y(0,2c) \subseteq \overline{T[B_X(0,1)]}$

$A+B = \{\alpha+\beta : \alpha \in A \wedge \beta \in B\}$

$T[B_X(0,1)] + T[B_X(0,1)] = \{y_1+y_2 : y_1,y_2 \in T[B(0,1)]\} = \{Tx_1+Tx_2 : x_1,x_2 \in B(0,1)\} \overset{?}{=}$ ✗

$= \{T(x_1+x_2) : x_1,x_2 \in B(0,1)\} = \{T(x) : x \in B(0,2)\} = T[B(0,2)]$

→ Το ίδιο ισχύει και σε κλειστότητες

22/11/2004

ΠΡΟΤΑΣΗ

Αν p υπογραμμική και συνεχές στο 0 ⇒ p συνεχές.

Απόδειξη

Έστω $x\in X$ και $\varepsilon>0$.

Αρκεί νδο $\exists W\subseteq X$ ανοικτή περιοχή του 0 τ.ω.

$p(x+W)\subseteq(p(x)-\varepsilon,\ p(x)+\varepsilon)$.

Αφού p συνεχές στο 0 $\Rightarrow \exists V\subseteq X$ ανοικτή περιοχή του 0 τ.ω. $p(V)\subset(-\varepsilon,\varepsilon)$.

Θέτουμε $W=V\cap(-V)$. Αυτό είναι το ζητούμενο W.

Πράγματι, $\forall w\in W$ $\quad p(x+W)\le p(x)+p(W)<p(x)+\varepsilon$.

Επιπλέον $\quad p(x)\le p(x+W)+p(-W)\Rightarrow p(x)-p(-W)\le p(x+W)$

W συμμετρική, άρα $-w\in W$, $-p(-w)>-\varepsilon$

$\Rightarrow p(x)-\varepsilon<p(x+W)$

ΠΡΟΤΑΣΗ

• Αν X, Y χώροι Banach και $T:X\to Y$ συνεχής κ' γραμμική, τότε $\underbrace{\overline{T[B_X(0,1)]}+\overline{T[B_X(0,1)]}}_{A}=\overline{T[B_X(0,2)]}$ (*)

Απόδειξη:

Έστω $z\in A\Rightarrow \exists z_1,z_2\in\overline{T[B_X(0,1)]}$ με $z=z_1+z_2$.

$z_1\in\overline{T[B_X(0,1)]}\Rightarrow\exists(x_n)_n$ με $\|x_n\|<1$ τ.ω. $Tx_n\to z_1$

$z_2\in\overline{T[B_X(0,1)]}\Rightarrow\exists(y_n)_n$ με $\|y_n\|<1$ τ.ω. $Ty_n\to z_2$.

Θέτουμε $w_n=x_n+y_n$, $\|w_n\|<2$ και

$Tw_n=T(x_n+y_n)=Tx_n+Ty_n\to z_1+z_2=z\Rightarrow z\in\overline{T[B_X(0,2)]}$

Αντίστροφα, $w\in\overline{T[B_X(0,2)]}\Rightarrow\exists(x_n)_n$ με $\|x_n\|<2$ και $Tx_n\to w$

Θέτουμε $y_n=\frac{x_n}{2}$

Τότε, $\|y_n\|<1$ και $Ty_n=T\frac{x_n}{2}=\frac{1}{2}Tx_n\to\frac{w}{2}\in\overline{T[B_X(0,1)]}$

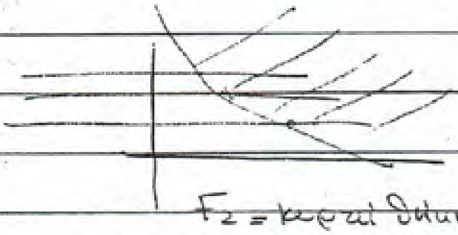
$\|y_n\|<1$ —"— —"— —"—

Αθροίζοντας προκύπτει ο ζητούμενος εγκλεισμός.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

(*) Η σχέση ΔΕΝ ισχύει πάντα, δηλαδή εν γένει (ακόμη και στον $\mathbb{R}^2$) το άθροισμα δύο κυρτών κλειστών δεν είναι κλειστό.

Π.χ.



F_1 = ο άξονας των x

F_2 = κυρτή θήκη σημείων

Το άθροισμά τους δεν είναι κλειστό.

*

ΠΟΡΙΣΜΑ

Έστω X, Y χώροι Banach και $T: X \to Y$, 1-1, επί, γραμμική και συνεχής. Τότε ο T είναι ισομορφισμός.

Απόδειξη:

Από Θ. Ανοικτής Απεικόνισης ο T είναι ανοικτή συνάρτηση.
Αρκεί νδο ο $T^{-1}: Y \to X$ είναι συνεχής.
Έστω $U \subseteq X$ ανοικτό
Τότε, $(T^{-1})^{-1}(U) = T(U)$ ανοικτό, γιατί ο T είναι ανοικτή συνάρτηση

#

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω X δ.χ. και $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ νόρμες στον X. Θα λέμε ότι οι $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ είναι ισοδύναμες αν $\exists c_1, c_2 > 0$ τ.ω.

$$c_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2\|x\|_1 \quad , \forall x \in X$$

Παρατήρηση:

Αν ο X είναι πεπερασμένης διάστασης, τότε, οποιεσδήποτε νόρμες στον X είναι ισοδύναμες. (Άσκηση)
Αυτό ΔΕΝ ισχύει σε άπειρη διάσταση.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Έστω X δ.χ. και $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ νόρμες στον X με τις οποίες ο X είναι χώρος Banach. Υποθέτουμε ότι $\exists c>0$ τ.ω.

$$\|x\|_2 \leq c\|x\|_1, \ \forall x\in X.$$

Τότε οι $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ είναι ισοδύναμες

Απόδειξη:

Θεωρούμε τον ταυτοτικό τελεστή $I:(X,\|\cdot\|_1)\to(X,\|\cdot\|_2)$ ⊛

Τότε ο I γραμμικός, 1-1, επί και από υπόθεση έχουμε ότι I είναι φραγμένος.

Άρα, από προηγούμενο πόρισμα $\Rightarrow$ I ισομορφισμός $\Rightarrow$ I^{-1} φραγμένος.

Δηλαδή $\exists c_2>0$ τ.ω. $\|x\|_1 \leq c_2\|x\|_2 \Rightarrow \frac{1}{c_2}\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c\|x$ $\forall x\in X$

Άρα, οι $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ είναι ισοδύναμες.

#

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

Στο παραπάνω Πόρισμα πρέπει ο X να είναι χώρος Banach και με τις δύο νόρμες.

Αντιπαράδειγμα:

$X = C[0,1]$

$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,dt$ και $\|f\|_\infty = \sup\{|f(t)| : t\in[0,1]\}$.

Ο $(X,\|\cdot\|_\infty)$ είναι χώρος Banach και $\|f\|_1 \leq \|f\|_\infty$, $\forall f\in C[0,$

⊛ $T:X\to Y$ φραγμένος $\Rightarrow \|Tx\|_Y \leq c\|x\|_X, \ \forall x\in X$

εδώ $I:X\to Y$ φραγμένος $\Longrightarrow \|x\|_2 \leq c\cdot\|x\|_1, \ \forall x\in X$

Αλλά οι νόρμες δεν είναι ισοδύναμες. Ο βασικός λόγος είναι ότι ο $(C[0,1], \|\cdot\|_1)$ δεν είναι χώρος Banach.

Π.Χ. Η ακολουθία $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι $\|\cdot\|_1$ Cauchy αλλά όχι συγκλίνουσα

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω X,Y σύνολα και $f: X \to Y$ συνάρτηση. Το γράφημα της f είναι το σύνολο:

$$Grf = \{(x,y) : y = f(x)\} \subset X \times Y.$$

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω X,Y τοπολογικοί χώροι με Y Hausdorff και $f: X \to Y$ συνεχής.
Τότε το Grf είναι κλειστό.

Απόδειξη:

Έστω $(x_0,y_0) \notin Grf \Rightarrow y_0 \neq f(x_0) \Rightarrow \exists\, U_1, U_2 \subset Y$ ανοικτά με $y_0 \in U_1$, $f(x_0) \in U_2$ και $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.
Αφού f συνεχής, το σύνολο $V = f^{-1}(U_2)$ ανοικτό και $x_0 \in V$.
Το σύνολο $W = V \times U_1$ ανοικτό, $(x_0,y_0) \in W$ και $W \cap GrF = \emptyset$.
Πράγματι, $(z,h) \in W \Rightarrow z \in V, h \in U_1 \Rightarrow f(z) \in U_2, h \in U_1$
$\Rightarrow h \neq f(z) \Rightarrow (z,h) \notin Grf$.
Άρα, το συμπλήρωμα του Grf είναι ανοικτό.
$\Longrightarrow$ το Grf είναι κλειστό.

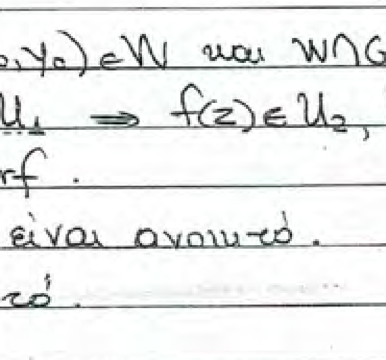
*

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

Το αντίστροφο της παραπάνω πρότασης εν γένει δεν ισχύει.

π.χ. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} 1/x, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$.

Το γράφημα Grf είναι κλειστό αλλά η f δεν είναι συνεχής.



ΘΕΩΡΗΜΑ (Κλειστού Γραφήματος)

Έστω X, Y χώροι Banach και $T: X \to Y$ γραμμική. Αν GrT κλειστό, τότε ο T συνεχής.

Απόδειξη:

Θεωρούμε στον X τη "νόρμα γραφήματος" $|||\cdot|||$, με $|||x||| = \|x\|_X + \|Tx\|_Y$.

Προφανώς $|||x||| \geq \|x\|$, $\forall x \in X$

Αν οι $|||\cdot|||$ και $\|\cdot\|$ ήταν ισοδύναμες, τότε $\exists c>0$ τ.ω. $c \cdot |||x||| \leq \|x\|, \forall x \in X \Rightarrow \|Tx\|_Y + \|x\|_X \leq \frac{1}{c}\|x\|, \forall x \in X$.

$\Rightarrow \|Tx\|_Y \leq \left(\frac{1}{c} - 1\right)\|x\|, \forall x \Rightarrow$ ο T είναι συνεχής.

Από το προηγούμενο πόρισμα αρκεί ν.δ.ο. ο $(X, |||\cdot|||)$ είναι χώρος Banach.

Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $|||\cdot|||$-Cauchy.

Τότε, $(Tx_n)_n$ είναι $\|\cdot\|_Y$-Cauchy, $(x_n)_n$ είναι $\|\cdot\|_X$-Cauchy $\Rightarrow$

$\Rightarrow x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_X} x$, $Tx_n \xrightarrow{\|\cdot\|_Y} y$

Επιπλέον, $\underset{(x,y)}{\underset{\downarrow}{(x_n, Tx_n)}} \in GrT$, $\forall n \in \mathbb{N}$ και GrT κλειστό $\Bigg\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Άρα, $(x,y) \in GrT \Rightarrow y = Tx$ και τελικά έχουμε ότι $x_n \xrightarrow{|||\cdot|||} x$. (Άσκηση)

ΛΗΜΜΑ

Έστω X δ.χ. και $f_1, \dots, f_n, g$ γραμμικές από τον X στον $\mathbb{R}$.

Τ.Α.Ε.Ι.:

(1) $\bigcap_{i=1}^{n} \ker f_i \subseteq \ker g$

(2) $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ τ.ω. $g = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i$

Απόδειξη

(2) ⇒ (1) :

Αν $x \in \bigcap_{i=1}^{n} \ker f_i \Rightarrow f_i(x)=0,\ \forall i \Rightarrow g(x)=0 \Rightarrow x \in \ker g$.

$\quad \hookrightarrow g(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(x)$.

(1) ⇒ (2).

Θεωρούμε $\pi : X \to \mathbb{R}$ με $\pi(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$.

Η π είναι γραμμική ⇒ $\pi[X]$ γραμμικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$.

Ορίζουμε $f : \pi[X] \to \mathbb{R}$ με $f(\pi(x)) = g(x)$.

Ισχυριζόμαστε ότι η f καλά ορισμένη.

Πράγματι

έστω $x_1, x_2 \in X$ με $\pi(x_1) = \pi(x_2) \Rightarrow \pi(x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow$

$(f_1(x_1-x_2), f_2(x_1-x_2), \dots, f_n(x_1-x_2)) = 0 \Rightarrow$

$f_i(x_1-x_2) = 0,\ \forall i \in \{1, \dots, n\} \Rightarrow x_1 - x_2 \in \bigcap_{i=1}^{n} \ker f_i \subseteq \ker g$

$\Rightarrow g(x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow g(x_1) = g(x_2)$ (δεν εξαρτάται από αυτό).

Η f γραμμική ⇒ $\exists \tilde{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με $\tilde{f}|_{\pi[X]} = f$

Θέτουμε $\lambda_i = \tilde{f}(e_i)$, όπου $e_i = (0, \dots, 0, \underset{\uparrow i\text{-θέση}}{1}, 0, \dots, 0)$.

Τότε $\forall x \in X$

$$g(x) = f(\pi(x)) = \tilde{f}(\pi(x)) = \tilde{f}(f_1(x), \dots, f_n(x)) = \tilde{f}\Big(\sum_{i=1}^{n} f_i(x) \cdot e_i\Big) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} f_i(x) \cdot \tilde{f}(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(x).$$

⌀

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω X δ.χ. και $\Gamma \subseteq X^{\#}$ που διαχωρίζει τα σημεία του X.
(δηλ. $\forall x \in X$ $\exists f \in \Gamma$ με $f(x) \neq f(y)$).

Θεωρούμε τον X με την (X, Γ) ← (η ελάχιστη τοπολογία που κάνει μια οικογένεια συναρτήσεων συνεχή)

Τότε :

(1) Η βάση του (X,Γ) αποτελείται από τα σύνολα
$W(x,A,\varepsilon) = \{y : |f(y) - f(x)| < \varepsilon, \forall f \in A\}$ με $x \in X$,
$A \subseteq \Gamma$ πεπερασμένο και $\varepsilon > 0$

(2) Ο (X,Γ) είναι τδχ.

(3) Ο (X,Γ) είναι Hausdorff, τοπικά κυρτός

(4) $(X,\Gamma)^* = <\Gamma>$.

Απόδειξη:

(1) έχει ήδη αποδειχθεί.

(2) Θα δείξουμε ότι η ("+") είναι αμφισυνεχής.
Έστω $x,y \in X$ και $W(x+y, A, \varepsilon)$ βάση περιοχών του $x+y$, όπου $A \subseteq \Gamma$ πεπερασμένο και $\varepsilon > 0$.
Θέτουμε $W_1 = W(x,A,\varepsilon/2)$ και $W_2 = W(y,A,\varepsilon/2)$.
Τότε $x \in W_1$, $y \in W_2$, τα W_1, W_2 είναι (X,Γ)-ανοικτά και $W_1 + W_2 \subset W(x+y, A, \varepsilon)$.
Πράγματι,

$$\left.\begin{array}{l} z_1 \in W_1 = W(x,A,\varepsilon/2) \\ z_2 \in W_2 = W(y,A,\varepsilon/2) \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{l} |f(z_1) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall f \in A \\ |f(z_2) - f(y)| < \varepsilon/2 \end{array}\right| \Rightarrow$$

$\Rightarrow |f(z_1+z_2) - f(x+y)| < \varepsilon$, $\forall f \in A \Rightarrow$
$z_1 + z_2 \in W(x+y, A, \varepsilon)$.

Ανάλογα, ο η ("·") είναι συνεχής. (Άσκηση)

(3) Ο (X,Γ) είναι Hausdorff, αφού το Γ διαχωρίζει σημεία.
Ο (X,Γ) είναι τοπικά κυρτός, γιατί βάση περιοχών του 0 είναι τα σύνολα $W(0,A,\varepsilon)$ με $A \subseteq \Gamma$ πεπερασμένο, $\varepsilon > 0$, τα οποία εύκολα διαπιστώνουμε ότι είναι κυρτά.

(4) Κάθε $f \in \Gamma$ είναι προφανώς (X,Γ)-συνεχής.
Άρα, και κάθε πεπερασμένος γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του Γ είναι (X,Γ)-συνεχής $\Rightarrow \boxed{<\Gamma> \subseteq (X,\Gamma)^*}$.

Αντίστροφα, έστω $g \in (X,\Gamma)^*$.

Άρα, το g είναι φραγμένο $\Rightarrow$

$\exists A = \{f_1, \dots, f_n\} \subseteq \Gamma$ πεπερασμένο και $\varepsilon > 0$ ώστε το $g(W(0,A,\varepsilon))$ να είναι φραγμένο.

Ισχυριζόμαστε ότι $\bigcap_{i=1}^{n} \ker f_i \subseteq \ker g$.

Έστω όχι $\Rightarrow$

$\exists z \in \bigcap_{i=1}^{n} \ker f_i$ με $g(z) \neq 0$.

Χ.β.γ. έστω $g(z) > 0$. Τότε $z \in W(0,A,\varepsilon)$ και $\lambda z \in W(0,A,\varepsilon)$, $\forall \lambda > 0$, $(f_i(\lambda z) = 0, \forall i)$.

Ξέρουμε ότι,

$g(W(0,A,\varepsilon)) \subseteq (-M,M)$ (άρα g φραγμένο).

Θέτουμε $\lambda_0 = \frac{2M}{g(z)} > 0$.

Τότε $\lambda_0 z \in W(0,A,\varepsilon)$ και $g(\lambda_0 z) = \lambda_0 \cdot g(z) = 2M$.

Άτοπο

Από το προηγούμενο λήμμα

$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ με $g = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i \Rightarrow g \in \langle \Gamma \rangle$.

//

26/11/2004.

Η Ασθενής Τοπολογία ενός χώρου Banach

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω X χώρος Banach. Η (X,X^*) ονομάζεται η ασθενής τοπολογία του X. Δηλαδή η ασθενής τοπολογία είναι η ελάχιστη τοπολογία στον X που κάνει τα στοιχεία του X^* συνεχή.

ΠΡΟΤΑΣΗ

Ο X με την ασθενή τοπολογία είναι Hausdorff τοπικά κυρτός τ.δ.χ.

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω X απειροδιάστατος χώρος Banach. Τότε ο X με την ασθενή τοπολογία ΔΕΝ είναι μετρικοποιήσιμος.

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω X απειροδιάστατος χώρος Banach. Τότε, η Hamel βάση του X δεν είναι αριθμήσιμη.

Απόδειξη:

Έστω ότι και έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ αριθμήσιμη Hamel βάση του X. $\forall k\in\mathbb{N}$ ορίζουμε $Y_k = \langle x_1, \dots, x_k \rangle$.
Ο Y_k είναι πεπερασμένης διάστασης υπόχωρος του X, κλειστός.

(**Άσκηση:**
Δείξτε ότι $\forall X$ χώρο Banach και $\forall F$ υπόχωρο του X πεπερασμένης διάστασης ο F είναι κλειστός.)

Ισχυριζόμαστε ότι $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} Y_k = X$.

Πράγματι,
έστω $x_0 \in X$.
Αφού $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Hamel βάση $\Rightarrow$
$\exists!\, x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_\ell}$ και $a_1, \dots, a_\ell$ ώστε $x_0 = \sum_{i=1}^{\ell} a_i x_{n_i}$.
Θέτουμε $k_0 = \max\{n_1, \dots, n_\ell\} \Rightarrow x_0 \in Y_{k_0}$.

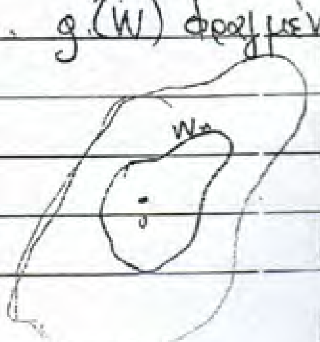
Από το Λήμμα Baire $\Rightarrow$
$\exists k \in \mathbb{N} \quad \exists x \in X \quad \exists r > 0$ τ.ω. $B(x,r) \subseteq Y_k \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} Y_k \text{ υπόχωρος} \quad B(0,r) \subseteq Y_k \\ \Rightarrow \forall \lambda > 0 \quad \underset{X}{\underset{\shortparallel}{B(0,\lambda r)}} \subseteq Y_k \end{array}\right\} \Rightarrow X \text{ πεπερασμένης διάστασης.}$$

Άτοπο.

*.

Απόδειξη (προηγούμενης πρότασης).
Έστω πως $\exists X$ απειροδιάστατος χώρος Banach τέτοιος ώστε η ασθενής τοπολογία να είναι μετρικοποιήσιμη.
Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει βάση περιοχών του 0 αριθμήσιμη.
Έστω $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Κάθε $W_n = W_n(0, A_n, \varepsilon_n) = \{y : |f(y)| < \varepsilon_n, \forall f \in A_n\}$
όπου $A_n \subseteq X^*$ πεπερασμένο και $\varepsilon_n > 0$.
Θέτουμε $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Τότε A αριθμήσιμο.
Ισχυρισμός: $\langle A \rangle = X^*$
Προφανώς $\langle A \rangle \subseteq X^*$
Αν έστω $g \in X^*$. Τότε g ασθενώς συνεχές.
$\Rightarrow \exists W$ ασθενής περιοχή του 0 τ.ω. $g(W)$ φραγμέν
Άρα, $\exists n \in \mathbb{N}$ τ.ω. $g(W_n)$ φραγμένο.
$(W_n(0, A_n, \varepsilon_n))$
Έστω $A_n = \{f_1, \dots, f_k\}$
Άσκηση: $\bigcap_{i=1}^{k} \ker f_i \subseteq \ker g$



Από γνωστό λήμμα $\Rightarrow \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_k$ ώστε

$$g = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i \Rightarrow g \in \langle A \rangle .$$

Άρα, $X^* \subseteq \langle A \rangle \Rightarrow X^* = \langle A \rangle \Rightarrow$
$\Rightarrow X^*$ έχει αριθμήσιμη Hamel βάση.

ΑΤΟΠΟ, γιατί
X απειροδιάστατος

\#

ΘΕΩΡΗΜΑ (Mazur)

Έστω X χώρος Banach και $C \subseteq X$ κλειστό και κυρτό. Τότε το C ασθενώς κλειστό.

Απόδειξη:

Έστω όχι και θέτουμε $C' = \overline{C}^{\overset{weak}{(w)}}$. Τότε $C \subsetneq C'$.
Δηλαδή $\exists x_0 \in C'$ και $x_0 \notin C$.
Τότε, $\{x_0\}, C$ κυρτά με $\{x_0\}$ συμπαγές, C κλειστό και $\{x_0\} \cap C = \emptyset$

Από το διαχωριστικό για τη νορμ τοπολογία
$\exists f \in X^*$ τ.ω. $\sup\limits_{x \in C} f(x) < r < f(x_0)$.
Θέτουμε $F = f^{-1}((-\infty, r])$. Τότε F ασθενώς κλειστό, γιατί f ασθενώς συνεχής και F κυρτό, και $C \subseteq F \Rightarrow$
$\Rightarrow \overline{C}^{w} \subseteq F$
$x_0 \notin F$
$x_0 \in \overline{C}^{w}$ Άτοπο.

\#

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

Από Θ. Mazur $\Rightarrow B_X = \{x : \|x\| \leq 1\}$ είναι ασθενώς κλειστό.

Παράδειγμα:

Αν X απειροδιάστατος χώρος Banach, τότε
$$\overline{S_X}^w = \overline{\{x : \|x\| = 1\}}^w = \overline{B_X}.$$

Μια τυπική ασθενής περιοχή του 0 είναι της μορφής:
$$W(0, A, \varepsilon) = \{y : |f(y)| < \varepsilon,\ \forall f \in A\}.$$
$A = \{f\}$
Αν $y \in \ker f$.
$\{f_1, \dots, f_k\}$ $\quad y \in \bigcap_{i=1}^{k} \ker f_i$

Απόδειξη:

Αφού $\overline{B_X}$ ασθενώς κλειστό (ως κλειστό, κυρτό) και
$\overline{B_X} \supseteq S_X \Rightarrow \overline{B_X} \supseteq \overline{S_X}^w$
Αν $\overline{S_X}^w \subsetneq \overline{B_X} \Rightarrow \exists x_0 \in \overline{B_X}$ με $x_0 \notin \overline{S_X}^w \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists \|x_0\| < 1$ και $x_0 \notin \overline{S_X}$.
Θέτουμε $W = X \setminus \overline{S_X}^w$
Τότε, (1) W ασθενώς ανοικτό
(2) $x_0 \in W$
(3) $W \cap S_X = \emptyset$
Για νδο $\overline{S_X}^w = \overline{B_X}$ αρκεί νδο
(*) $\forall x_0 \in X$ με $\|x_0\| < 1$ και $\forall W$ ασθενή περιοχή του x_0, τότε $W \cap S_X \neq \emptyset$.

Έστω $\|x_0\| < 1$ και $W \subseteq X$ ασθενής περιοχή του x_0, τυχαία.
Υποθέτουμε ότι η W είναι βασική, δηλαδή
$W(x_0, A, \varepsilon)$ με $A = \{f_1, \dots, f_k\} \subseteq X^*$ πεπερασμένο και $\varepsilon > 0$.
Θέτουμε $Y = \bigcap_{i=1}^{k} \ker f_i$

Θ.δ.ο. $Y \neq \{0\}$.
Πράγματι, αν $Y = \{0\}$ ορίζουμε $\Phi : X \to \mathbb{R}^k$

με $\Phi(x) = (f_1(x), \dots, f_k(x))$

Αφού $Y = \{0\} \Rightarrow \Phi$ 1-1, (επί) και γραμμική

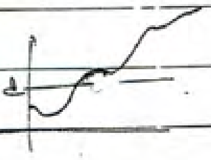
$\Rightarrow \dim X \leq k$. Άτοπο.

Άρα $Y \neq \{0\}$.

Επιλέγουμε $y_0 \in Y$ με $y_0 \neq 0$.

Ορίζουμε $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $h(t) = \|x_0 + t y_0\|$ συνεχή με

$h(0) = \|x_0\| < 1$ και $\lim\limits_{t \to +\infty} h(t) = +\infty$.



Άρα $\exists t_0 \in \mathbb{R}$ με $\|x_0 + t_0 y_0\| = 1$.

Θέτουμε $z_0 = x_0 + t_0 y_0$.

Τότε, $\|z_0\| = 1 \Rightarrow z_0 \in S_X$, και

$\forall i = 1, \dots, k$, $|f_i(z_0) - f_i(x_0)| = |f_i(x_0 + t_0 y_0) - f_i(x_0)| = t_0 |f_i(y_0)| = 0$

↳ το $y_0 \in$ ενν,
~~τομή των πυρήνων~~

$\Rightarrow z_0 \in W(x_0, A, \varepsilon) \Rightarrow W \cap S_{x_0} \neq \emptyset$

Άρα, η (*) ισχύει $\Rightarrow \overline{S_X}^{w} = B_X$

#

Ακολουθιακοί Χώροι Banach

χ. με "ν+" $c_0(\mathbb{N}) = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : a_n \in \mathbb{R},\ \forall n\in\mathbb{N}$ με $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0\}$.

Για $1 \le p < +\infty$

ς. με "4" $\ell_p(\mathbb{N}) = \{(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} : \alpha_n \in \mathbb{R},\ \forall n\in\mathbb{N}$, με $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^p < +\infty\}$

χ. με "+" και $\ell_\infty(\mathbb{N}) = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : a_n \in \mathbb{R}\ \forall n\in\mathbb{N}$ με $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |a_n| < +\infty\}$.

Οι $c_0(\mathbb{N})$ και $\ell_\infty(\mathbb{N})$ είναι δ.χ. κατά προφανή τρόπο. Οι $\ell_p(\mathbb{N})$ (για $1 \le p < +\infty$) είναι δ.χ. και αυτό μας το εξασφαλίζει — η ανισότητα Minkowski

Ανισότητα Minkowski

$\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall a_1, \dots, a_k, \beta_1, \dots, \beta_k \in \mathbb{R}$

$$\sum_{i=1}^{k} |a_i + \beta_i|^p \le \sum_{i=1}^{k} |a_i|^p + \sum_{i=1}^{k} |\beta_i|^p$$

Στο $c_0(\mathbb{N})$ ορίζουμε $\|x\|_\infty = \|(\alpha_n)_n\|_\infty = \sup\{|a_n| : n\in\mathbb{N}\}$.
Στον $\ell_\infty(\mathbb{N})$ ορίζουμε $\|x\|_\infty = \|(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty = \sup\{|a_n| : n\in\mathbb{N}\}$
και για $1 \le p < +\infty$ στον $\ell_p(\mathbb{N})$ ορίζουμε

$$\|x\|_p = \|(a_n)_n\|_p - \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^p\right)^{1/p}$$

Άσκηση 1

Δ.Ο. $\|\cdot\|_\infty$ στον c_0 και στο ℓ_∞ είναι νόρμα, και ότι $\|\cdot\|_p$ στον ℓ_p είναι νόρμα $\forall\, 1 \le p < +\infty$.

Άσκηση 2.

Δ.Ο. οι $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$, $(\ell_\infty, \|\cdot\|_\infty)$, $(\ell_p, \|\cdot\|_p)$, $1 \le p < +\infty$ είναι χώροι Banach

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω X χώρος Banach, $B \subseteq X$ νορμ φραγμένο και D υπόχωρος του X^* με $\overline{D}^{\|\cdot\|} = X^*$.
Τότε, η σχετική (X, D) τοπολογία και η σχετική ασθενής τοπολογία στο B ταυτίζονται.

(Στα νορμ φραγμένα του X^*, η ασθενής τοπολογία και η τοπολογία στον D ταυτίζονται.)

Απόδειξη:

Πρέπει νδο

(?.) (1) $\forall W$ ασθενώς ανοικτό $\exists W'$ (X,D)-ανοικτό με
$W' \cap B \subset W \cap B$.

(2) $\forall W'$ (X,D) ανοικτό $\exists W$ ασθενώς ανοικτό με
$W \cap B \subset \underbrace{W' \cap B}_{\text{ασθενώς ανοικτό} \Rightarrow \text{ανοικτό}}$.

Η (2) είναι προφανής.

(1) Έστω $W = W(x, A, \varepsilon)$ βασικό ασθενές ανοικτό, όπου
$A = \{f_1, \dots, f_n\} \subset X^*$ και $\varepsilon > 0$:
$W \cap B = \{y \in B : |f_i(y) - f_i(x)| < \varepsilon, \ \forall i \in \{1, \dots, n\}\}$.
Αφού B φραγμένο $\Rightarrow \exists c > 0$ $\sup\{\|x\| : x \in B\} \leq c < \infty$.

Αφού D νορμ-πυκνό στον X^*, τότε $\forall i \in \{1, \dots, k\}$
$\exists g_i \in D : \|f_i - g_i\| < \frac{\varepsilon}{3c}$

Θέτουμε $A' = \{g_1, \dots, g_k\} \subset D$ και $W' = W(x, A', \frac{\varepsilon}{3})$.
Τότε $W' \cap B \subset W \cap B$.
Πράγματι, έστω $y \in W' \cap B$ και $i \in \{1, \dots, k\}$.

$$|f_i(y)-f_i(x)| \leq |f_i(y)-g_i(y)| + |g_i(y)-g_i(x)| + |g_i(x)-f_i(x)|$$
$$\leq \|f_i-g_i\|\cdot\|y\| + \frac{\varepsilon}{3} + \|g_i-f_i\|\cdot\|x\| <$$
$$< \frac{\varepsilon}{3c}\cdot c + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3c}\, c = \varepsilon \rightsquigarrow y \in W \cap B.$$

(Ασθενής Τοπολογία ⇝ δεν έχει μετρική, αλλά συμπεριφέρεται σαν μετρική).

ΟΡΙΣΜΟΣ

Σύγκλιση κατά σημείο ~~σε συνεχή~~ συνάρτηση.

Έστω X χώρος Banach, και $(x_n)_n$ ακολουθία στον X, $x \in X$. Θα λέμε ότι η (x_n) συγκλίνει ασθενώς στο x ($x_n \xrightarrow{w} x$), αν $\forall W \subset X$ ασθενή περιοχή του x ; $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ $\forall n \geq n_0$, $x_n \in W$.

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω X χώρος Banach, $x \in X$ και $(x_n)_n$ ακολουθία στον X. Έστω ακόμα $D \subset X^*$: $\overline{\langle D \rangle}^{\|\cdot\|} = X^*$.

ΤΕΕΙ

(1) $x_n \xrightarrow{w} x$

(2) $x^*(x_n) \to x^*(x)$, $\forall x^* \in X^*$

(3) $x^*(x_n) \to x^*(x)$, $\forall x^* \in S_{X^*}$

(4) (x_n) φραγμένη (νορμ) και $x^*(x_n) \to x^*(x)$, $\forall x^* \in D$.

Απόδειξη:

(1) ⇒ (2) Εφαρμόζω τον ορισμό για $W(x,\{x^*\},\varepsilon)$

(2) ⇒ (3) Προφανές.

(3) ⇒ (4) Προφανές.

(2) ⇒ (1) Έστω $W(x,A,\varepsilon)$ ασθενής βασική περιοχή του x, με $A=\{x_1^*,\dots,x_n^*\}$.

Αφού $x_i^*(x_n) \to x_i^*(x) \Rightarrow \exists n_i \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_i$ $|x_i^*(x_n)-x_i^*(x)| < \varepsilon$, $\forall i \in \{1,\dots,k\}$ (1) Θέτω $n_0 = \max\limits_{i=1..k}\{n_i\}$

τότε $\forall n \geq n_0$ η (1) ισχύει $\forall i \in \{1,\dots,k\} \Rightarrow$

$\Rightarrow x_n \in W(x,A,\varepsilon) \Rightarrow x_n \xrightarrow{w} x$.

(2) ⇒ (4)

Αρκεί νδο η $(x_n)_n$ είναι φραγμένη.

Για κάθε $n\in\mathbb{N}$, θεωρούμε το $\hat{x}_n \in X^{**}$. Τότε $\|\hat{x}_n\| = \|x_n\|$

και $\hat{x}_n(x^*) = x^*(x_n) \longrightarrow x^*(x) = \hat{x}(x^*)$, $\forall x^* \in X^*$.

$\Longrightarrow \sup_{n\in\mathbb{N}} |\hat{x}_n(x^*)| \leq +\infty$, $\forall x^* \in X^*$.

Από Θεώρημα Ομοιόμορφου Φράγματος ⇒

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\hat{x}_n\| < +\infty$$

Επειδή η γραμμική εμφύτευση είναι ισομετρία ⇒

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|_{n\in\mathbb{N}} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|\hat{x}_n\| < +\infty \Longrightarrow$$

⇒ η $(x_n)_n$ είναι φραγμένη.

(4) ⇒ (2)

Αφού $x^*(x_n) \longrightarrow x^*(x)$, $\forall x^* \in D \Rightarrow x_n \xrightarrow{D} x$

$\left.\begin{array}{l}(x_n)_n \text{ φραγμένη} \\ \overline{\langle D \rangle}^{\|\cdot\|} = X^*\end{array}\right\} \Longrightarrow$ Στο σύνολο $\{x_n\}\cup\{x\}$

η (X,D) και η ασθενής ταυτίζονται.

από το προηγούμενο θεώρημ

$\Longrightarrow x_n \xrightarrow{w} x$

Για χώρους Banach $\xrightarrow{\text{Βασική ανισότητα}}$ Minkowski

Για δυϊκούς χώρους $\xrightarrow{\text{Βασική ανισότητα}}$ Hölder

ΔΕΣ
ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ
ΑΡΓΥΡΟΥ

Δυϊκοί Ακολουθιακοί Χώροι.

ΒΑΣΙΚΗ ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ HÖLDER

Αν $(a_n)_n$, $(\beta_n)_n$ ακολουθίες και $p,q>0$ με $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, τότε

$$\left|\sum a_n\beta_n\right| \leqslant \left(\sum|a_n|^p\right)^{1/p}\left(\sum|\beta_n|^q\right)^{1/q}.$$

$\boxed{l_2(\mathbb{N})}$

Έστω $x=(a_n)_n\in l_2(\mathbb{N})$. Τότε ορίζουμε

$T_x: l^2(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathbb{R}$ γραμμική

με $T_x((\beta_n)_n) = \sum a_n\beta_n$

$$\left|T_x((\beta_n)_n)\right| = \left|\sum a_n\beta_n\right| \leq \left(\sum|a_n|^2\right)^{1/2}\left(\sum|\beta_n|^2\right)^{1/2} = \\ = \|x\|_2 \cdot \|(\beta_n)\|_2$$

$\Rightarrow$ T_x φραγμένο $\|T_x\| = \|x\|_2$.

Εύκολα αποδεικνύεται ότι T_x είναι "επί".

Είναι εύκολο να δούμε ότι $l_2(\mathbb{N})^* = l_2(\mathbb{N})$.

Για $1<p<+\infty$

$l_p(\mathbb{N})^* = l_q(\mathbb{N})$, όπου $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

$c_0(\mathbb{N})^* = l_1(\mathbb{N})$

$l_1(\mathbb{N})^* = l_\infty(\mathbb{N})$

Η standard βάση ζει σε όλους τους παραπάνω ακολουθιακούς χώρους.

(1) Στον $c_0(\mathbb{N})$.

$\langle (e_n)\rangle$ νορμ πυκνό στο $c_0(\mathbb{N})$.

(2) Στους $\ell_p(\mathbb{N})$, $1<p<+\infty$.
$\langle(e_n)\rangle$ νορμ πυκνό στους $\ell_p(\mathbb{N})$.

(3) Στον $\ell_\infty(\mathbb{N})$,
$\langle(e_n)\rangle$ <u>ΔΕΝ</u> είναι νορμ πυκνή.

($\Rightarrow$ Αν θέλω να ελέγξω αν μια ακολουθία στον $\ell_1(\mathbb{N})^*$ συγκλίνει δεν αρκεί να ελέγξω αν τα (e_n) συγκλίνει στον $\ell_\infty(\mathbb{N})$ και αντίστροφα.)

<u>Παραδείγματα</u>:

(1) Στον χώρο $\ell_2(\mathbb{N})$.
Θεωρούμε την ακολουθία στοιχείων του $\ell_2(\mathbb{N})$, $(x_n)_n$ (δηλ. $\forall n$, $x_n\in\ell_2$) με $x_n=e_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

Αφού $\|x_n\|_2 = \|e_n\|_2 = 1 \Rightarrow$ η ακολουθία (x_n) φραγμέν

Ισχυριζόμαστε ότι $e_n \xrightarrow{w} 0$.
Αφού η $(e_n)_n$ φραγμένη $\Rightarrow$ αρκεί <u>νδο</u> $\underset{\text{II.1.1}}{x^*}(e_n)\to 0$,
$\forall x^*\in D$, όπου $D\subseteq \ell_2^* = \ell_2$ τ.ω. $\langle D\rangle=\ell_2$.
Άρα, και για $D=\{e_k^*: k\in\mathbb{N}\}$
Έστω $x^*=e_k^*\in D$ τυχαίο.
Πρέπει νδο $\lim\limits_{n\to\infty} e_k^*(e_n) = 0 = e_k^*(0)$.

Για $k,n\in\mathbb{N}$ $e_k^*(e_n) = \begin{cases} 0, & k\neq n \\ 1, & k=n \end{cases}$

άρα $\lim\limits_{n\to\infty} e_k^*(e_n) = 0$, $\forall k\in\mathbb{N}$. ⋇
Άρα, $e_n \xrightarrow{w} 0$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

Άσκηση Το ίδιο επιχείρημα δείχνει ότι αν $(e_n)_n$ είναι στον $\ell_p(\mathbb{N})$ $(1<p<+\infty)$ ή στον $c_0(\mathbb{N})$ τότε $e_n \xrightarrow{w} 0$

(HW) ⇝ Τι συμβαίνει στον ℓ_1?

(δηλ. αν $e_n \xrightarrow{w} 0$?)

$\exists e_{n_k} \xrightarrow{w} 0$?

$\exists$ ασθενώς συγκλίνουσα υπακολουθία στον ℓ_1?

03/12/2004

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω X χώρος Banach τ.ω. ο X^* να είναι διαχωρίσιμος. Τότε η $\overline{B}_X = \{x \in X : \|x\| \le 1\}$ εφοδιασμένη με την ασθενή τοπολογία είναι μετρικοποιήσιμος.

Απόδειξη:

Έστω $\{x_n^*\}_{n\in\mathbb{N}}$ το οποίο είναι νορμ-πυκνό στην $\overline{B}_{X^*}$.
$(\|x_n^*\| \le 1, \ \forall n \in \mathbb{N})$.

Ορίζουμε $\rho : \overline{B}_X \times \overline{B}_X \to \mathbb{R}$ με $\rho(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n^*(x-y)|}{2^n}$

Έστω $n \in \mathbb{N}$ τυχαίο. $\frac{|x_n^*(x-y)|}{2^n} \le \frac{\|x_n^*\| \cdot \|y-x\|}{2^n} \le \frac{2}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}$.

$$\rho(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n^*(x-y)|}{2^n} \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot 2 =$$
$$= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2$$

Άρα η ρ είναι καλά ορισμένη.

Θα δείξουμε ότι η ρ είναι μετρική, δηλαδή:

(1) $\rho(x,y) \ge 0$ ✓ προφανές, $\forall x,y \in \overline{B}_X$ και $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

(2) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ ✓ προφανές

(3) $\rho(x,y) \le \rho(x,z) + \rho(z,y)$ ✓ προφανές.

(1)($\Leftarrow$) Έστω $x = y \Rightarrow$ προφανώς $\rho(x,y) = 0$

($\Rightarrow$) Αντίστροφα,

έστω $x,y \in \overline{B}_X$ με $\rho(x,y) = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n^*(x-y)|}{2^n} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \ \ x_n^*(x-y) = 0 \Rightarrow x - y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \ker x_n^*$.

Αν $x \ne y \Rightarrow Z = \bigcap_{n=1}^{\infty} \ker x_n^* \ne \{0\}$.

Επιλέγουμε $y \in Z$ με $\|y\| = 1 \xRightarrow{H-B} \exists z^* \in B_{X^*}$ με $\|z^*\| = 1$ και $z^*(z) = 1$

Έστω $n \in \mathbb{N}$ τυχαίο.

$$\|x_n^* - z^*\| = \sup \{ |(x_n^* - z^*)(x)| : \|x\| \leq 1 \} \geq |(x_n^* - z^*)(z)| =$$
$$= |x_n^*(z) - z^*(z)| = 1$$

Άτοπο, γιατί η $(x_n^*)_n$ είναι νορμ-πυκνή στην $\overline{B}_{X^*}$.

Ο $(\overline{B}_X, \rho)$ είναι μετρικός χώρος.

Θδο ο $\overline{B}_X$ με την ασθενή είναι ο $(\overline{B}_X, \rho)$ (ως τ.χ.)

ΒΗΜΑ 1ο

Έστω $x \in \overline{B}_X$ και W ασθενής περιοχή του X.

Θδο $\exists r > 0$ ώστε $B_\rho(x, r) \subseteq W \cap \overline{B}_X$

Το $W = W(x, A, \varepsilon)$ με $A = \{f_1, \dots, f_k\} \subseteq X^*$.

Χ.β.γ. μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\|f_i\| \leq 1$, $\forall i = \{1, \dots, r\}$.

Πράγματι, $c = \max_{1 \leq i \leq k} \|f_i\|$ και ορίζουμε:

$$W' = W\left(x, \left\{\frac{f_1}{c}, \frac{f_2}{c}, \dots, \frac{f_k}{c}\right\}, \frac{\varepsilon}{c}\right) = W(x, A, \varepsilon)$$

Αφού η $(x_n^*)_n$ είναι νορμ-πυκνή στην $\overline{B}_{X^*}$,
$\forall i = \{1, \dots, k\}$ $\exists n_i \in \mathbb{N}$ με $\|f_i - x_{n_i}^*\| < \frac{\varepsilon}{3}$

Επιλέγουμε $r > 0$ (αρκετά μικρό) τ.ω. $r \cdot 2^{n_i} < \frac{\varepsilon}{3}$, $\forall i = 1, \dots, k$

Ισχυρίζομαι ότι $B(x, r) \subseteq W \cap \overline{B}_X$

Έστω $y \in B(x, r) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n^*(x-y)|}{2^n} < r \Rightarrow \boxed{y \in \overline{B}_X}$
και $\|y\| \leq 1 \Rightarrow y \in$

Αρκεί νδο
$\forall i = 1, \dots, k$, $|f_i(x) - f_i(y)| \leq \varepsilon$ (δηλ. ότι $y \in W(x, A, \varepsilon) \Rightarrow y \in \overline{B}_X \cap W$)

Έστω, λοιπόν, $i = 1, \dots, k$ τυχαίο.

$$|f_i(y)-f_i(x)| = |f_i(y) - x_{n_i}^*(y) + x_{n_i}^*(y) - x_{n_i}^*(x) + x_{n_i}^*(x) - f_i(x)| =$$

$$\leq |f_i(y) - x_{n_i}^*(y)| + |x_{n_i}^*(y) - x_{n_i}^*(x)| + |x_{n_i}^*(x - f_i(x)| =$$

(*) $$< \|f_i - x_{n_i}^*\| \cdot \|y\| + \boxed{r 2^{n_i}} + \|x_{n_i}^* - f_i\| \cdot \|x\| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \underline{\varepsilon}$$ γιατί;

ΒΗΜΑ 2ο

Έστω $x \in \overline{B}_X$ και $r > 0$. Αρκεί νδο $\exists W$ ασθενής περιοχή του X τ.ω. $W \cap \overline{B}_X \subseteq B_\rho(x, r)$.

$$y \in B_\rho(x,r) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n^*(x-y)|}{2^n} < r$$

Επιλέγουμε $k_0 \in \mathbb{N}$ αρκετά μεγάλο τ.ω. $\frac{1}{2^{k_0-1}} < \frac{r}{3}$ τ.ω.
έστω τ.ω. $\varepsilon < \frac{r}{3}$
και θεωρούμε την $W_0 = W(A, \varepsilon)$ όπου $A = \{x_1^*, x_2^*, \dots, x_{k_0}^*\}$

Έστω λοιπόν $y \in W_0 \cap \overline{B}_X \Rightarrow \|y\| \leq 1$, $|x_i^*(x-y)| < \varepsilon$, $\forall i = 1, \dots, k$

$$\rho(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n^*(x-y)|}{2^n} =$$

$$= \sum_{n=1}^{k_0} \frac{|x_n^*(x-y)|}{2^n} + \sum_{n=k_0+1}^{\infty} \frac{|x_n^*(x-y)|}{2^n} <$$

$$< \varepsilon \cdot \sum_{n=1}^{k_0} \frac{1}{2^n} + 2 \sum_{n=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \varepsilon + 2 \cdot \frac{1}{2^{k_0}} <$$

$$< \frac{r}{3} + \frac{1}{2^{k_0-1}} < \frac{r}{3} + \frac{r}{3} < \underline{r}$$

✱

Παράδειγμα:

Δεν υπάρχει καμία υπακολουθία της κανονικής βάσης $(e_n)_n$ του $\ell_1(\mathbb{N})$, η οποία να συγκλίνει ασθενώς σε κάποιο $x \in \ell_1(\mathbb{N})$.

Απόδειξη:

Έστω όχι, δηλαδή $\exists (e_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ υπακολουθία της $(e_n)_n$ και $x \in \ell_1$ με $e_{n_k} \xrightarrow{w} x$.

Το $x = (a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ακολουθία

Ισχυρισμός: $x = 0$ (δηλ. $a_i = 0, \forall i \in \mathbb{N}$)

$\ell_1^* = \ell_\infty$ και $e_i^* \in \ell_\infty, \forall i \in \mathbb{N}$ και $e_{n_k} \xrightarrow{w} x \Longrightarrow$

$\Longrightarrow e_i^*(e_{n_k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} e_i^*(x) = a_i$.

Αλλά, για k αρκετά μεγάλο ώστε $n_k > i$,

$e_i^*(e_{n_k}) = 0$, δηλαδή

$$\lim_{k\to+\infty} e_i^*(e_{n_k}) = 0 = a_i .$$

Ισχυρισμός: $e_{n_k} \overset{w}{\not\to} 0$.

$L = \{n_k : k \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{N}$ άπειρο.

$f_L \in \ell^\infty(\mathbb{N}) (= \ell_1^*)$ με $f_L(i) = \begin{cases} 0, & \text{αν } i \notin L \\ 1, & \text{αν } i \in L \end{cases}$.

Θδο $f_L(e_{n_k}) \not\to f_L(0)$.

Πράγματι, $f_L(0) = 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$ $f_L(e_{n_k}) = 1 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow f_L(e_{n_k}) \overset{w}{\not\to} f_L(0) \Longrightarrow e_{n_k} \overset{w}{\not\to} 0$.

$\#$

Άσκηση

Έστω X χώρος Banach και $x_n \xrightarrow{w} x$.
Τότε, $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$. (δηλ. η νόρμα είναι συνάρτηση ασθενώς κάτω ημισυνεχής.)

Απόδειξη:

→ Πόρισμα (από Banach-Steinhaus).
Έστω $T_n : Y \to \mathbb{R}$ φραγμένες γραμμικές και $T : Y \to \mathbb{R}$ τ.ω. $T_n(y) \longrightarrow T(y)$, $\forall y \in Y$. Τότε,
(1) T φραγμένος γραμμικός
(2) $\|T\| \leq \liminf \|T_n\|$.

Εφαρμόζω το Πόρισμα με $Y = X^*$, $T_n = \hat{x}_n$, $T = \hat{x}$.
Τότε $\forall x^* \in X^*$

$$T_n(x^*) = \hat{x}_n(x^*) = \underbrace{x^*(x_n) \longrightarrow x^*(x)}_{\text{επειδή } x_n \xrightarrow{w} x} = \hat{x}(x^*) = T(x^*).$$

Άρα,
$\|T\| \leq \liminf \|T_n\| \iff$
$\|\hat{x}\| \leq \liminf \|\hat{x}_n\| \iff$ (Επειδή η "^" είναι ισομετρία).
$\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$

⁂

Άσκηση

Έστω X χώρος Banach, $x_n \xrightarrow{w} x$ και $x_n^* \xrightarrow{\|\cdot\|} x^*$.
Τότε, $x_n^*(x_n) \longrightarrow x_1^*(x)$.

Απόδειξη

Αρκεί ν.δ.ο. $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ $\forall n \geq n_0$ $|x_n^*(x_n) - x^*(x)| < \varepsilon$.

$$|x_n^*(x_n) - x^*(x)| \leq |x_n^*(x_n) - x^*(x_n)| + |x^*(x_n) - x^*(x)| \leq$$
$$\leq \|x_n^* - x\| \, \|x_n\| + |x^*(x_n) - x^*(x)|$$

Αφού x_n ασθενώς συγκλίνουσα $\Rightarrow$ $(x_n)_n$ φραγμένη $\Big\}(*)$

$$|x_n^*(x_n) - x^*(x)| \le \|x_n^* - \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{x^*}\| \cdot c + |x^*(x_n) - \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{x^*(x)}| .$$

Άρα, $\lim |x_n^*(x_n) - x^*(x)| = 0$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Το αποτέλεσμα ΔΕΝ ισχύει αν $x_n \xrightarrow{w} x$, $x_n^* \xrightarrow{w} x^*$

Αντιπαράδειγμα : $X = \ell_2(\mathbb{N})$, $x_n = \underset{\substack{\downarrow w \\ 0}}{e_n}$, $x_n^* = \underset{\substack{\downarrow w \\ 0}}{e_n^*}$.

Αλλά, $e_n^*(e_n) = 1 \not\to 0$

06/12/2024.

Ασθενής ⊛ Τοπολογία.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω X χώρος Banach.
Η ασθενής * τοπολογία του X^*, είναι η ελάχιστη τοπολογία που κάνει τα στοιχεία του $\hat{X}$ συνεχή (δηλαδή είναι η $(X^*, \hat{X})$)

- Αφού τα στοιχεία του $\hat{X}$ διαχωρίζουν τα σημεία του X^* έχουμε τα ακόλουθα:
  (1) Ο X^* με την ασθενή * τοπολογία είναι Hausdorff, τοπικά κυρτός τ.δ.χ.
  (2) Τα βασικά ασθενώς * ανοιχτά είναι της μορφής
  $$W(x^*, \hat{A}, \varepsilon) = \{y^* \in X^* : |\hat{x}(y^*) - \hat{x}(x^*)| < \varepsilon,\ \forall \hat{x} \in \hat{A}\} =$$
  $$= \{y^* \in X^* : |y^*(x) - x^*(x)| < \varepsilon,\ \forall x \in A\} =$$
  όπου $A \subseteq X$ πεπερασμένο και $\varepsilon > 0$.

- Η ασθενής * είναι μικρότερη τοπολογία από την ασθενή και αυτή ΔΕΝ είναι μετρικοποιήσιμη.

- Ο τοπολογικός δυϊκός του $(X^*, \overset{\text{με την ασθενή άστρο}}{w_*})$ είναι ο $\langle \hat{X} \rangle$

- ΑΡΑ, αν $\hat{X} \subsetneq X^{**} \Rightarrow \exists x^{**} \in X^*$ το οποίο ΔΕΝ είναι συνεχές για την ασθενή *

- Αφού το X^{**} δεν είναι συνεχές για την ασθενή * τοπολογία, ο $\ker x^{**}$ είναι νορμ-κλειστός, αλλά ΟΧΙ ασθενώς * κλειστός.
  Δηλαδή, το Θεώρημα του Mazur ΔΕΝ ισχύει για την ασθενή *, εν γένει.

Παράδειγμα:

c_0, ℓ_1, ℓ_∞

$c_0^* = \ell_1, \ \ell_1^* = \ell_\infty$

Για την ασθενή του ℓ_1, θέλουμε να είναι συνεχή όλα τα στοιχεία του ℓ_∞.

Για την ασθενή * του ℓ_1, θέλουμε να είναι συνεχή όλα τα στοιχεία του c_0.

ΘΕΩΡΗΜΑ (L. Alaoglu)

Έστω X χώρος Banach.

Τότε η $\overline{B_{X^*}}$ με την ασθενή * τοπολογία είναι συμπαγής τοπολογικός χώρος.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω X χώρος Banach και $(x_n^*)_n$ ακολουθία στον X^* και $x^* \in X^*$. Λέμε ότι η $(x_n^*)_n$ είναι ασθενώς * συγκλίνουσα στο x^* ($x_n^* \xrightarrow{w^*} x^*$) αν

$\forall W \subseteq X^*$ ασθενώς* ανοικτή περιοχή του x^* $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$, $x_n^* \in W$.

ΠΡΟΤΑΣΗ

Τ.Α.Ε.Ι.

① $x_n^* \xrightarrow{w^*} x^*$

② $x_n^*(x) \longrightarrow x^*(x)$, $\forall x \in X$.

③ $x_n^*(x) \longrightarrow x^*(x)$, $\forall x \in S_X$.

(4) Η $(x_n^*)_n$ φραγμένη και $x_n^*(x) \longrightarrow x^*(x)$, $\forall x \in D$ τ.ω. $D \subseteq X$ $\langle D \rangle$ νορμ πυκνό υποσύνολο του X.

Απόδειξη $\rightsquigarrow$ Άσκηση (4) ⇒ (2). $x \in X$

$m = \max\{n_1, n_2, n_3\}$ n_1 ... $+|x^*(d_k) - x^*(x)| \overset{n_3}{<} \frac{\varepsilon}{3}$ $D \ni d_k \to x$

Ελέγχω αν $x_n^*(x) \longrightarrow x^*(x)$

αλλά ξέρω ότι $x_n^*(d_k) \longrightarrow x^*(d_k)$ $\forall k$

$\|x - d_k\| < \frac{1}{k}$ $\forall k$.

$|x_n^*(x) - x^*(x)| \leq \underbrace{|x_n^*(x) - x_n^*(d_k)|}_{< \varepsilon/3} + \underbrace{|x_n^*(d_k) - x^*(d_k)|}_{\overset{n_2}{<} \varepsilon/3}$

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω X διαχωρίσιμος χώρος Banach

Τότε η $\overline{B}_{X^*}$ με την ασθενή * είναι μετρικοποιήσιμη.

$\overline{B}_{\ell_1}$ → νορμ

→ ασθενή → συμπαγής

→ ασθενή * τοπ → μη συμπαγής

Απόδειξη:

Επιλέγουμε $(x_n)_n$ νορμ πυκνή στην $\overline{B}_X$.

Ορίζουμε $\rho : \overline{B}_{X^*} \times \overline{B}_{X^*} \longrightarrow \mathbb{R}$ με

Άσκηση

$$\rho(x^*, y^*) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x^*(x_n) - y^*(x_n)|}{2^n}$$

Βήμα 1ο: Η ρ είναι μετρική.

ενδιάμεσα βήματα όπως στην άλλη αντίστοιχη απόδειξη αλλάζοντας τα $X^* \to X$

Βήμα 2ο: Έστω $\|x^*\| \leq 1$, $W \subseteq X^*$ ασθενής * περιοχή του x^* και θα βρείτε $r > 0$ ώστε

$$B_\rho(x^*, r) \subset W \cap \overline{B}_{X^*}$$

$W(x^*, A, \varepsilon)$, $A \subseteq X$ πεπερασμένο, $\varepsilon > 0$

$A = \{x_1, \dots, x_k\}$

χ.β.γ. $\|x_i\| \leq 1$, $\forall i = 1, \dots, k$.

Βήμα 3ο: Έστω $\|x^*\| \leq 1$, $r > 0$ θα πρέπει να βρείτε W ασθενή* ανοικτή περιοχή του x^* τ.ω.

$$W \cap \overline{B}_{X^*} \subseteq B_\rho(x^*, r).$$

Αυτοπαθείς χώροι Banach.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Ένας χώρος Banach X καλείται αυτοπαθής, αν ο $\hat{X} = X^{**}$, δηλαδή η κανονική εμφύτευση είναι επί.

⚠ Προσοχή!!

Ενδέχεται ο X να είναι γραμμικά ισομετρικός με τον X^{**}, αλλά η κανονική εμφύτευση να μην είναι επί, δηλαδή ο X να μην είναι αυτοπαθής.

($T : X \to X^{**}$ γραμ. ισομετρία
$\|T_x\| = \|x\|$ αλλά $T_x(x^*) \overset{?}{=} x^*(x)$)

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω X αυτοπαθής χώρος Banach.
Τότε ο X είναι διαχωρίσιμος αν και μόνο αν ο X^* είναι διαχωρίσιμος.

Απόδειξη

Αν X^* διαχωρίσιμος $\Rightarrow$ X διαχωρίσιμος από γνωστή πρόταση.

Αντίστροφα, αν X διαχωρίσιμος $\xRightarrow{\text{αυτοπαθής}}$ $X^{**} = \hat{X}$ έχουμε ότι ο X^{**} διαχωρίσιμος $\xRightarrow{\text{γνωστή πρόταση}}$ ο X^* είναι διαχωρίσιμος. #

αντίστοιχη πρόταση σελ. 55

ΘΕΩΡΗΜΑ (Goldstein)

Έστω X χώρος Banach. Τότε, $\overline{B_X}^{w*} = B_{X^{**}}$

Απόδειξη:

Έστω όχι

Δηλαδή, αν $F = \overline{B_X}^{w*}$, τότε $\exists x_0^{**}$ με $\|x_0^{**}\| \leq 1$ που $x_0^{**} \notin F$. Το $F \subseteq B_{X^{**}}$ και από Θ. Alaoglou, το $B_{X^{**}}$ είναι ασθενώς * συμπαγές $\Longrightarrow$ F είναι συμπαγές και κυρτό.

$\{x_0^{**}\}$ - συμπαγές κυρτό
F - ασθενώς* κλειστό κυρτό | $\{x_0^{**}\} \cap F = \emptyset$ $\Big\}$ $\xRightarrow{\text{το διαχωριστικό}}$ για τ.κ.τ.δ.χ

(Α*

$\Rightarrow \exists\, x^* \in X^*$ τ.ω.

$$\underset{\substack{\| \\ \|x^*\|}}{\sup_{y \in B_X} x^*(y)} < \hat{x}^*(x_0^{**})$$

$$x_0^{**}(x^*) \leq \|x_0^{**}\| \cdot \|x^*\|.$$

$$\leq \|x\|^*$$

Άτοπο

13/12/2004

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω X αυτοπαθής και διαχωρίσιμος χώρος Banach. Τότε η $\overline{B}_X$ με την ασθενή τοπολογία είναι συμπαγής μετρικός χώρος.

Απόδειξη:

Αφού X αυτοπαθής και διαχωρίσιμος $\Rightarrow$ X^* διαχωρίσιμος $\Rightarrow$ $\overline{B}_X$ με την ασθενή μετρικοποιήσιμος.

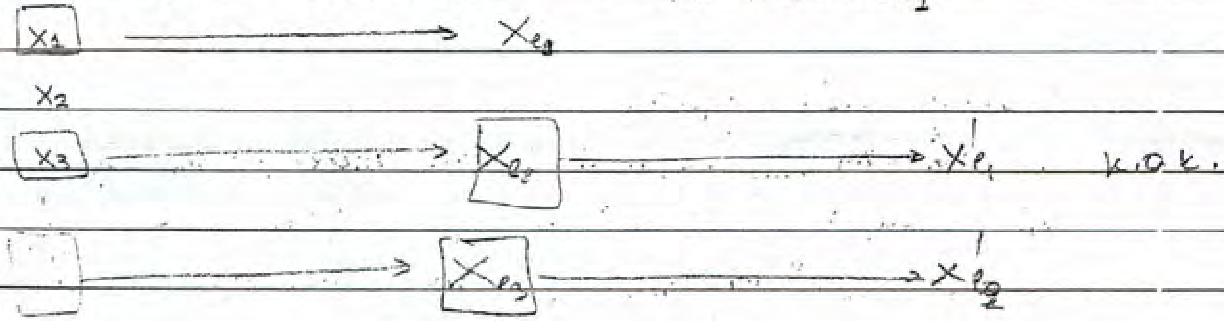
Αρκεί νδο $\forall (x_n)_n \in \overline{B}_X$ $\exists x \in \overline{B}_X$ και $L \subseteq \mathbb{N}$ άπειρο ώστε $w\text{-}\lim_{n\in L} x_n = x$

Έστω, λοιπόν, μια $(x_n)_n \subseteq \overline{B}_X$ τυχαία. Έστω επιπλέον $D \subseteq X^+$ νορμ-πυκνό αριθμήσιμο.

$D = \{x_n^*\}_{n\in\mathbb{N}}$

φραγμένη ⇒ ∃ υπακ. που συγκλίνει

$x_1^* \longmapsto (x_1^*(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ / $x_2^* \mapsto (x_2^*(x_n))_{n\in L_1}$



$\exists L_1 \in \mathbb{N}$ άπειρο ώστε η $(x_1^*(x_n))_{n\in L_1}$ να είναι Cauchy.
$\exists L_2 \subseteq L_1$ άπειρο τ.ω. η $(x_2^+(x_n))_{n\in L_2}$ να είναι Cauchy.

Επαγωγικά κατασκευάζουμε μια φθίνουσα ακολουθία
$L_1 \supseteq L_2 \supseteq L_3 \supseteq \ldots \supseteq L_k \supseteq \ldots$
απείρων υποσυνόλων του $\mathbb{N}$ τ.ω.
$\forall k\in\mathbb{N}$ η ακολουθία $(x_k^+(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα.

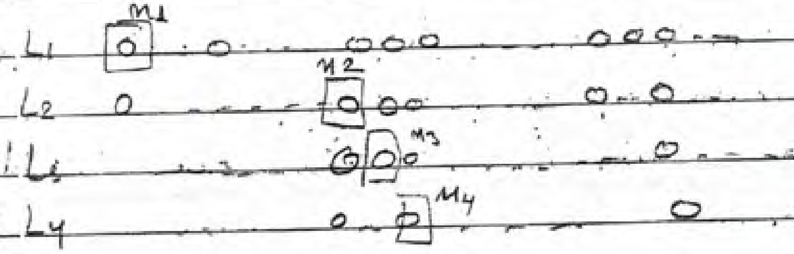
Επιλέγουμε $L_\infty \subseteq \mathbb{N}$ άπειρο ως εξής.

Θέτουμε $n_1 = \min L_1$ και επιβάλλουμε $n_1 \in L_\infty$.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε επιλέξει τα $n_1 < \dots < n_\ell \in L_\infty$ τ.ω. $n_1 \in L_1, n_2 \in L_2, \dots, n_\ell L_\ell$.

Το σύνολο $M_{\ell+1} = L_{\ell+1} \setminus \{n_1, \dots, n_\ell\}$ είναι άπειρο.

Θέλουμε $n_{\ell+1} = \min M_{\ell+1}$



Έτσι ολοκληρώνεται η κατασκευή του L_∞

Παρατηρούμε ότι $L_1 \supseteq L_\infty$ και γενικά L_k περιέχει το L_∞ τελικά (δηλαδή $\exists n_0^k \in \mathbb{N}$ ώστε $\forall n \geq n_0^k$, αν $n \in L_\infty \Rightarrow n \in L_k$)

Έστω $k \in \mathbb{N}$ τυχαίο.

Η $x_k^*(x_n)_{n \in L_\infty}$ τελικά είναι υπακολουθία της $(x_k^*(x_n))_{n \in L_k}$

Άρα, αφού η $(x_k^*(x_n))_{n \in L_k}$ είναι Cauchy

$\Rightarrow (x_k^*(x_n))_{n \in L_\infty}$ είναι Cauchy, $\forall k \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \forall x^* \in D$.

Ας αριθμήσουμε την $(x_n)_{n \in L_\infty}$ ως $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Γνωρίζουμε ότι $\forall x^* \in D$ η ακολουθία $(x^*(y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ είναι Cauchy και το D νορμ-πυκνό στον X^*

Ισχυρισμός 1:

Για $y^* \in X^*$, η ακολουθία $(y^*(y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ είναι Cauchy.

Απόδειξη:

Έστω $\varepsilon > 0$ τυχαίο.

Επιλέγουμε $x^* \in D$ τ.ω. $\|y^* - x^*\| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Για το συγκεκριμένο x^* επιλέγουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω.

$\forall n, m \geq n_0 \quad |x^*(y_n) - x^*(y_m)| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Τότε, $\forall n, m \geq n_0$

$$|y^*(y_n) - y^*(y_m)| \leq |y^*(y_n) - x^*(y_n)| + |x^*(y_n) - x^*(y_m)| +$$

$$+ |x^*(y_m) - y^*(y_m)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} =$$

$*$

Ορίζουμε $T : X^* \to \mathbb{R}$ με $T(x^*) = \lim_{n \to \infty} x^*(y_n)$.

Από τον ισχυρισμό ο T είναι καλά ορισμένος

Ισχυρισμός 2

Ο T γραμμικός και φραγμένος (δηλ. $T \in X^{**}$) με $\|T\| \leq 1$.

Απόδειξη:

Ο T προφανώς γραμμικός και $\forall n \in \mathbb{N}$

$$|x^*(y_n)| \leq \|x^*\| \cdot \|x_n\| \leq \|x^*\|$$

Άρα,

$|T(x^*)| \leq \|x^*\|$, άρα T φραγμένος με $\|T\| \leq 1$.

$T \in B_{X^{**}}$ Ο X είναι αυτοπαθής. $\Longrightarrow$

Επειδή X αυτο-
αθής (άρα επί)

$\exists x \in B_X$ τ.ω. $\hat{x} = T$.

Ισχυριζόμαστε ότι $y_n \xrightarrow{w} x$.

Αρκεί νδο $x^*(y_n) \longrightarrow x^*(x) = \hat{x}(x^*) = T(x^*)$

που ισχύει $\forall x^* \in X^*$

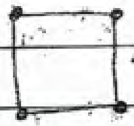
#

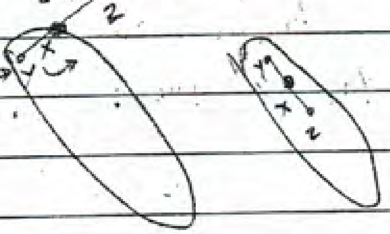
ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω X διανυσματικός χώρος και $C \subseteq X$ κυρτό.

Ένα $x \in C$ καλείται ακραίο σημείο του C αν

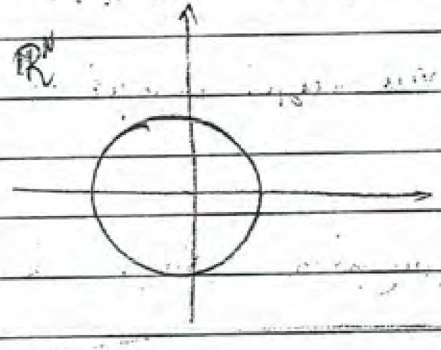
$\forall z, y \in C$ $\forall \lambda \in (0,1)$ αν $x = \lambda z + (1-\lambda)y \Rightarrow x = y = z$





Δεν είναι όλα τα συνοριακά σημεία ή ακραία

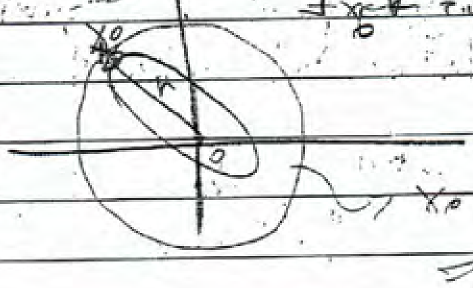
αντιπαράδειγμα: τετράγωνο → ακραία είναι μόνο οι κορυφές



Ακραία σημεία της ευκλείδειας μπάλας είναι η σφαίρα

K κλειστό κυρτό (φραγμένο) } ⇒ έχει ακραίο σημείο

Απ



$\exists x_0 \in K$ τ.ω. $\forall y \in K$ $\|y\|_2 \le \|x_0\|_2 = r$

→ x_0 : ακραίο της μπάλας

⇒ x_0 ακραίο και του K

(ΓΕ άτοπο)

ΘΕΩΡΗΜΑ (Krein – Milman)

Έστω X τοπικά κυρτός τοπολογικός διανυσματικός χώρο
και Hausdorff
και $K \subseteq X$ συμπαγές και κυρτό. Τότε

$$\mathrm{Ext}(K) \neq \emptyset$$

$$\overline{\mathrm{conv}\,\mathrm{Ext}(K)} = K$$

ΛΗΜΜΑ

Έστω X δ.χ. και $C_1 \subseteq C_2$ κυρτά του X. Έστω επιπλέον $x_0 \in C_1$ (άρα $x_0 \in C_2$) και x_0 ακραίο του C_2.
Τότε x_0 ακραίο του C_1.

Απόδειξη:

Έστω όχι. Τότε $\exists\, y, z \in C_1$ και $\lambda \in (0,1)$ με

$$\left.\begin{array}{l} x_0 = \lambda y + (1-\lambda) z \\ \left.\begin{array}{l} y \in C_1 \\ z \in C_1 \\ C_1 \subseteq C_2 \end{array}\right\} \Rightarrow y, z \in C_2 . \end{array}\right\} \Rightarrow x_0 \text{ δεν είναι ακραίο του } C_2$$

Άτοπο. ✱

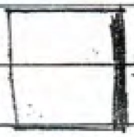
ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω X δ.χ., $C \subseteq X$ κυρτό και $F \subseteq C$.
Το F καλείται ακραίο υποσύνολο του C αν
$\forall z, y \in C$ $\forall \lambda \in (0,1)$ αν $\lambda z + (1-\lambda) y \in F \Rightarrow z, y \in F$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

Αν $F = \{x\}$ μονοσύνολο, τότε F ακραίο σύνολο $\Longleftrightarrow$ x ακραίο σημείο.

π.χ.



→ F η αυτή τότε είναι ακραίο, γιατί μόνο αν πάρεις σημεία πάνω στο ευθείο ο κυρτός συνδ. είναι στο F

αντίστοιχα

όχι ακραίο

ΛΗΜΜΑ

Έστω X δ.χ. και $X \supseteq A \supseteq B \supseteq C$ κυρτά.

Αν B είναι ακραίο του A
C είναι ακραίο του B $\Big\} \Rightarrow$ το C ακραίο του A.

Άσκηση

Έστω όχι $\Rightarrow \exists\, y,z \in C$ και λ τ.ω.

$$\underbrace{\lambda z + (1-\lambda) y \in C}_{\text{Άρα } C \subseteq B} \Rightarrow z, y \notin C$$

20|12|2004.

ΛΗΜΜΑ 1

Έστω X τ.δ.χ. και $C \subseteq X$ συμπαγές κυρτό, $f: X \to \mathbb{R}$ κυρτή και συνεχής. Θέτουμε $M = \max\{f(x) : x \in C\}$.
Τότε, το σύνολο $F = \{x \in C : f(x) = M\}$ είναι ακραίο υποσύνολο του C.

Απόδειξη:

$F = f^{-1}(\{M\}) \cap C$ άρα F κλειστό.

Έστω $y, z \in C$ και $\lambda \in (0,1)$ με $\lambda y + (1-\lambda) z \in F \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow f(\lambda y + (1-\lambda) z) = M$

Έστω ότι ένα τουλάχιστον από τα $y, z \notin F$, π.χ. $y \notin F \Leftrightarrow f(y) < M$.
Αλλά τότε $f(\lambda y + (1-\lambda) z) \leq \lambda f(y) + (1-\lambda) f(z) <$
$< \lambda M + (1-\lambda) M = M$.

ΑΤΟΠΟ. #

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω X τ.δ.χ. και $C \subseteq X$ κυρτό. Ένα σημείο $x \in C$ καλείται **ακραίο** αν $\forall y, z \in C$; $\forall \lambda \in (0,1)$ αν
$x = \lambda y + (1-\lambda) z \Rightarrow x = y = z$.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω X σύνολο και $(A_i)_{i \in I}$ οικογένεια υποσυνόλων του X. Θα λέμε ότι η $(A_i)_{i \in I}$ έχει την **ιδιότητα της πεπερασμένης τομής** αν $\forall J \subseteq I$ πεπερασμένο $\bigcap_{i \in J} A_i \neq \emptyset$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.

Έστω X συμπαγής τ.χ. και $(F_i)_{i \in I}$ οικογένεια από κλειστά υποσύνολα του X με την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής.
Τότε $\bigcap_{i \in I} F_i \neq \emptyset$.

Απόδειξη :

Έστω όχι, δηλαδή $\bigcap_{i\in I} F_i = \emptyset$.

Τότε, $\forall i\in I$ θέτουμε $\mathcal{U}_i = X\setminus F_i$.

Τότε κάθε $\mathcal{U}_i$ είναι ανοιχτό του X και

$$\bigcup_{i\in I}\mathcal{U}_i = \bigcup_{i\in I}(X\setminus F_i) = X\setminus\left(\bigcap_{i\in I}F_i\right) = X.$$

Άρα, η οικογένεια $(\mathcal{U}_i)_{i\in I}$ είναι ανοικτό κάλυμμα του X

X συμπαγής

$\Longrightarrow \exists$ πεπερασμένο υποκάλυμμα

Έστω τα $\mathcal{U}_{i_1},\dots,\mathcal{U}_{i_k}$ με $\bigcup_{n=1}^{k}\mathcal{U}_{i_n} = X$.

Άρα, $\bigcap_{n=1}^{k}F_{i_n} = \bigcap_{n=1}^{k}(X\setminus\mathcal{U}_{i_n}) = X\setminus\left(\bigcup_{n=1}^{k}\mathcal{U}_{i_n}\right) = X\setminus X = \emptyset$.

ΑΤΟΠΟ, αφού η $(F_i)_{i\in I}$ έχει την ιδιότητα της πεπ. τομής

#

ΠΟΡΙΣΜΑ

Έστω X τ.χ. και $(K_i)_{i\in I}$ οικογένεια από συμπαγή υποσύνολα του X με την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής.

Τότε $\bigcap_{i\in I}K_i \neq \emptyset$.

ΛΗΜΜΑ 3

Έστω X τοπικά κυρτός τ.δ.χ., $C\subset X$ συμπαγές κυρτό και $F\subset C$ ακραίο υποσύνολο του C. Τότε, το F περιέχει τουλάχιστον ένα ακραίο σημείο του C.

Απόδειξη:

Θέτουμε $\mathbb{P} = \{K\subseteq F : K$ ακραίο του $C\}$.

Στο $\mathbb{P}$ ορίζουμε την $\leq$ με $K_1\leq K_2 \iff K_2\subseteq K_1$.

Το $\mathbb{P}$ είναι μερικά διατεταγμένο σύνολο.

Έστω $\mathcal{C}=(k_i)_{i\in I}$ αλυσίδα του $\mathbb{P}$, δηλαδή $\forall i,j\in I$ ή
$k_i \leq k_j$ ($k_j \subseteq k_i$) ή $k_j \leq k_i$ ($k_i \subset k_j$).

Θέτουμε $K = \bigcap_{i\in I} k_i$

Αφού το $\mathcal{C}$ είναι αλυσίδα $\Rightarrow$ Η οικογένεια $(k_i)_{i\in I}$ έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής $\Rightarrow$

$\xrightarrow{\text{Πόρισμα}}$ $K\neq\emptyset$ και κλειστό (ως τομή κλειστών).

Θ.δ.ο. το K είναι ακραίο υποσύνολο του C.

Πράγματι,

έστω $y,z\in C$, $\lambda\in(0,1)$ με $\lambda y+(1-\lambda)z \in K \Leftrightarrow$

$\lambda y+(1-\lambda)z\in \bigcap_{i\in I} k_i \Leftrightarrow \lambda y+(1-\lambda z)\in k_i,\ \forall i\in I. \Leftrightarrow$

$\overset{k_i \text{ ακραία}}{\Longleftrightarrow} y,z\in k_i, \forall i\in I \Leftrightarrow y,z\in \bigcap_{i\in I} k_i = k.$

Άρα, $k\in\mathbb{P}$ και $k\subseteq k_i, \forall i\in I \Leftrightarrow k_i\leq k, \forall i\in I \Leftrightarrow$
το K είναι άνω φράγμα της $\mathcal{C}$.

Άρα

από το Λήμμα Zorn $\exists$ μεγιστικό του $\mathbb{P}$.

Ισχυριζόμαστε ότι το K (μεγιστικό) είναι μονοσύνολο.

Έστω όχι, δηλ. $\exists\, k_1,k_2\in K$ με $k_1\neq k_2$.

Αφού ο X είναι τοπικά κυρτός $\Rightarrow$

$\exists f: X\to\mathbb{R}$ γραμμική κ' συνεχής με $f(k_1)<f(k_2)$

Θέτουμε $M=\max\{f(x) : x\in k\}$.

Τότε το σύνολο $F=\{x\in k : f(x)=M\}$ είναι κλειστό, ακραίο υποσύνολο του K και $k_1\notin F \Rightarrow F\subsetneq K$.

$\left.\begin{array}{l} K \text{ ακραίο του } C \\ F \text{ ακραίο του } K \end{array}\right\} \Rightarrow$ Το F ακραίο του C $\Rightarrow$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} F\in P \\ F\subsetneq K \end{array}\right\} \Rightarrow K\leq F$ Άτοπο γιατί K μεγιστικό.

\#

Συμβολισμός :

Αν X δ.χ. και $G \subseteq X$ κυρτό, τότεμε $Ext(G)$ συμβολίζουμε το σύνολο των ακραίων σημείων του G.

ΘΕΩΡΗΜΑ (Krein-Milman)

Έστω X τοπικά κυρτός τ.δ.χ. και $G \subseteq X$ συμπαγές κυρτό. Τότε, $\overline{conv}\ Ext(G) = G$.

Απόδειξη:

Από λήμμα 3, $Ext(G) \neq \emptyset$.

Θέτουμε $F = \overline{conv}\ Ext(G)$.

Προφανώς, F G. Έστω $F \subsetneq G$, δηλαδή $\exists x \in G$ με $x_0 \notin F$.

$$\left.\begin{array}{l} F \text{ συμπαγές (ως κλειστό υποσύνολο συμπαγούς), κυρτό} \\ \{x_0\} \text{ συμπαγές} \\ \quad F \cap \{x_0\} = \emptyset \end{array}\right\} \xrightarrow[X\ \text{τ.κ.}]{\text{2ο Διαχ.}}$$

$\Longrightarrow \exists f : X \to \mathbb{R}$ γραμμική συνεχής με $\sup\limits_{x\in F} f(x) < f(x_0)$.

Θέτουμε $M = \max\{f(x) : x \in G\}$ και $K \overset{x\in F}{=} \{x \in G : f(x) = M\}$

Τότε, το K είναι ακραίο υποσύνολο του G και

$K \cap F = \emptyset \xRightarrow{F \supseteq Ext(G)} K \cap Ext(G) = \emptyset$.

Από λήμμα 3, $\exists z \in K$ με $z \in Ext(G)$ ΑΤΟΠΟ

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

(1) Το Θ. Krein-Milman ΔΕΝ ισχύει όταν ο X δεν είναι τοπικά κυρτός. Αντιπαράδειγμα μπορεί να βρεθεί στον $\underbrace{L^{1/2}[0,1]}$, όπου $L^{1/2}[0,1] = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} ;$ Lebesgue ολοκληρώσιμες τ.ω. $\int |f|^{1/2} d\lambda < +\infty\}$.

↓ δεν είναι τ.κ. αφού ΔΕΝ έχει βάση περιοχών του 0.

(2) Αν X χώρος Banach, τότε η $\overline{B}_{X^*}$ είναι κυρτό και ασθενώς * συμπαγές.

Αφού ο X^* με την ασθενή * τοπολογία είναι τ.κ.τ.δ.χ.

$\Rightarrow \forall X$ χωρο Banach $\text{Ext}\,\overline{B}_{X^*} \neq \emptyset$ και

$$\overline{\text{conv}}^{w*}\,\text{Ext}(\overline{B}_{X^*}) = \overline{B}_{X^*}.$$

Για τον X, γενικά, τα παραπάνω δεν ισχύουν.

□

Παραδείγματα.

⚠ (1) $\boxed{\text{Ext}\,\overline{B}_{c_0} = \emptyset.}$

Απ/ Θδο $\forall x\in \overline{B}_{c_0}$ $\exists y_1, y_2 \in \overline{B}_{c_0}$ με $y_1 \neq y_2 \neq x$ και $x=\frac{1}{2}y_1+\frac{1}{2}y_2$. $(x=\lambda y_1 +$

Πράγματι, έστω $x\in\overline{B}_{c_0}$ με $x=(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \xRightarrow{x\in c_0} \lim_n a_n = 0$ και $|a_n|\le 1$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

$\exists n_0$ τ.ω. $\forall n\ge n_0$ $|a_n|\le \frac{1}{4}$.

Ορίζουμε $y_1=(\beta_n)_n$ και $y_2=(\gamma_n)_n$ με

$$y_1 = \begin{cases} \beta_n = a_n, & \text{αν } n\neq n_0 \\ \beta_n = a_n+\frac{1}{4}, & \text{αν } n=n_0 \end{cases}, \quad y_2 = \begin{cases} \gamma_n = a_n, & n\neq n_0 \\ \gamma_n = a_n-\frac{1}{4}, & n=n_0 \end{cases}.$$

Τότε, $\lim_n \beta_n = 0$ και $|\beta_n|\le 1$, $\forall n\in\mathbb{N} \Rightarrow y_1\in\overline{B}_{c_0}$

Ομοίως, $\lim_n \gamma_n = 0$ και $|\gamma_n|\le 1$, $\forall n\in\mathbb{N} \Rightarrow y_2\in\overline{B}_{c_0}$.

$$\frac{1}{2}y_1+\frac{1}{2}y_2 = (a_n)_n = x.$$

(2) $\boxed{\mathrm{Ext}\,\overline{B}_{C[0,1]} = \{1,-1\}}$ Ο $\overline{B}_{C[0,1]}$ είναι απειροδιάστατος χ. με δύο ακραία σημεία, τις σταθερές συναρτήσεις 1, -1.

$\mathrm{Ext}\,\overline{B}_{C[0,1]} \supseteq \{-1, 1\}$.

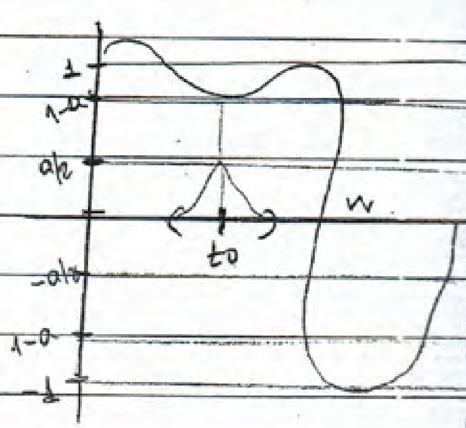
Πράγματι,

έστω $f, g \in C[0,1]$ με $\|f\|_\infty, \|g\|_\infty \leq 1$ και $\lambda \in (0,1)$ με $\lambda f + (1-\lambda) g = 1 \Rightarrow \lambda f(x) + (1-\lambda) g(x) = 1$, $\forall x \in$

Τότε, υποχρεωτικά παίρνουμε το ζητούμενο.

Έστω $f \in \overline{B}_{C[0,1]}$ με $f \neq \pm 1 \Rightarrow \exists t_0 \in [0,1]$ με $|f(t_0)| < 1 \Rightarrow \exists \varepsilon > 0$ τ.ω. $\forall t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$
$|f(t)| < 1-a$, για κάποια $a > 0$ αρκετά μικρά.

Ορίζουμε $h_1 = f + \omega$ με $\|h_1\|_\infty \leq 1$.
$h_2 = f - \omega$ $\|h_2\|_\infty \leq 1$.



Τότε,

$$f = \frac{1}{2} h_1 + \frac{1}{2} h_2$$

10/01/2005

ΘΕΩΡΗΜΑ (James)

Έστω X χώρος Banach. Τ.Α.Ε.Ι.

(1) Ο X είναι αυτοπαθής.

(2) $\forall f \in X^* \ \exists x_0 \in \overline{B}_X$ τ.ω. $f(x_0) = \|f\|$.

Παράδειγμα:

$X = c_0$

Θδο αν $f \in X^* = \ell_1$ $\left(f = (\beta_n)_n \text{ με } \sum |\beta_n| < +\infty\right)$

έχει την εξής ιδιότητα:

(P) $\exists x_0 \in \overline{B}_{c_0}$ με $f(x_0) = \|f\|$ τότε

$\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\forall n \geq n_0$ $\beta_n = 0$

Απόδειξη:

($\Leftarrow$) Έστω $f = (\beta_n)_n$ τ.ω. $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ $\forall n \geq n_0$ $\beta_n = 0$

Ορίζουμε $x = (a_n) = \begin{cases} a_n = \text{sign}(\beta_n), & \text{αν } n < n_0 \\ a_n = 0, & \text{αν } n \geq n_0 \end{cases}$

Τότε $x \in \overline{B}_{c_0}$ και

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \beta_n = \sum_{n < n_0} a_n \beta_n = \sum_{n < n_0} \text{sign}(\beta_n) \cdot \beta_n =$$

$$= \sum_{n < n_0} |\beta_n| = \|f\|.$$

*

($\Rightarrow$) Έστω $f = (\beta_n)_n$ τ.ω. $\beta_n \neq 0$ για άπειρα n

Έστω $x \in \overline{B}_{c_0}$ τυχαίο. Δηλαδή $x = (a_n)_n$ με $a_n \to 0$ και $|a_n| \leq 1$ $\forall n$ $\exists k \in \mathbb{N}$ $\forall n \geq k$ $|a_n| \leq \frac{1}{2}$.

Άρα,

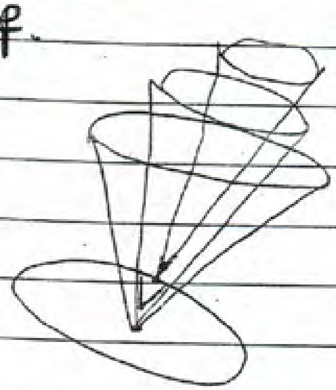
$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \beta_n = \sum_{n < k} a_n \beta_n + \sum_{n \geq k} a_n \beta_n \leq$$

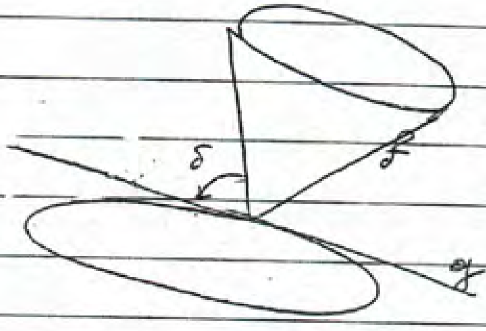
$$\leq \sum_{n < k} |\beta_n| + \frac{1}{2} \sum_{n \geq k} |\beta_n| <$$

$$< \sum_{n < k} |\beta_n| + \sum_{n \geq k} |\beta_n| = \sum_{n} |\beta_n| = \|f\|$$

✱

f.





$\|f-g\|<\varepsilon$

ΛΗΜΜΑ 1

Έστω X χώρος Banach, $f,g\in X^*$ με $\|f\|=\|g\|=1$ και $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$. Αν $\|g|_{\ker f}\|<\varepsilon$ τότε ή
$\|f+g\|\leq 2\varepsilon$ ή $\|f-g\|\leq 2\varepsilon$.

$$\left.\begin{array}{l}\ker f \supset \ker g \Rightarrow f=ag \\ \|f\|=\|g\|=1\end{array}\right\} \Rightarrow 1=\|f\|=\|ag\|=|a|\,\|g\|=|a|$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow f=+g \\ \text{ή } f=-g\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}f-g=0 \\ \text{ή } f+g=0\end{array}$$

Απόδειξη

Θέλουμε $\varphi:\ker f\to\mathbb{R}$ με $\varphi(x)=g(x)$

Από υπόθεση $\|\varphi\|\leq\varepsilon$. Από Θ. H-B

$\exists h:X\to\mathbb{R}$ γραμμική συνεχής με $\|h\|\leq\varepsilon$

$h|_{\ker f}=g$

Δηλαδή αν $x\in\ker f \Rightarrow g(x)=h(x) \Rightarrow x\in\ker(g-h)$.

Άρα $\ker f\subset\ker(g-h)$

Τότε από λήμμα για την τομή των kernel

$\exists a\in\mathbb{R}$ τ.ω. $g-h=af$

$$|a|=\|af\|=\|g-h\|\leq\|g\|+\|h\|\leq 1+\varepsilon$$

και

$$1-\varepsilon \leq \|g\|-\|h\| \leq \|g-h\| = \|af\| = |a|$$

Άρα, $\big|1-|a|\big| \leq \varepsilon$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1Η: $a>0$

Τότε $\|g-f\| = \|h+af-f\| = \|h+(a-1)f\| \leq$

$\leq \|h\| + |1-a|\cdot\|f\|$

$\leq \|h\| + |1-a| \leq \underline{\underline{2\varepsilon}}$.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2Η: $a<0$

Τότε $\|g+f\| = \|h+af+f\| = \|h+(a+1)f\| \leq$

$\leq \|h\| + \|(a+1)f\| \leq$

$\leq \|h\| + \big|1-|a|\big|\cdot\|f\| \leq \underline{\underline{2\varepsilon}}$

#

ΟΡΙΣΜΟΣ 1

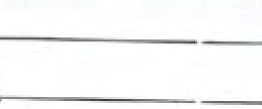
Έστω X χώρος Banach και $K\subseteq X$. Το K καλείται ΚΩΝΟΣ αν

(1) Το K κυρτό.

(2) $\forall x\in K$, $\forall \lambda>0 \Rightarrow \lambda x\in K$.

(3) $\forall x\in K$, $x\neq 0 \Rightarrow -x\notin K$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2



Έστω $f\in X^*$ με $\|f\|=1$ και $\delta>0$. Ορίζουμε

$$K(f,\delta) = \{x\in X : f(x) \geq \delta\|x\|\}.$$

ΛΗΜΜΑ 2

Έστω $f \in X^*$ $\|f\|=1$ και $\delta>0$

Τότε το $K(f,\delta)$ είναι κλειστός κώνος με εσωτερικό.

(Άσκηση).

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω $f \in X^*$, $\|f\|=1$ και $\delta>0$.

$\forall x,y \in X$ ορίζουμε

$$x \leq y \iff y \in x+K(f,\delta)$$
$$\iff y-x \in K(f,\delta)$$
$$\iff f(y-x) \geq \delta\|y-x\|.$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

(1) Η $\leq$ είναι αυτοπαθής (δηλ. $x \leq x$)

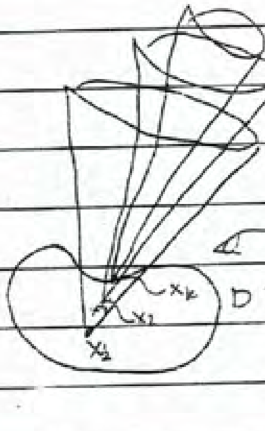
(2) Η $\leq$ είναι μεταβατική, δηλ. $x \leq y$ και $y \leq z \Rightarrow x \leq z$

Πράγματι,
$$\left.\begin{array}{l} x \leq y \iff f(y-x) \geq \delta\|y-x\| \\ y \leq z \iff f(z-y) \geq \delta\|z-y\| \end{array}\right\} \overset{\oplus}{\Longrightarrow}$$

$$\Rightarrow f(z-x) \geq \delta\left(\|y-x\|+\|z-y\|\right) \geq \delta\,\|y-x+z-y\| = \\ = \delta\,\|z-x\|$$

$\iff \underline{x \leq z}$

Άρα "$\leq$" είναι μερική διάταξη.

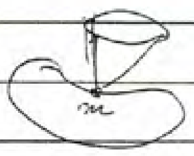


Επαγωγικά,

← Φτάνουμε σε οριακό σημείο που η τομή του κώνου με το D είναι ένα σημείο.

ΛΗΜΜΑ 3

Έστω X χώρος Banach και $D \subseteq X$ κλειστό και φραγμένο.
Τότε, $\forall f \in X^*$ με $\|f\| = 1$ και $\forall \delta > 0$, $\exists m \in D$ τ.ω.
$D \cap (m + K(f,\delta)) = \{m\}$



Απόδειξη:

Στο D θεωρούμε τη μερική διάταξη

$$x \leq y \iff y - x \in K(f,\delta)$$

Θα δείξουμε ότι κάθε αλυσίδα C του $(D, \leq)$ έχει άνω φράγμα.
Θα κάνουμε την απόδειξη υποθέτοντας ότι η C είναι ακολουθία, δηλαδή

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_n \leq x_{n+1}$$

Έστω $n \in \mathbb{N}$.
Τότε $x_{n+1} \geq x_n \Rightarrow f(x_{n+1} - x_n) \geq \delta \|x_{n+1} - x_n\| \geq 0$.

$$\Rightarrow f(x_{n+1}) \geq f(x_n).$$

Άρα, η ακολουθία $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ είναι αύξουσα ακολουθία πραγματικών αριθμών.
Αφού το D είναι φραγμένο, έπεται ότι η $(f(x_n))_n$ είναι φραγμένη, άρα συγκλίνουσα.

Αν $n < m$

$$f(x_m) - f(x_n) \geq \delta \| x_m - x_n\| \quad \circledast$$

Άρα, η $(x_n)_n$ είναι Cauchy, άρα $x_n \to x \in D$, αφού D κλειστό.
Θδο $x \geq x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$
Πράγματι, από την $\circledast$ για $m \to +\infty$

$$f(x) - f(x_n) \geq \delta \|x - x_n\| \Rightarrow x \geq x_n, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

$\Rightarrow$ x είναι άνω φράγμα.

Από Λήμμα Zorn, υπάρχει $m \in D$ μεγιστικό της $\leq$

Ισχύει ότι

$$D \cap \left(m + K(f,\delta)\right) = \{m\}$$

Προφανώς αφού $0 \in K(f,\delta) \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow m \in m + K(f,\delta) \\ m \in D \end{array}\right\} \Rightarrow \{m\} \subseteq D \cap \left(m + K(f,\delta)\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Έστω ότι } \exists y \in D \cap \left(m + K(f,\delta)\right) \text{ με } y \neq m. \\ y \in D \\ y \in m + K(f,\delta) \Leftrightarrow y - m \in K(f,\delta) \Leftrightarrow m \leq y \\ y \neq m \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Το m <u>δεν</u> είναι μεγιστικό, Άτοπο.

#

14/01/2005

Λήμμα 4

Έστω X χώρος Banach, $f,g \in S_{X^*}$ και $\frac{1}{2} > \delta > 0$ τ.ω. $\forall x \in K(f, \frac{\delta}{2+\delta}) \Rightarrow g(x) \geq 0$.
Τότε, $\|f-g\| \leq 2\delta$

Απόδειξη:

Αφού $\|f\| = 1 \Rightarrow \exists x_0 \in X$ με $\|x_0\| = 1$ και $f(x_0) > \frac{1+\delta}{2+\delta}$.

Έστω τώρα $y \in \ker f$ με $\|y\| \leqslant \frac{1}{\delta}$.

$$\|x_0 \pm y\| \leq \|x_0\| + \|y\| \leq 1 + \frac{1}{\delta} = \frac{1+\delta}{\delta} = \frac{1+\delta}{2+\delta}\,\frac{2+\delta}{\delta} < $$
$$< f(x_0)\,\frac{2+\delta}{\delta} = f(x_0 \pm y)\,\frac{2+\delta}{\delta}$$

$$\Rightarrow \frac{\delta}{2+\delta}\|x_0 \pm y\| < f(x_0 \pm y) \Rightarrow x_0 \pm y \in K\left(f, \frac{\delta}{2+\delta}\right)$$

$$\Rightarrow g(x_0 \pm y) \geq 0 \Rightarrow |g(y)| \leq |g(x_0)| = 1.$$

Δηλαδή, $\forall y \in \ker f$ με $\|y\| \leq \frac{1}{\delta} \Rightarrow |g(y)| \leq 1$

Θα υπολογίσουμε το $\|g|_{\ker f}\|$.

Έστω $z \in \ker f$ με $\|z\| = 1$. Τότε θέτουμε $y = \frac{z}{\delta}$. Τότε, $y \in \ker f$, και [illegible] $\|y\| = \left\|\frac{z}{\delta}\right\| = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow |g(y)| \leq 1 \Rightarrow |g(z)| \leq \delta$.

Άρα, $\|g|_{\ker f}\| = \sup\{|g(z)| : z \in \ker f$ με $\|z\| = 1\} \leq \delta$.

Συνεπώς, από Λήμμα 1 $\Rightarrow$

ή $\|f+g\| \leq 2\delta$ ή $\|f-g\| \leq 2\delta$.

Για να τελειώσουμε την απόδειξη αρκεί νδο $\|f+g\| > 2\delta$.

Πράγματι,
αφού $\|f\| = 1$ $\exists x_0 \in X$ με $\|x_0\| = 1$ και
$f(x_0) > 2\delta$.

Έχουμε, $\|x_0\| = 1 = \frac{2+\delta}{\delta} \cdot \frac{\delta}{2+\delta} < \frac{2+\delta}{\delta} \cdot 2\delta < \frac{2+\delta}{\delta} f(x_0)$

$$\Rightarrow f(x_0) \geq \frac{\delta}{2+\delta} \cdot \|x_0\| \Rightarrow x_0 \in K\left(f, \frac{\delta}{2+\delta}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g(x_0) \geq 0.$$

Συνεπώς, $\|f+g\| = \sup\{f(x)+g(x) : \|x\| = 1\} \geq f(x_0)+g(x_0)$
$> 2\delta + 0 = 2\delta$.

#

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΙ:

Έστω X χώρος Banach και $C \subseteq X$ κλειστό, κυρτό.
Θέτουμε:
$\text{Supp}(C) = \{f \in S_{X^*} : \exists c_0 \in C$ τ.ω. $f(c_0) = \sup\{f(c) : c \in C\}\}$.
Επιπλέον,
$\text{SuppP}(C) = \{x \in \partial C : \exists f \in X^*$ τ.ω. $f(x) = \sup\{f(c) : c \in C\}\}$.

⚠ **ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:**
Αν $\text{Supp}(C)$ είναι νορμ-πυκνό στην S_{X^*}, τότε
$\forall f \in X^*$ και $\forall \varepsilon > 0$ $\exists g \in X^*$ τ.ω.
(α) $\|f-g\| < \varepsilon$
(β) $\exists c_0 \in C$ τ.ω. $g(c_0) = \sup\{g(c) : c \in C\}$.

Πράγματι,

έστω $f \in X^*$ και $\varepsilon > 0$. Θέτουμε $k = \|f\|$.
Τότε $\frac{f}{k} \in S_{X^*}$. Αφού $Supp(C)$ νορμ-πυκνό στην S_{X^*}, $\exists h \in Supp(C)$ $(\|h\| = 1)$ τ.ω. $\|\frac{f}{k} - h\| \leq \frac{\varepsilon}{k} \Rightarrow$

$\Rightarrow \|f - kh\| < \varepsilon$. Δηλαδή το $kh = g$ ικανοποιεί το (α) ή το (β)

*

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u> (Bishop - Phelps, Μέρος I).
Έστω X πραγματικός χώρος Banach και $C \subseteq X$ κλειστό, κυρτό και φραγμένο. Τότε, το $Supp(C)$ είναι νορμ-πυκνό στην S_{X^*}.

<u>Απόδειξη</u>:
Έστω $f \in S_{X^*}$ και $\varepsilon > 0$. Αρκεί νδο $\exists g \in Supp(C)$ τ.ω. $\|f - g\| < \varepsilon$. Επιλέγουμε $\delta > 0$ τ.ω.
(I) $2\delta < \varepsilon$, (II) $2\delta < 1/2$.
Θέτουμε τον κώνο $K = K(f, \frac{\delta}{2+\delta})$. Από Λήμμα 3, $\exists m \in C$ τ.ω. $C \cap (m + K) = \{m\}$.
Αλλά τότε,

$$C \cap (m + Int(k)) = \emptyset$$

$$\left.\begin{array}{l} C \text{ κλειστό, κυρτό} \\ m + Int(k) \text{ ανοιχτό, κυρτό} \\ C \cap \{m + Int(k)\} = \emptyset \end{array}\right\} \xRightarrow{1^{o}\ \Delta\iota\alpha\chi.} \begin{array}{l} \exists g \in X^* \ \|g\| = 1 \text{ τ.ω.} \\ g(c) \leq g(m + k) \\ \forall c \in C, \ \forall k \in Int(k). \end{array}$$

$\Rightarrow g(c) \leq g(m + k)$, $\forall c \in C$, $\forall k \in K$. $\circledast$
Αλλά, $0 \in K \Longrightarrow g(c) \leq g(m)$, $\forall c \in C$ και $m \in C \Rightarrow$
$\Rightarrow g(m) = \sup\{g(c) : c \in C\} \Longrightarrow g \in Supp(C)$.

Έστω $k \in K = K(f, \frac{\delta}{2+\delta})$.

Από την $(*)$ για $c = m$ έχουμε,

$$g(m) \leq g(m+k) \Rightarrow g(k) \geq 0.$$

Από το Λήμμα 4 $\Rightarrow \|f-g\| \leq 2\delta < \varepsilon$

#

ΘΕΩΡΗΜΑ (Bishop - Phelps - Μέρος II).

Έστω πραγματικός χώρος Banach και $C \subseteq X$ κλειστό, κυρτό. Τότε το $\mathrm{Supp}\,P(C)$ είναι νορμ-πυκνό στο ∂C.

Απόδειξη:

Έστω $x_0 \in \partial C$ και $\varepsilon > 0$.

Αρκεί νδο $\exists z_0 \in \partial C$ τ.ω. $z_0 \in \mathrm{Supp}\,P(C)$ και $\|x_0 - z_0\| < \varepsilon$

Επιλέγουμε $y_0 \notin C$ τ.ω. $\|x_0 - y_0\| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Από 2ο διαχωριστικό για τα

$$\left.\begin{array}{l} C \text{ κλειστό κυρτό} \\ \{y_0\} \text{ συμπαγές κυρτό} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \exists f \in X^* \quad \|f\| = 1 \text{ και} \\ f(c) < f(y_0), \ \forall c \in C. \end{array}$$

Ειδικότερα $f(x_0) < f(y_0)$.

Θεωρούμε τον κώνο: $K(f, \frac{1}{2}) = \{x : f(x) > \frac{1}{2}\|x\|\}$.

Θέτουμε $D = C \cap (x_0 + k)$.

Αν $z \in D \Rightarrow z \in x_0 + k$

$$\Rightarrow z - x_0 \in k \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\|z - x_0\| < f(z - x_0) = f(z) - f(x_0) < f(y_0) - f(x_0) =$$

$$= f(y_0 - x_0) \leq \|f\| \, \|y_0 - x_0\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$\Rightarrow \|z-x_0\| < \varepsilon, \ \forall z\in D.$

Το σύνολο D είναι κλειστό, κυρτό και φραγμένο.
Άρα, από Λήμμα 3, $\exists m\in D$ τ.ω.

$$D\cap(m+K) = \{m\}.$$

Ισχυριζόμαστε ότι

$$C\cap(m+K) = \{m\} \Rightarrow C\cap(m+\text{Int}(K)) = \emptyset.$$

Προφανώς, $C\cap(m+K) \supset D\cap(m+K) = \{m\}$.
Επιπλέον $D\cap(m+K) = C\cap(x_0+K)\cap(m+K) = C\cap(m+K)$
διότι αν $d\in D \Rightarrow d \geq k_0$

$$(d+K)\cap(x_0+K) = (d+K).$$

Τώρα, όπως στο Μέρος I

$$\left.\begin{array}{l} C \text{ κλειστό κυρτό} \\ m+\text{Int}(K) \text{ ανοιχτό κυρτό} \\ C\cap(m+\text{Int}(K)) = \emptyset \end{array}\right\} \xRightarrow{1^{o}\ \text{Διαχ.}} \begin{array}{l} \exists g\in S_{X^*},\ \|g\|=1 \\ \text{τ.ω. } g(c)\leq g(m+k),\ \forall c\in C \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \forall k\in K \end{array}$$

$\Rightarrow g(m) = \sup\{g(c) : c\in C\} \Rightarrow m\in \text{Supp}\,P(C),$
αφού $m\in D \Rightarrow \|x_0-m\| < \varepsilon$.

#

SOS Ασκήσεις

Για επόμενη Παρασκευή:
1) Ασθενής Σύγκλιση σε ακολουθιακούς χώρους.
2) Ακραία Σημεία της Μπάλας του c_0 και του ℓ

{H-B, Αν. Απεικόνισης - ?}

24/01/2005

{διαχ. αυτ. ⇔ B ασθ. τοπ → ασθ. μετρικός
Krein-Millman ⇒ Bishop-Phelps}

Παρατήρηση:

→ Κάθε ασθενώς κλειστό είναι και $\|\cdot\|$-κλειστό.

Το αντίστροφο δεν ισχύει.

π.χ. Η S_X είναι $\|\cdot\|$-κλειστό αλλά όχι ασθενώς κλειστό.

$\overline{S_X}^{w} = (\overline{B}_X, w)$ ⇝ Συμπαγής μετρικός.

Η σφαίρα είναι πυκνή στην B_X

⇒ Αν $\overline{A} = Y$ τότε για $y \in Y$ τυχαίο $\exists (y_n)_n \in A$ τ.ω.

$y_n \to y$. Εφαρμόζω αυτό στον $\overline{B}_X$

Ισχυρίζομαι: $B = \{y_n\}$, $y_n \xrightarrow{w} 0$

$\exists z_n \in \operatorname{conv}\{y_n\}$ τ.ω. $z_n \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ (άρα z_n δεν $\in S_X$).

Γιατί $\exists z_n$?

Θεωρώ το σύνολο $B' = \overline{\operatorname{conv}}^{w} B = \overline{\operatorname{conv} B}^{w}$.

• B' κυρτό και $\|\cdot\|$-κλειστό. Άρα, και ασθενώς κλειστό. Πράγματι,

Αφού $y_n \xrightarrow{w} 0 \Rightarrow 0 \in \overline{B}^{w}$

Από την άλλη $\overline{\operatorname{conv}} B = B'$ είναι ασθενώς κλειστό

$\overline{\operatorname{conv}} B = B' = \overline{B'}^{w} \supseteq \overline{B}^{w} \ni 0$ (αφού $B \subseteq B'$).

$\Rightarrow 0 \in \overline{\operatorname{conv}} B$,

δηλαδή $\exists (z_n)$ με $z_n \in \operatorname{conv} B$ τ.ω. $z_n \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Το γεγονός ότι ο χώρος είναι ~~συμπαγής~~ αυτοπαθής κ' διαχ. το χρησιμοποιήσαμε για να εξασφαλίσουμε την ύπαρξη της y_n. (τη μετρικοποιησιμότητα της $\overline{B}_X$ με την ασθενή τοπολογία)

*

→ Ξέρουμε ότι $\operatorname{Ext} B_{c_0} = \emptyset$.

ΕΡΩΤΗΣΗ: $\exists$ χώρος Banach X ώστε $X^* = c_0$.

① Μόνο οι δυϊκοί χ.Β. έχουν ασθενή-* τοπολογία.

(c_0, w^*) τ.κ.τ.δ.χ.

$\Rightarrow (B_{c_0}, w^*)$ ασθενώς * συμπαγής κ' κυρτός (Alaogl

Θ. Krein-Milman $\Rightarrow \overline{\text{σπν}\,Ext(B_{c_0})} = \overline{B_{c_0}} = \emptyset$. <u>ΑΤΟΠΟ</u>.

#.

$(\ell_p)^* = \ell_q$.

$D = \{(a_n)_n : \exists k \ \forall n \geq k \ a_n = 0\} = c_{00}(\mathbb{N})$.

Τότε $\overline{D} = \ell^q$.

<u>Απδ</u>

$\overline{D} = \ell^q \iff \forall x = (a_n)_n \in \ell_q \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists y \in D = c_{00}(\mathbb{N})$.

τ.ω. $\|x - y\|_q < \varepsilon$.

Έστω $x = (a_n)_n \in \ell_q$, δηλαδή $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^q < +\infty$.

επειδή $\sum |\,|^q < \infty$ δυν. συγκλίνει.

Έστω $\varepsilon > 0$ τυχαίο. Τότε $\exists k \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\sum_{n=k+1}^{\infty} |a_n|^q < \varepsilon^q$

Θέτουμε $y \in c_{00}(\mathbb{N})$, $y = (\beta_n)_n$ με $\beta_n = \begin{cases} a_n, & n \leq k \\ 0, & αν\ n > k \end{cases}$

$$\|x - y\|_q = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n - \beta_n|^q\right)^{1/q} = \left(\sum_{n=k+1}^{\infty} |a_n|^q\right)^{1/q} < (\varepsilon^q)^{1/q} = \underline{\underline{\varepsilon}}.$$

* Αν $(e_n)_n$ η standard βάση του $\ell^p(\mathbb{N})$ για $1 < p < +\infty$, τότε $e_n \xrightarrow{w} 0$.

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ $\|e_n\|_p = 1$, άρα $(e_n)_n$ είναι φραγμένη.

Αφού $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι φραγμένη, αρκεί νδο $f(e_n) \to 0$, $\forall f \in D$.

$f \in D = c_{00}(\mathbb{N}) \iff f = (a_k)_k$, τ.ω. $\exists k_0 \in \mathbb{N}$, $\forall k \geq k_0$ $a_k = 0$.

Αν $x = (\gamma_k) \in \ell_p \Rightarrow f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \gamma_k$

Έστω $n \in \mathbb{N}$ τυχαίο.

$f(e_n) = a_n$. Αφού $f \in c_{00}(\mathbb{N})$, $a_n \to 0$ (είναι τελικά μηδέν.)

Δηλαδή, $f(e_n) \to 0$, $\forall f \in D$. $\Rightarrow e_n \xrightarrow{w} 0$ #

Στον ℓ_1 ΔΕΝ ΙΣΧΥΟΥΝ ΤΑ ΠΑΡΑΠΑΝΩ.
επειδή το D δεν είναι $\|\cdot\|$ πυκνό στον $\ell_\infty = (\ell_\infty)^* = \ell_1)$
$\Rightarrow \exists$ στοιχείο του ℓ_∞ που έχει θετική απόσταση
απ' όλα τα στοιχεία του D.

(Ο ℓ_∞ δεν είναι διαχωρίσιμος $\Rightarrow \nexists$ αριθμήσιμο πυκνό υποσ..)

- ΘΕΛΟΥΜΕ Ν.Δ.Ο ΕΝΑΣ ΧΩΡΟΣ BANACH X ΕΙΝΑΙ ΜΗ ΔΙΑΧΩΡΙΣΙΜΟΣ.

Άσκηση

Αρκεί να βρούμε $(x_i)_{i\in I} \subset X$ και $\varepsilon > 0$ τ.ω.
(1) Το I να είναι υπεραριθμήσιμο.
(2) $\forall i,j \in I$ με $i \neq j$ $\|x_i - x_j\| \geq \varepsilon$.
$\Rightarrow$ Ο χωρος ΜΗ διαχωρίσιμος.

Θα το εφαρμόσουμε στον $\ell_\infty(\mathbb{N})$.
Για $A \subseteq \mathbb{N}$ θέτουμε $X_A \in \ell_\infty(\mathbb{N})$ με $\overset{\chi_A}{X_A} = (a_n)_n$ όπου
$a_n = \begin{cases} 1, & n \in A \\ 0, & n \notin A. \end{cases}$
Αν $A, B \subseteq \mathbb{N}$ με $A \neq B$ τότε $\|X_A - X_B\|_\infty \geq 1$
$(X_A)_{A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})}$ υπεραριθμήσιμη.

$\Rightarrow \ell_\infty(\mathbb{N})$ δεν είναι διαχωρίσιμος.

Ακραία σημεία της B_{ℓ_1}.

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΑΣΘΕΝΕΙΣ ΤΟΠΟΛΟΓΙΕΣ

Γενικά.

Δίνουμε τους ακόλουθους γενικούς ορισμούς.

ΟΡΙΣΜΟΣ 0.1. *Έστω X σύνολο και $\mathcal{F} = (f_i)_{i\in I}$ μια οικογένεια συναρτήσεων $f_i : X \to \mathbb{R}$. Θα λέμε ότι η $\mathcal{F}$ διαχωρίζει τα σημεία του X, αν για κάθε $x, y \in X$ με $x \neq y$ υπάρχει $i \in I$ τέτοιο ώστε $f_i(x) \neq f_i(y)$. Με $(X, \mathcal{F})$ συμβολίζουμε την ελάχιστη τοπολογία πάνω στον X που κάνει όλες τις συναρτήσεις f_i συνεχείς.*

Το ακόλουθο λήμμα είναι πολύ χρήσιμο στη μελέτη διανυσματικών χώρων.

ΛΗΜΜΑ 0.2. *Έστω X διανυσματικός χώρος και $g, f_1, f_2, ..., f_n$ γραμμικές συναρτήσεις από τον X στο $\mathbb{R}$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.*

(1) $\bigcap_{i=1}^{n} Ker f_i \subseteq Ker g$.

(2) *Υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε*

$$g = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Είναι σαφές ότι (2) $\Rightarrow$ (1). Για να δείξουμε το αντίστροφο θεωρούμε την συνάρτηση $\pi : X \to \mathbb{R}^n$ με

$$\pi(x) = \big(f_1(x), ..., f_n(x)\big).$$

Είναι προφανές ότι η π είναι γραμμική συνάρτηση. Συνεπώς το σύνολο $\pi(X)$ είναι γραμμικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$. Θέτουμε $F : \pi(X) \to \mathbb{R}$, με

$$F\big(\pi(x)\big) = g(x).$$

Από την υπόθεση έχουμε ότι αν $\pi(x_1) = \pi(x_2)$ τότε $g(x_1) = g(x_2)$. Συνεπώς η F είναι καλά ορισμένη. Άρα υπάρχουν $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε

$$g(x) = F\big(\pi(x)\big) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(x)$$

για κάθε $x \in X$. □

Το επόμενο θεώρημα είναι το βασικό εργαλείο για την κατασκευή τοπικά κυρτών, τοπολογικών διανυσματικών χώρων.

ΘΕΩΡΗΜΑ 0.3. *Έστω X διανυσματικός χώρος και $\Gamma \subseteq X^{\#}$ τέτοιο ώστε το Γ να διαχωρίζει τα σημεία του X. Τότε ισχύουν τα παρακάτω.*

(1) *Για κάθε $x \in X$, $A \subseteq \Gamma$ πεπερασμένο και $\varepsilon > 0$ θέτουμε*

$$W(x, A, \varepsilon) = \{y \in X \;:\; |f(y) - f(x)| < \varepsilon \;\; \forall f \in A\}.$$

Τότε τα σύνολα $W(x, A, \varepsilon)$ αποτελούν μια βάση περιοχών της τοπολογίας (X, Γ).

(2) *Ο (X, Γ) είναι ένας τοπολογικός διανυσματικός χώρος.*

(3) *Ο (X, Γ) είναι τοπικά κυρτός και Hausdorff.*
(4) *Έχουμε ότι $(X, \Gamma)^* = \langle \Gamma \rangle$.*

Αποδειξη. Τα (1), (2) και (3) αφήνονται σαν άσκηση. Για το (4) παρατηρούμε καταρχάς ότι $(X, \Gamma)^* \supseteq \langle \Gamma \rangle$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε τον αντίστροφο εγκλεισμό. Έστω $g \in (X, \Gamma)^*$. Αφού το g είναι συνεχές, θα υπάρχει V ανοιχτή περιοχή του 0, τέτοια ώστε το $g(V)$ να είναι φραγμένο. Άρα θα υπάρχει και βασική ανοιχτή περιοχή W του 0 τέτοια ώστε το $g(W)$ να είναι φραγμένο. Από το (1), υπάρχουν $A = \{f_1, ..., f_n\} \subseteq \Gamma$ και $\varepsilon > 0$, τέτοια ώστε $W = W(0, A, \varepsilon)$. Είναι εύκολο να δούμε ότι αφού το $g(W)$ είναι φραγμένο υποσύλο του $\mathbb{R}$, θα ισχύει ότι $\cap_{i=1}^{n} Ker f_i \subseteq Ker g$. Από το προηγούμενο Λήμμα, έχουμε ότι το g είναι γραμμικός συνδιασμός των στοιχείων του A και άρα $g \in \langle \Gamma \rangle$. □

Η ασθενής τοπολογία ενός χώρου Banach.

Σε ότι ακολουθεί με X συμβολίζουμε ένα χώρο Banach.

Ορισμος 0.4. *Η ασθενής τοπολογία ενός χώρου Banach X είναι η ελάχιστη τοπολογία πάνω στον X που κάνει τα στοιχεία του X^* συνεχή. Με βάσει τον συμβολισμό της προηγούμενης παραγράφου η ασθενής τοπολογία είναι η (X, X^*).*

Εν γένει, για ένα τοπολογικό διανυσματικό χώρο, ο τοπολογικός δυϊκός μπορεί να είναι πολύ μικρός (πιθανώς και τετριμένος) και να μην διαχωρίζει τα σημεία του χώρου. Παρόλαυτά για χώρους Banach έχουμε το ακόλουθο.

Ασκηση 0.5. Έστω X χώρος Banach. Δείξτε ότι ο X^* διαχωρίζει τα σημεία του X.

Συνεπώς από το Θεώρημα της προηγούμενης παραγράφου έχουμε ότι κάθε χώρος Banach εφοδιασμένος με την ασθενή τοπολογία γίνεται ένας τοπικά κυρτός, Hausdorff, τοπολογικός διανυσματικός χώρος. Η ασθενής τοπολογία όμως παρουσιάζει σημαντικές παθογένειες.

Προταση 0.6. *Έστω X απειροδιάστατος χώρος Banach. Τότε ο X με την ασθενή τοπολογία δεν είναι ποτέ μετρικοποιήσιμος.*

Αποδειξη. Ας υποθέσουμε ότι ήταν. Τότε ο X θα είχε αριθμήσιμη βάση ασθενών περιοχών του 0, έστω η $(W_n)_n$. Από τον χαρακτηρισμό των βασικών περιοχών της ασθενής τοπολογίας, υπάρχουν $A_n \subseteq X^*$ πεπερασμένα και $(\varepsilon_n)_n$ με $\varepsilon_n > 0$ για κάθε n, τέτοια ώστε $W_n = W(0, A_n, \varepsilon_n)$. Έστω $g \in X^*$ τυχαίο. Αφού το g είναι (εξ' ορισμού) συνεχές για την ασθενή τοπολογία, υπάρχει βασική ασθενώς ανοιχτή περιοχή V του 0, τέτοια ώστε το $g(V)$ να είναι φραγμένο. Από την υπόθεση μας λοιπόν, θα υπαρχει και $k \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε το $g(W_k)$ να είναι φραγμένο. Έστω $A_k = \{f_1, ..., f_l\}$ να είναι το πεπερασμένο υποσύνολο του X^* που αντιστοιχεί στο W_k. Αφού το $g(W_k)$ είναι φραγμένο, εύκολα καταλήγουμε στο ότι $\cap_{i=1}^{l} Ker f_i \subseteq Ker g$. Συνεπώς το g είναι γραμμικός συνδιασμός των στοιχείων του A_k. Θέτουμε $A = \cup_n A_n$. Από την παραπάνω συζήτηση, έχουμε ότι $X^* \subseteq \langle A \rangle$. Επιπλέον, από το (4) του Θεωρήματος της προηγούμενης παραγράφου, καταλήγουμε ότι $X^* = \langle A \rangle$. Αλλά το σύνολο A είναι αριθμήσιμο, πράγμα που σημαίνει ότι ο X^* έχει μια αριθμήσιμη Hamel βάση. Άτοπο γιατί ο X είναι απειροδιάστατος. □

Είναι σαφές ότι η ασθενής τοπολογία περιέχει λιγότερα ανοιχτά (άρα και κλειστά) σύνολα από την νορμ τοπολογία του X. Στην περίπτωση των απειροδιάστατων χώρων Banach η ασθενής τοπολογία περιέχει αυστηρώς λιγότερα ανοιχτά. Η επόμενη όμως άσκηση δείχνει πως αρκετά κλειστά υποσύνολα του X παραμένουν και ασθενώς κλειστά.

ΑΣΚΗΣΗ 0.7. Δείξτε ότι για κάθε χώρο Banach X, κάθε κλειστό και κυρτό υποσύνολο C του X είναι και ασθενώς κλειστό.

Από την άλλη έχουμε το ακόλουθο παράδειγμα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 0.8. Θα δείξουμε ότι για κάθε απειροδιάστατο χώρο Banach X ισχύει ότι

$$\overline{S_X}^{w} = \overline{B(0,1)}$$

όπου με $\overline{S_X}^{w}$ συμβολίζουμε την κλειστότητα της σφαίρας του X στην ασθενή τοπολογία (όπως συνήθως $S_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ και $\overline{B(0,1)} = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$). Πράγματι, αφού κάθε κλειστό και κυρτό υποσύνολο του X είναι και ασθενώς κλειστό έχουμε άμεσα ότι

$$\overline{S_X}^{w} \subseteq \overline{B(0,1)}.$$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε τον αντίστροφο εγκλεισμό. Έστω $x \in X$ με $\|x\| < 1$. Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε βασική ασθενής περιοχή W του x ισχύει ότι $W \cap S_X \neq \varnothing$. Έστω λοιπόν $A = \{f_1, ..., f_n\} \subseteq X^*$ και $\varepsilon > 0$ τέτοια ώστε $W = W(x, A, \varepsilon)$.

ΑΣΚΗΣΗ 0.9. Δείξτε ότι $Y = \bigcap_{i=1}^{n} Ker f_i \neq \varnothing$. Ποιά είναι η διάσταση του Y;

Επιλέγουμε $y \in Y$ με $y \neq 0$ (από την άσκηση τέτοιο y υπάρχει). Η συνάρτηση $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ορίζεται με $h(t) = \|x + ty\|$ είναι συνεχής (γιατί;) και $h(0) = \|x\| < 1$ ενώ $\lim_{t \to \infty} h(t) = +\infty$. Συνεπώς υπάρχει $t_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $h(t_0) = \|x + t_0 y\| = 1$. Τότε $x + t_0 y \in S_X$. Υπενθυμίζουμε ότι $y \in \cap_{i=1}^{n} Ker f_i$ και άρα $f_i(y) = 0$ για κάθε $i = 1, ..., n$. Συνεπώς $x + t_0 y \in W(x, A, \varepsilon)$ και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

Είναι εύκολο να δούμε ότι αν εφοδιάσουμε τον X με την ελάχιστη τοπολογία που κάνει τα στοιχεία της σφαίρας του X^* συνεχή, τότε η τοπολογία αυτή είναι η ίδια με την ασθενή τοπολογία. Όμως αν D είναι ένα νορμ πυκνό υποσύνολο του X^* με $\langle D \rangle \neq X^*$, τότε η ελάχιστη τοπολογία που κάνει τα στοιχεία του D συνεχή είναι *αυστηρά* μικρότερη από την ασθενή τοπολογία (αυτό είναι πόρισμα του Θεωρήματος της πρώτης παραγράφου). Παρόλαυτά για τα φραγμένα υποσύνολα του X, οι δύο τοπολογίες ταυτίζονται.

ΠΡΟΤΑΣΗ 0.10. *Έστω X χώρος Banach και D ένα νορμ πυκνό υποσύνολο του X^*. Τότε για κάθε B φραγμένο υποσύνολο του X, οι σχετικές ασθενής και (X, D) τοπολογίες πάνω στο B ταυτίζονται.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Είναι σαφές ότι η (X, D) τοπολογία πάνω στο B είναι μικρότερη από τη σχετική ασθενή τοπολογία πάνω στο B. Για να δείξουμε λοιπόν ότι αυτές ταυτίζονται, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε W βασικό ασθενώς ανοιχτό υποσύνολο του B υπάρχει W' ανοιχτό για την (X, D) τοπολογία του X τέτοιο ώστε $(W' \cap B) \subseteq (W \cap B)$.

Έστω λοιπόν $x \in B$, $A = \{f_1, ..., f_n\} \subseteq X^*$ και $\varepsilon > 0$. Θεωρούμε την περιοχή

$$W = W(x, A, \varepsilon) \cap B = \{y \in B : |f_i(y) - f_i(x)| < \varepsilon, \ \ i = 1, ..., n\}.$$

Θέτουμε $c = \sup\{\|x\| : x \in B\} < +\infty$. Αφού το D είναι νορμ πυκνό υποσύνολο του X^*, επιλέγουμε $g_1, ..., g_n \in D$ τέτοια ώστε

$$\|f_i - g_i\| < \frac{\varepsilon}{3c}$$

για κάθε $i = 1, ..., n$. Θέτουμε $A' = \{g_1, ..., g_n\} \subseteq D$ και

$$W' = W\Big(x, A', \frac{\varepsilon}{3}\Big) \cap B = \Big\{y \in B : |g_i(y) - g_i(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \ \ i = 1, ..., n\Big\}.$$

Τότε η W' είναι μια σχετική (X, D)-ανοιχτή περιοχή του B. Επιπλέον αν $y \in W'$ τότε για κάθε $i = 1, ..., n$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} |f_i(y) - f_i(x)| &= |f_i(y) - g_i(y) + g_i(y) - g_i(x) + g_i(x) - f_i(x)| \\ &\leq |f_i(y) - g_i(y)| + |g_i(y) - g_i(x)| + |g_i(x) - f_i(x)| \\ &\leq \|f_i - g_i\| \|y\| + \frac{\varepsilon}{3} + \|g_i - f_i\| \|x\| \\ &< \frac{\varepsilon}{3c} c + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3c} c = \varepsilon. \end{aligned}$$

Άρα $y \in W$ και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. ☐

Θα περάσουμε τώρα στη μελέτη της ασθενής σύγκλισης ακολουθιών.

ΟΡΙΣΜΟΣ 0.11. *Έστω $(x_n)_n$ μία ακολουθία σε ένα χώρο Banach X. Θα λέμε ότι η $(x_n)_n$ συγκλίνει ασθενώς σε ένα $x \in X$ αν για κάθε ασθενώς ανοιχτή περιοχή W του x, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $x_n \in W$ για κάθε $n \geq n_0$. Την ασθενή σύγκλιση θα τη συμβολίζουμε με $x_n \xrightarrow{w} x$.*

Η επόμενη πρόταση δείνει πολύ χρήσιμους χαρακτηρισμούς της ασθενής σύγκλισης.

ΠΡΟΤΑΣΗ 0.12. *Έστω X χώρος Banach, $(x_n)_n$ ακολουθία στον X, $x \in X$ και D νορμ πυκνό υποσύνολο του X^*. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.*

(1) $x_n \xrightarrow{w} x$.

(2) *Για κάθε* $x^* \in X^*$, *έχουμε* $x^*(x_n) \to x^*(x)$.
(3) *Για κάθε* $x^* \in B_{X^*}(0,1)$, *έχουμε* $x^*(x_n) \to x^*(x)$.
(4) *Η* $(x_n)_n$ *είναι φραγμένη και* $x^*(x_n) \to x^*(x)$ *για κάθε* $x^* \in D$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η ισοδυναμία των (1), (2) και (3) είναι απλή και αφήνεται σαν άσκηση. Για την συνεπαγωγή (1) ⇒ (4) αρκεί να δείξουμε μόνο ότι η ακολουθία είναι φραγμένη. Για κάθε n, θέτουμε $\hat{x}_n \in X^{**}$ με

$$\hat{x}_n(x^*) = x^*(x_n).$$

Από το θεώρημα Hanh-Banach έχουμε ότι $\|\hat{x}_n\| = \|x_n\|$. Από την (2) έχουμε ότι για κάθε $x^* \in X^*$

$$\sup |\hat{x}_n(x^*)| < \infty.$$

Συνεπώς από το θεώρημα ομοιόμορφου φράγματος, έχουμε ότι

$$\sup \|\hat{x}_n\| = \sup \|x_n\| < \infty,$$

δηλαδή η $(x_n)_n$ είναι φραγμένη. Η αντίστροφη συνεπαγωγή (4) ⇒ (1), προκύπτει από το γεγονός ότι το σύνολο $B = \{x\} \cup \{x_n\}_n$ είναι φραγμένο υποσύνολο του X. Συνεπώς, στο B η ασθενής τοπολογία καθορίζεται από το νορμ πυκνό υποσύνολο D (οι λεπτομέριες και τα ακριβή επιχειρήματα αφήνονται σαν άσκηση). $\square$

ΑΣΚΗΣΗ 0.13. Έστω $1 < p < \infty$ και $(e_n)_n$ η κανονική βάση του $\ell_p(\mathbb{N})$. Δείξτε ότι $e_n \xrightarrow{w} 0$. Τι συμβαίνει όταν $p = 1$;

ΑΣΚΗΣΗ 0.14. Υποθέστε ότι $x_n \xrightarrow{w} x$ και $x_n^* \to x^*$. Δείξτε ότι $x_n^*(x_n) \to x^*(x)$. Βρείτε παράδειγμα στον $\ell_2(\mathbb{N})$ όπου $x_n \xrightarrow{w} 0$, $x_n^* \xrightarrow{w} 0$ αλλά $x_n^*(x_n) \nrightarrow 0$.

ΑΣΚΗΣΗ 0.15. Δείξτε ότι αν $x_n \xrightarrow{w} x$, τότε $\|x\| \le \liminf \|x_n\|$ (Υπόδειξη: χρησιμοποιήστε το θεώρημα ομοιόμορφου φράγματος).

Διαχωρίσιμοι χώροι και ασθενής τοπολογία.

Όπως έχουμε δει, η ασθενής τοπολογία δεν είναι ποτέ μετρικοποιήσιμη. Παρολαυτά για χώρους Banach που έχουν διαχωρίσιμο δυϊκό έχουμε το ακόλουθο πολύ σημαντικό θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 0.16. *Έστω* X *χώρος Banach τέτοιος ώστε ο* X^* *να είναι διαχωρίσιμος. Τότε η κλειστή μοναδιαία μπάλα του* X *εφοδιασμένη με την ασθενή τοπολογία είναι μετρικοποιήσιμος χώρος.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Επιλέγουμε ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο $D = (x_n^*)_n$ της μπάλας του X^* (δηλαδή $\|x^*\| \le 1$ για κάθε $x^* \in D$). Ορίζουμε $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ με

$$\rho(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n^*(x-y)|}{2^n}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 0.17. Δείξτε ότι η ρ είναι μια μετρική πάνω στη B_X.

Η κλειστή μοναδιαία μπάλα του X εφοδιασμένη με την μετρική ρ είναι ένας μετρικός χώρος. Θα δείξουμε ότι η ασθενής τοπολογία πάνω στην $\overline{B_X}$ ταυτίζεται με την τοπολογία που επάγει η μετρική ρ. Η απόδειξη θα γίνει σε δύο βήματα.

Βήμα 1. Έστω W βασική ασθενώς ανοιχτή σχετική περιοχή της $\overline{B_X}$. Τότε υπάρχουν $x \in \overline{B_X}$, $A = \{y_1^*, ..., y_k^*\} \subseteq X^*$ και $\varepsilon > 0$ τέτοια ώστε

$$W = W(x, A, \varepsilon) \cap \overline{B_X} = \{y \in \overline{B_X} : |y_i^*(y) - y_i^*(x)| < \varepsilon \;\; i = 1, ..., k\}.$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\|y_i^*\| \leq 1$ για κάθε $i = 1, ..., k$. Πράγματι θέτουμε $c = \max \|y_i^*\|$ και θεωρούμε τα σύνολο $A' = \{\frac{y_1^*}{c}, ..., \frac{y_k^*}{c}\}$. Τότε $\|\frac{y_i^*}{c}\| \leq 1$ και

$$W'\Big(x, A', \frac{\varepsilon}{c}\Big) = W(x, A, \varepsilon).$$

Αφού το σύνολο D είναι πυκνό στη μπάλα του X^*, επιλέγουμε στοιχεία $x_{n_1}^*, ..., x_{n_k}^* \in D$ τέτοια ώστε $\|y_i^* - x_{n_i}^*\| < \frac{\varepsilon}{4}$ για κάθε $i = 1, ..., k$. Επιλέγουμε $r > 0$ τέτοιο ώστε $2^{n_i} r < \frac{\varepsilon}{2}$. Θέτουμε

$$V = \{y \in \overline{B_X} : \rho(y, x) < r\}.$$

Τότε $V \subseteq W$. Πράγματι, αν $\rho(y, x) < r$ τότε για κάθε $i = 1, ..., k$ έχουμε

$$\frac{|x_{n_i}^*(y) - x_{n_i}^*(x)|}{2^{n_i}} < r$$

και άρα

$$\begin{array}{rcl} |y_i^*(y) - y_i^*(x)| & = & |y_i^*(y) - x_{n_i}^*(y) + x_{n_i}^*(y) - x_{n_i}^*(x) + x_{n_i}^*(x) - y_i^*(x)| \\ & \leq & 2\|y_i^* - x_{n_i}^*\| + |x_{n_i}^*(y) - x_{n_i}^*(x)| \\ & < & \dfrac{\varepsilon}{2} + 2^{n_i} r < \varepsilon \end{array}$$

για κάθε $i = 1, ..., k$.

Βήμα 2. Έστω $x \in \overline{B_X}$. Για δεδομένο $r > 0$, θεωρούμε το σύνολο $V = \{y \in \overline{B_X} : \rho(y, x) < r\}$. Αρκεί να βρούμε ασθενώς ανοιχτή περιοχή W του x τέτοια ώστε $W \cap \overline{B_X} \subseteq V$. Επιλέγουμε $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $\varepsilon < \frac{r}{2}$ και $k \in \mathbb{N}$ αρκετά μεγάλο ώστε $\frac{1}{2^{k-1}} < \frac{r}{2}$. Για αυτά τα ε, k θέτουμε $A = \{x_i^*\}_{i=1}^k \subseteq D$ και ορίζουμε

$$W = W(x, A, \varepsilon) \cap \overline{B_X} = \{y \in \overline{B_X} : |x_i^*(y) - x_i^*(x)| < \varepsilon \;\; i = 1, ..., k\}.$$

Τότε $W \subseteq V$. Πράγματι αν $y \in W$ τότε

$$\begin{aligned}\rho(y,x) &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}|x_i^*(y) - x_i^*(x)| \\ &= \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2^i}|x_i^*(y) - x_i^*(x)| + \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^i}|x_i^*(y) - x_i^*(x)| \\ &< \varepsilon + 2\sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < r\end{aligned}$$

που σημαίνει ότι $y \in V$.

Με την ολοκλήρωση και του δεύτερου βήματος η απόδειξη τελείωσε. □

Η ασθενής* τοπολογία.

Όπως έχουμε δει, κάθε χώρο Banach X μπορούμε να τον εμφυτεύσουμε στον δεύτερο δυϊκό του, μέσω της κανονικής εμφύτευσης. Συνεπώς, στον X^* έχουμε μία ακόμα πολύ ενδιαφέρουσα τοπολογία, αυτή που επάγει ο X πάνω στον X^* (για να είμαστε ακριβείς, μιλάμε για την τοπολογία που επάγει ο $\hat{X}$ στον X^*, όπου $\hat{X}$ η εικόνα του X μέσω της κανονικής εμφύτευσης). Ας δώσουμε τον ακριβή ορισμό.

ΟΡΙΣΜΟΣ 0.18. *Η ασθενής* τοπολογία ενός δυϊκού χώρου Banach X^* είναι η ελάχιστη τοπολογία που κάνει τα στοιχεία του X συνεχή.*

Η επόμενη άσκηση είναι αρκετά απλή.

ΑΣΚΗΣΗ 0.19. Δείξτε ότι ο X διαχωρίζει τα σημεία του X^*.

Με βάση λοιπόν το θεώρημα της πρώτης παραγράφου, έχουμε ότι ο X^* με την ασθενή* τοπολογία είναι ένας τοπικά κυρτός, Hausdorff, τοπολογικός διανυσματικός χώρος. Η ασθενής* τοπολογία του X^* είναι αυστηρά μικρότερη της ασθενής τοπολογίας όταν ο δεύτερος δυϊκός X^{**} του X είναι μεγαλύτερος από τον $\hat{X}$. Πράγματι, σε αυτή την περίπτωση, κάθε $x^{**} \in X^{**} \setminus \hat{X}$ *δεν είναι συνεχές για την ασθενή* τοπολογία*, ενώ είναι συνεχές για την ασθενή τοπολογία και κατά μείζονα λόγο για την νορμ. Επιπλέον, είναι εύκολο να δει κάνείς ότι δεν είναι όλα τα κλειστά, κυρτά υποσύνολα του X^* και ασθενώς* κλειστά.

Η ασθενής* σύγκλιση ακολουθιών ορίζεται ακριβώς όπως και στη περίπτωση της ασθενής τοπολογίας. Αν $(x_n^*)_n$ είναι μια ακολουθία που συγκλίνει ασθενώς* σε ένα $x^* \in X^*$ τότε την ασθενώς* σύγκλιση της $(x_n^*)_n$ στο x^* τη συμβολίζουμε με $x_n^* \xrightarrow{w^*} x^*$. Κατ΄ αντιστοιχία με την ασθενή τοπολογία έχουμε και την ακόλουθη πρόταση της οποίας η απόδειξη αφήνεται σαν άσκηση.

ΠΡΟΤΑΣΗ 0.20. *Έχουμε ότι $x_n^* \xrightarrow{w^*} x^*$ αν και μόνο αν $x_n^*(x) \to x^*(x)$ για κάθε $x \in X$.*

ΑΣΚΗΣΗ 0.21. Δείξτε ότι η ασθενής σύγκλιση συνεπάγεται την ασθενή* σύγκλιση. Επιπλέον δείξτε ότι αν $x_n^* \overset{w*}{\to} x^*$ τότε η ακολουθία $(x_n^*)_n$ είναι φραγμένη και $\|x^*\| \leq \liminf \|x_n^*\|$ (Υπόδειξη: χρησιμοποιήστε το θεώρημα του ομοιόμορφου φράγματος).

Η ασθενής* τοπολογία δεν είναι και αυτή μετρικοποιήσιμη (γιατί;). Εν τούτοις έχουμε το ακόλουθο πολύ σημαντικό θεώρημα το οποίο είναι και το δυϊκό ανάλογο του Θεωρήματος 0.16.

ΘΕΩΡΗΜΑ 0.22. *Αν X είναι διαχωρίσιμος χώρος Banach, τότε η $\overline{B_{X^*}}$ εφοδιασμένη με την ασθενή* τοπολογία είναι μετρικοποιήσιμη.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η απόδειξη του θεωρήματος είναι παρόμοια με αυτή του Θεωρήματος 0.16 και αφήνεται σαν άσκηση.

$\Big($Υπόδειξη: αν $D = (x_n)_n$ είναι αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο της μοναδιαίας μπάλας του X, ορίστε

$$\rho(x^*, y^*) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(x^*(x_n) - y^*(x_n)|}{2^n}$$

και αφού αποδείξετε ότι είναι μετρική, δείξτε ότι παράγει την ασθενή* τοπολογία$\Big)$. ☐

Η μεγάλη χρησιμότητα των ασθενών τοπολογιών βρίσκεται στο ακόλουθο θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 0.23 (L. Alaouglou). *Έστω X χώρος Banach. Τότε η $\overline{B_{X^*}}$ εφοδιασμένη με την ασθενή* τοπολογία είναι συμπαγής χώρος.*

Μία απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος για την ειδική (πλην όμως εξαιρετικά σημαντική) περίπτωση των διαχωρίσιμων αυτοπαθών χώρων θα δώσουμε στην επόμενη παράγραφο.

Αυτοπαθείς χώροι.

Υπενθυμίζουμε και πάλι ότι κάθε χώρος Banach X εμφυτεύεται ισομετρικά στον δεύτερο δυϊκό του μέσω της κανονικής εμφύτευσης.

ΟΡΙΣΜΟΣ 0.24. *Ένας χώρος Banach X καλείται αυτοπαθής αν $X^{**} = \hat{X}$.*

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 0.25. Στην ελληνική βιβλιογραφία είναι συνήθης και ο όρος ανακλαστικός. Ο αγγλικός όρος είναι reflexive.

Πρέπει να τονίσουμε ότι *απαιτούμε στον ορισμό της αυτοπάθειας ο X^{**} να ταυτίζεται με τον X μέσω της κανονικής εμφύτευσης.* Υπάρχουν παραδείγματα μη αυτοπαθών χώρων Banach οι οποίοι είναι ισομετρικά ισόμορφοι με τον δεύτερο δυϊκό τους.

Τυπικά παραδείγματα απειροδιάστατων αυτοπαθών χώρων Banach είναι οι χώροι $\ell_p(\mathbb{N})$ για $1 < p < \infty$. Οι χώροι $c_0(\mathbb{N}), \ell_1(\mathbb{N})$ και $\ell_\infty(\mathbb{N})$ δεν είναι.

ΠΡΟΤΑΣΗ 0.26. *Έστω X αυτοπαθής χώρος Banach. Τότε ο X είναι διαχωρίσιμος αν και μόνο αν ο X^* είναι διαχωρίσιμος.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αν ο X^* είναι διαχωρίσιμος, τότε από γνωστή πρόταση και ο X θα είναι. Αντίστροφα αν ο X είναι διαχωρίσιμος, τότε και ο X^{**} θα είναι, αφού είναι ισομετρικά ισομορφικός με τον X. Άρα και ο X^*. □

Βασικός σκοπός μας σε αυτή την παράγραφο είναι να αποδείξουμε το παρακάτω εξαιρετικά σημαντικό θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 0.27. *Έστω X ένας αυτοπαθής και διαχωρίσιμος χώρος Banach. Τότε η $\overline{B_X}$ με την ασθενή τοπολογία είναι συμπαγής μετρικός χώρος.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Από την Πρόταση 0.26 έχουμε ότι και ο X^* είναι διαχωρίσιμος. Επιλέγουμε $D = (x_m^*)_m$ ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του X^*. Από το Θεώρημα 0.16, έχουμε ότι η $\overline{B_X}$ εφοδιασμένη με την ασθενή τοπολογία είναι μετρικός χώρος. Για να δείξουμε λοιπόν ότι είναι και συμπαγής, αρκεί να δείξουμε ότι είναι ακολουθιακά συμπαγής. Δηλαδή για κάθε ακολουθία $(x_n)_n$ στη μοναδιαία μπάλα του X, πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχει $x \in X$ με $\|x\| \leq 1$ και υπακολουθία $(x_{n_k})_k$ της $(x_n)_n$ τέτοια ώστε $x_{n_k} \xrightarrow{w} x$. Η απόδειξη θα γίνει σε τέσσερα βήματα.

Βήμα 1. Θα δείξουμε ότι υπάρχει υπακολουθία $(x_{n_k})_k$ της $(x_n)_n$ τέτοια ώστε η ακολουθία $\left(x^*(x_{n_k})\right)_k$ να είναι Cauchy για κάθε $x^* \in D$. Έστω λοιπόν $D = (x_m^*)_m$. Για $m = 1$, η ακολουθία $\left(x_1^*(x_n)\right)_n$ είναι φραγμένη (υπενθυμίζουμε ότι η $\|x_n\| \leq 1$ για κάθε n). Άρα υπάρχει $M_1 \subseteq \mathbb{N}$ άπειρο τέτοιο ώστε η ακολουθία $\left(x_1^*(x_n)\right)_{n \in M_1}$ να είναι Cauchy. Για $m = 2$, η ακολουθία $\left(x_2^*(x_n)\right)_{n \in M_1}$ είναι φραγμένη. Άρα υπάρχει $M_2 \subseteq M_1$ άπειρο τέτοιο ώστε η ακολουθία $\left(x_2^*(x_n)\right)_{n \in M_2}$ να είναι Cauchy. Επαγωγικά κατασκευάζουμε μια φθίνουσα ακολουθία $(M_m)_m$ απείρων υποσυνόλων του $\mathbb{N}$ τέτοια ώστε η ακολουθία $\left(x_m^*(x_n)\right)_{n \in M_m}$ να είναι Cauchy για κάθε m. Η τελική ακολουθία επιλέγεται ως εξής. Θέτουμε $n_1 = \min M_1$. Επιλέγουμε $n_2 \in M_2$ με $n_1 < n_2$ (αυτό μπορούμε να το κάνουμε γιατί το M_2 είναι άπειρο). Εν γένει, αν τα $n_1 < ... < n_{m-1}$ έχουν επιλεγεί, επιλέγουμε $n_m \in M_m$ τέτοιο ώστε $n_1 < ... < n_{m-1} < n_m$. Θέτουμε $L = (n_m)_m$. Η υπακολουθία $(x_n)_{n \in L}$ της $(x_n)_n$ είναι η ζητούμενη.

Βήμα 2. Για να απλοποιήσουμε τους συμβολισμούς, θα συμβολίζουμε με $(y_n)_n$ την υπακολουθία της $(x_n)_n$ του βήματος 1. Σε αυτό το βήμα θα δείξουμε ότι η ακολουθία $\left(x^*(y_n)\right)_n$ είναι Cauchy για κάθε $x^* \in X^*$. Αυτό είναι εύκολο να το δούμε γιατί το σύνολο D είναι πυκνό υποσύνολο του X^*. Πράγματι έστω $x^* \in X^*$ τυχαίο και $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $y^* \in D$ τέτοιο ώστε $\|x^* - y^*\| < \frac{\varepsilon}{3}$. Επιπλέον, αφού $y^* \in D$, η ακολουθία $\left(y^*(y_n)\right)_n$ είναι Cauchy. Επιλέγουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $|y^*(y_n) - y^*(y_m)| < \frac{\varepsilon}{3}$ για κάθε $n, m \geq n_0$. Αλλά τότε για κάθε $n, m \geq n_0$ έχουμε

$$\begin{aligned} |x^*(y_n) - x^*(y_m)| &\leq |x^*(y_n) - y^*(y_n)| + |y^*(y_n) - y^*(y_m)| + \\ &\quad + |y^*(y_m) - x^*(y_m)| \\ &\leq 2\|x^* - y^*\| + |y^*(y_n) - y^*(y_m)| < \varepsilon \end{aligned}$$

όπως επιθυμούσαμε.

Έχοντας ολοκληρώσει και το βήμα 2, ορίζουμε $f : X^* \to \mathbb{R}$ με

$$f(x^*) = \lim_{n\to\infty} x^*(y_n).$$

Από το βήμα 2, έχουμε ότι η f είναι καλά ορισμένη.

Βήμα 3. Θα δείξουμε ότι $f \in X^{**}$ και $\|f\| \leq 1$. Είναι σαφές ότι η f είναι γραμμική. Το ότι η f είναι και φραγμένη έπεται άμεσα από το θεώρημα του ομοιόμορφου φράγματος. Πράγματι παρατηρήστε ότι $\hat{y}_n(x^*) \to f(x^*)$ για κάθε $x^* \in X^*$ (ισοδύναμα $\hat{y}_n \overset{w^*}{\to} f$). Άρα $\|f\| \leq \liminf \|\hat{y}_n\| = \liminf \|y_n\| \leq 1$.

Βήμα 4. Υπάρχει $x \in \overline{B_X}$ τέτοιο ώστε $y_n \overset{w}{\to} x$. Από το βήμα 3 υπάρχει υπάρχει $f \in X^{**}$ με $\|f\| \leq 1$, τέτοιο ώστε $x^*(y_n) \to f(x^*)$ για κάθε $x^* \in X^*$. Από την αυτοπάθεια του X, υπάρχει $x \in X$ με $\|x\| \leq 1$, τέτοιο ώστε $\hat{x} = f$. Αυτό σημαίνει ότι $f(x^*) = x^*(x)$ για κάθε $x^* \in X^*$ και $\|x\| = \|f\| \leq 1$. Συνεπώς $x \in \overline{B_X}$ και $x^*(y_n) \to x^*(x)$ για κάθε $x^* \in X^*$. Από τις ιδιότητες της ασθενής σύγκλισης ακολουθιών, καταλήγουμε ότι $y_n \overset{w}{\to} x$, όπως επιθυμούσαμε.

Από τα βήματα 1, 2, 3 και 4 η απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

ΓΕΝΙΚΗ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ

Ορισμός 1. Έστω X σύνολο. Μια οικογένεια τ υποσυνόλων του X καλείται Τοπολογία στον X αν ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες.

(1) $\emptyset, X \in \tau$

(2) Αν $U_i \in \tau$ με $i \in I$, όπου I αυθαίρετο σύνολο, τότε $\bigcup_{i\in I} U_i \in \tau$.

(3) Αν $U_1, \dots, U_k \in \tau$, τότε $\bigcap_{i=1}^{k} U_i \in \tau$.

Το ζεύγος (X,τ) καλείται τοπολογικός χώρος. Τα στοιχεία της τ καλούνται ανοιχτά. Αν $U \subseteq X$ ανοικτό, τότε το σύνολο $X \setminus U$ καλείται κλειστό.

Παρατήρηση 1 Από τον ορισμό προκύπτει ότι τα $\emptyset, X$ είναι ταυτόχρονα ανοιχτά και κλειστά υποσύνολα του (X,τ). Επιπλέον, από τον κανόνα του De Morgan, έχουμε ότι αυθαίρετη τομή κλειστών συνόλων είναι κλειστό, και πεπερασμένη ένωση κλειστών είναι κλειστό.

Ορισμός 2:
Έστω (X,τ) τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$. Η κλειστότητα του A, την οποία τη συμβολίζουμε με $\overline{A}$, είναι το σύνολο

$$\overline{A} = \bigcap \{ F \subseteq X : F \supseteq A \text{ και } F \text{ κλειστό} \}.$$

Παρατηρούμε ότι το $\overline{A}$ είναι κλειστό και για κάθε $F \subseteq$ κλειστό με $A \subseteq F$, έχουμε ότι $\overline{A} \subseteq F$. Δηλαδή το $\overline{A}$ είναι το μικρότερο κλειστό σύνολο που περιέχει το A.

Ορισμος 3. Έστω (X,τ) τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$. Το εσωτερικό του A, το οποίο το συμβολίζουμε με $Int(A)$, είναι το σύνολο

$$Int(A) = \bigcup \{ U \subseteq X : U \subseteq A \text{ και } U \text{ ανοιχτό}].$$

Όπως και για την κλειστότητα του A, παρατηρούμε ότι το $Int(A)$ είναι το μεγαλύτερο ανοιχτό σύνολο που περιέχεται στο A.

Ορισμός 4. Ένας τοπολογικός χώρος (X,τ) καλείται Hausdorff αν για κάθε $x,y \in X$ με $x \neq y$ υπάρχουν ανοιχτά U, V με $x \in U$, $y \in V$ και $U \cap V = \phi$.

Ορισμός 5. Έστω (X,τ_1), (Y,τ_2) τοπολογικοί χώροι και $f : X \to Y$ συνάρτηση. Η f καλείται συνεχής αν για κάθε $V \subseteq Y$ ανοιχτό, το σύνολο $f^{-1}(V)$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του X.

Παρατηρούμε ότι μια συνάρτηση $f : X \to Y$ είναι συνεχής αν και μόνο αν για κάθε $C \subseteq Y$ κλειστό το σύνολο $f^{-1}(C)$ είναι κλειστό υποσύνολο του X. Πράγματι, αφού για κάθε $A \subseteq Y$ έχουμε

$$f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A)$$

προκύπτει ότι για κάθε $U \subseteq Y$ ανοιχτό

$$f^{-1}(Y \setminus U) = X \setminus f^{-1}(U)$$

ενώ για κάθε $C \subseteq Y$ κλειστό

$$f^{-1}(Y \setminus C) = X \setminus f^{-1}(C).$$

Ορισμός 6. Έστω (X,τ) τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$.
Ανοιχτό κάλυμμα του A είναι μια οικογένεια $(\mathcal{U}_i)_{i\in I}$, όπου I αυθαίρετο σύνολο, τέτοια ώστε

(α) $\bigcup_{i\in I} \mathcal{U}_i \supseteq A$

(β) Για κάθε $i\in I$, το σύνολο $\mathcal{U}_i$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του X.

Αν $(\mathcal{U}_i)_{i\in I}$ ανοιχτό κάλυμμα και $(\mathcal{U}'_i)_{i\in I'}$ είναι υποοικογένεια της $(\mathcal{U}_i)_{i\in I}$, τέτοια ώστε η $(\mathcal{U}'_i)_{i\in I'}$ να είναι ανοιχτό κάλυμμα του A, τότε η $(\mathcal{U}'_i)_{i\in I'}$ καλείται υποκάλυμμα της $(\mathcal{U}_i)_{i\in I}$.

Ορισμός 7. Έστω (X,τ) τοπολογικός χώρος και $K\subseteq X$.
Το K καλείται συμπαγές αν για κάθε ανοιχτό κάλυμμα του K υπάρχει πεπερασμένο υποκάλυμμα. Δηλαδή αν $(\mathcal{U}_i)_{i\in I}$ ανοιχτό κάλυμμα του K, τότε υπάρχουν $\{i_1,i_2,\dots,i_m\}\subseteq I$ τέτοια ώστε $\bigcup_{k=1}^{m} \mathcal{U}_{i_k} \supseteq K$.

Πρόταση 8. Έστω (X,τ) τοπολογικός χώρος. Τότε κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του X είναι συμπαγές.

Απόδειξη.

Έστω $F\subseteq X$ πεπερασμένο και $(\mathcal{U}_i)_{i\in I}$ ανοιχτό κάλυμμα του F. Αν $F=\emptyset$ τότε προφανώς $F\subseteq \mathcal{U}_i$ για κάθε $i\in I$, άρα το μονοσύνολο $\{\mathcal{U}_i\}$ είναι ανοιχτό υποκάλυμμα του F για κάθε $i\in I$.

Αν $F\neq\emptyset$, τότε $F=\{x_1,\dots,x_n\}$. Για κάθε $k=1,\dots,n$ επιλέγουμε $i_k\in I$ με $x_k\in\mathcal{U}_{i_k}$. Τότε η οικογένεια $\{\mathcal{U}_{i_k}\}_{k=1}^{n}$ είναι πεπερασμένο υποκάλυμμα του F. □

Πρόταση 9. Έστω (X,τ) Hausdorff τοπολογικός χώρος και $K \subseteq X$ συμπαγές. Τότε το K είναι κλειστό.

Για να αποδείξουμε την παραπάνω πρόταση, θα χρειαστούμε το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 10. Έστω (X,τ) Hausdorff τοπολογικός χώρος, $K \in X$ μη κενό συμπαγές και $x \in X$ με $x \notin K$. Τότε υπάρχει $U_x \subseteq X$ ανοιχτό με $x \in U_x$ και $U_x \cap K = \emptyset$.

Απόδειξη.

Για κάθε $y \in K$ επιλέγουμε $V_y, W_y \subseteq X$ ανοιχτά με $x \in V_y$, $y \in W_y$ και $V_y \cap W_y = \emptyset$.

Η οικογένεια $\{W_y\}_{y \in K}$ είναι ανοιχτό κάλυμα του K. Συνεπώς υπάρχουν $y_1, \dots, y_n \in K$ τέτοια ώστε

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} W_{y_i}$$

Θέτουμε $U_x = \bigcap_{i=1}^{n} V_{y_i}$. Τότε το U_x είναι ανοιχτό (ως πεπερασμένη τομή ανοιχτών) και $x \in U_x$. Επιπλέον $U_x \cap K = \emptyset$, αφού

$$U_x \cap K \subseteq U_x \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} W_{y_i}\right) = \bigcup_{i=1}^{n} (U_x \cap W_{y_i})$$

$$\subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \left(\bigcap_{i=1}^{n} V_{y_i} \cap W_{y_i}\right)$$

$$\subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \left(V_{y_i} \cap W_{y_i}\right) = \emptyset. \qquad \square$$

Συνεχίζουμε με την απόδειξη της Πρότασης 9.

Απόδειξη Πρότασης 9. Αν $K = \phi$ ή $K = X$, τότε το K είναι κλειστό από τον ορισμό της τοπολογίας.

Έστω $\phi \neq K \subset X$.

Αρκεί να δείξουμε ότι το $X \setminus K$ είναι ανοιχτό.

Από το προηγούμενο Λήμμα, για κάθε $x \in X \setminus K$, υπάρχει $\mathcal{U}_x \subseteq X$ ανοιχτό με $x \in \mathcal{U}_x$ και $\mathcal{U}_x \cap K = \phi$.

Θέτουμε

$$\mathcal{U} = \bigcup_{x \in X \setminus K} \mathcal{U}_x$$

Τότε το $\mathcal{U}$ ανοιχτό ως τυχαία ένωση ανοιχτών.

Θα δείξουμε ότι $\mathcal{U} = X \setminus K$.

Αν $y \in \mathcal{U}$, τότε υπάρχει $x \in X \setminus K$ με $y \in \mathcal{U}_x$. Αφού $\mathcal{U}_x \cap K = \phi$ έπεται ότι $y \notin K$, δηλαδή $y \in X \setminus K$.

Άρα $\mathcal{U} \subseteq X \setminus K$.

Αντίστροφα έστω $x \in X \setminus K$. Τότε $x \in \mathcal{U}_x$ και κατά μείζονα λόγο $x \in \mathcal{U}$. Δηλαδή $X \setminus K \subseteq \mathcal{U}$.

Από τους παραπάνω εγκλεισμούς καταλήγουμε ότι $\mathcal{U} = X \setminus K$ και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

Ο ακόλουθος ορισμός γενικεύει την έννοια της σύγκλισης ακολουθίας σε τοπολογικούς χώρους.

<u>Ορισμός 11</u>. Έστω (X,τ) τοπολογικός χώρος και $(x_n)_n$ ακολουθία στον X. Θα λέμε ότι η $(x_n)_n$ συγκλίνει σε ένα $x \in X$ αν για κάθε $U \subseteq X$ ανοιχτό με $x \in U$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\forall n \geq n_0$ $x_n \in U$.
Τη σύγκλιση της $(x_n)_n$ στο x θα τη συμβολίζουμε με $x_n \xrightarrow{\tau} x$.

Σε αντίθεση με τους μετρικούς χώρους, οι ακολουθίες δεν αρκούν για να περιγράψουν την κλειστότητα ενός συνόλου. Δηλαδή αν $A \subseteq X$ και $x \in \overline{A}$ τότε δεν μπορούμε να βρούμε πάντα μια ακολουθία $(x_n)_n$ με $x_n \in A$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ώστε $x_n \xrightarrow{\tau} x$.
Ένα παράδειγμα που περιγράφει αυτό το φαινόμενο είναι το ακόλουθο.

<u>Παράδειγμα 12</u>. Έστω $X = [0,1]$ Ορίζουμε την ακόλουθη τοπολογία τ στον X ως

$$\tau = \{\phi\} \cup \{U \subseteq X : \text{το } X \setminus U \text{ είναι αριθμήσιμο}\}$$

(η τοπολογία αυτή καλείται και συν-αριθμήσιμη). Ας επαληθεύσουμε ότι η τ είναι τοπολογία.

(α) Προφανώς $\phi \in \tau$ από τον ορισμό και $X \in \tau$ αφού $X \setminus X = \phi$.
(β) Έστω $(U_i)_{i \in I}$ τυχαία οικογένεια ανοιχτών. Τότε

$$X \setminus \bigcup_{i \in I} U_i = \bigcap_{i \in I} (X \setminus U_i).$$

Εφόσον κάθε $X \setminus U_i$ είναι αριθμήσιμο, έχουμε ότι και η τομή τους είναι αριθμήσιμο. Άρα $\bigcup U_i \in \tau$.

(γ) Έστω $U_1, \dots, U_n \subseteq X$ ανοιχτά. Τότε

$$X \setminus \left(\bigcap_{i=1}^{n} U_i \right) = \bigcup_{i=1}^{n} (X \setminus U_i)$$

που είναι αριθμήσιμο σύνολο ως πεπερασμένη ένωση αριθμησίμων συνόλων. Άρα $\bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \tau$.

Έστω $A = (0, 1]$. Τότε το A είναι ανοιχτό στην τ γιατί $X \setminus A = \{0\}$. Ισχυριζόμαστε ότι $\overline{A} = X$.

Πράγματι αν $\overline{A} \neq X$ τότε αφού $\overline{A} \supseteq A$ και $X \setminus A = \{0\}$ έχουμε

$$\emptyset \neq X \setminus \overline{A} \subseteq X \setminus A = \{0\}.$$

Άρα $X \setminus \overline{A} = \{0\}$. Αλλά αυτό σημαίνει ότι το $\{0\}$ είναι ανοιχτό (ως συμπλήρωμα κλειστού) που είναι άτοπο.

Έστω τώρα ακολουθία $(x_n)_n$ με $x_n \in A$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Θα δείξουμε ότι η x_n δεν συγκλίνει στο 0 για την τοπολογία τ.
Πράγματι, το σύνολο $F = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ είναι αριθμήσιμο υποσύνολο του $[0, 1]$. Άρα το $V = X \setminus F$ είναι ανοιχτό και $0 \in V$ (αφού $x_n \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$). Αλλά δεν υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ με $x_n \in V$, που σημαίνει ότι η $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ δεν συγκλίνει στο 0.

Ορισμός 13. Έστω (X,τ) τοπολογικός χώρος. Μια υποοικογένεια $\mathcal{B}$ της τοπολογίας τ καλείται **βάση** για την τ αν κάθε $\mathcal{U}\in\tau$ γράφεται ως ένωση στοιχείων της $\mathcal{B}$. Αν η $\mathcal{B}$ είναι αριθμήσιμη ο τοπολογικός χώρος (X,τ) καλείται δεύτερος αριθμήσιμος.

Ένα ικανό και αναγκαίο κριτήριο ώστε μια υποοικογένεια $\mathcal{B}$ της τ να είναι βάση για την τ είναι το ακόλουθο.

Πρόταση 14. Έστω (X,τ) τοπολογικός χώρος και $\mathcal{B}$ υποοικογένεια της τ. Τότε η $\mathcal{B}$ είναι βάση για την τ αν και μόνο αν για κάθε $x\in X$ και για κάθε $\mathcal{U}\subseteq X$ ανοιχτό με $x\in\mathcal{U}$ υπάρχει $V\in\mathcal{B}$ με $x\in V\subseteq\mathcal{U}$.

Η απόδειξη της Πρότασης 14 αφήνεται ως άσκηση.

Έστω X σύνολο και τ_1, τ_2 τοπολογίες στον X. Παρατηρούμε ότι η τοπολογία τ που ορίζεται ως

$$\tau = \tau_1 \cap \tau_2 = \{\mathcal{U} \subseteq X : \mathcal{U}\in\tau_1 \text{ και } \mathcal{U}\in\tau_2\}$$

είναι τοπολογία στον X, δηλαδή η τομή δύο τοπολογιών είναι τοπολογία. Αυτό γενικεύεται ως ακολούθως.

Πρόταση 15. Έστω X σύνολο και $(\tau_i)_{i\in I}$ οικογένεια τοπολογιών στον X. Τότε η οικογένεια

$$\tau = \bigcap_{i\in I}\tau_i = \{\mathcal{U}\subseteq X : \mathcal{U}\in\tau_i \ \forall i\in I\}$$

είναι τοπολογία στον X.

Η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση.

Έστω $\mathcal{F}$ οικογένεια υποσυνόλων ενός συνόλου X. Παρατηρούμε ότι το σύνολο

$$\{\tau : \tau \text{ τοπολογία στον } X \text{ με } \mathcal{F} \subseteq \tau\}$$

Είναι μη κενό αφού το δυναμοσύνολο $\mathcal{P}(X)$ του X είναι τοπολογία στον X και περιέχει την $\mathcal{F}$. Αυτή η παρατήρηση δίνει νόημα στον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 16: Έστω X σύνολο και $\mathcal{F}$ οικογένεια υποσυνόλων του X. Με $\tau_{\mathcal{F}}$ συμβολίζουμε την τοπολογία που ορίζεται ως

$$\tau_{\mathcal{F}} = \bigcap\{\tau : \tau \text{ τοπολογία στον } X \text{ με } \mathcal{F} \subseteq \tau\}.$$

Η $\tau_{\mathcal{F}}$ καλείται η τοπολογία που παράγεται από την $\mathcal{F}$ και είναι η μικρότερη τοπολογία που περιέχει την $\mathcal{F}$.

Πρόταση 17. Έστω X σύνολο και $\mathcal{B}$ οικογένεια υποσυνόλων του X τέτοια ώστε

(α) $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$

(β) Αν $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}$ τότε $\bigcap_{i=1}^{n} B_i \in \mathcal{B}$.

Τότε η $\mathcal{B}$ είναι βάση για την τοπολογία την οποία παράγει (δηλαδή την $\tau_{\mathcal{B}}$).

Απόδειξη. Ορίζουμε την οικογένεια τ ως

$$\tau = \{\emptyset\} \cup \left\{ \bigcup_{i\in I} B_i : (B_i)_{i\in I} \subseteq \mathcal{B} \right\}.$$

Θα δείξουμε ότι η τ είναι τοπολογία στον X.

(1) Προφανώς $\emptyset \in \tau$ και από υπόθεση (α) $X \in \tau$.

(2) Η τ, εξ ορισμού, είναι κλειστή κάτω από τυχαίες ενώσεις.

(3) Η τ είναι κλειστή κάτω από πεπερασμένες τομές. Πράγματι αρκεί να δείξουμε ότι αν $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \in \tau$ τότε $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 \in \tau$. Αφού $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \in \tau$, υπάρχουν

$(B_i)_{i\in I}$ και $(B_j)_{j\in J}$ με $B_i, B_j \in \mathcal{B}$ για κάθε $i\in I$, $j\in J$ τέτοια ώστε

$$\mathcal{U}_1 = \bigcup_{i\in I} B_i \quad \text{και} \quad \mathcal{U}_2 = \bigcup_{j\in J} B_j.$$

Τότε

$$\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 = \left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) \cap \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right)$$

$$= \bigcup_{i\in I} \bigcup_{j\in J} (B_i \cap B_j)$$

Από υπόθεση (β) έχουμε ότι $B_i \cap B_j \in \mathcal{B}$ για κάθε $i\in I$ και $j\in J$. Άρα το $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$ γράφεται ως τυχαία ένωση στοιχείων της $\mathcal{B}$. Συνεπώς $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 \in \tau$.

Άρα η τ είναι τοπολογία στον X.

Προφανώς $\mathcal{B} \subseteq \tau$.

Από τον ορισμό της τ_B έχουμε αμέσως ότι $\tau \supseteq \tau_B$. (η τ_B είναι η ελάχιστη τοπολογία που περιέχει την $\mathcal{B}$).

Από την άλλη αν $\mathcal{U} \in \tau$, τότε το $\mathcal{U}$ είναι ένωση στοιχείων της $\mathcal{B}$. Αφού $\mathcal{B} \subseteq \tau_B$ και η τ_B είναι τοπολογία, έχουμε ότι $\mathcal{U} \in \tau_B$. Συνεπώς $\tau \subseteq \tau_B$.

Άρα $\tau = \tau_B$.

Αλλά, κατά προφανή τρόπο, η $\mathcal{B}$ είναι βάση για την τ (εξ' ορισμού κάθε στοιχείο της τ είναι ένωση στοιχείων της $\mathcal{B}$) και συνεπώς η $\mathcal{B}$ είναι βάση για την τ_B. ⊏

ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΓΙΝΟΜΕΝΑ ΤΟΠΟΛΟΓΙΚΩΝ ΧΩΡΩΝ

Έστω $(X_1,\tau_1), \ldots, (X_n,\tau_n)$ μια πεπερασμένη οικογένεια τοπολογικών χώρων.
Θεωρούμε το σύνολο $\mathcal{R}$ όλων των ανοιχτών ορθογωνίων, δηλαδή το

$$\mathcal{R} = \{ U_1 \times \cdots \times U_n : U_i \in \tau_i \quad \forall i=1,\ldots,n \}.$$

Παρατηρούμε ότι το $\mathcal{R}$ είναι κλειστό κάτω από πεπερασμένες τομές. Πράγματι αν

$$U_1 \times \cdots \times U_n \in \mathcal{R} \quad \text{και} \quad V_1 \times \cdots \times V_n \in \mathcal{R}$$

Τότε

$$(U_1 \times \cdots \times U_n) \cap (V_1 \times \cdots \times V_n) = (U_1 \cap V_1) \times \cdots \times (U_n \cap V_n) \in \mathcal{R},$$

αφού $U_i \cap V_i \in \tau_i$ για κάθε $i=1,\ldots,n$.

Επιπλέον το σύνολο $X_1 \times \dots \times X_n$ ανήκει στην $\mathcal{R}$, αφού $X_i \in \tau_i$ για κάθε $i=1,\dots,n$.

Από την Πρόταση 17, η οικογένεια των ανοιχτών ορθογωνίων είναι βάση για την τοπολογία την οποία παράγει.

Ορισμός 18. Έστω $(X_1,\tau_1),\dots,(X_n,\tau_n)$ οικογένεια τοπολογικών χώρων. Με $\prod_{i=1}^{n} \tau_i$ συμβολίζουμε την τοπολογία στον $\prod_{i=1}^{n} X_i$ που παράγεται από την οικογένεια των ανοιχτών ορθογωνίων. Την τοπολογία $\prod_{i=1}^{n} \tau_i$ την καλούμε τοπολογία γινόμενο των τ_i.

Υπενθυμίζουμε ότι αν $(X_i)_{i\in I}$ είναι οικογένεια μη κενών συνόλων και $X=\prod_{i\in I} X_i$ το καρτεσιανό τους γινόμενο τότε για κάθε $i_0\in I$ ορίζεται η προβολή στην i_0 συντεταγμένη, που είναι η συνάρτηση

$$\pi_{i_0} : \prod_{i\in I} X_i \to X_{i_0}$$

με $\pi_{i_0}\left((x_i)_{i\in I}\right) = x_{i_0}$. Μια βασική ιδιότητα της τοπολογίας γινόμενο είναι η ακόλουθη

Πρόταση 19. Έστω $(X_1,\tau_1),\dots,(X_n,\tau_n)$ οικογένεια τοπολογικών χώρων. Τότε για κάθε $i_0\in\{1,\dots,n\}$, η προβολή

$$\pi_{i_0} : \left(\prod_{i=1}^{n} X_i , \prod_{i=1}^{n} \tau_i\right) \to (X_{i_0}, \tau_{i_0})$$

είναι συνεχής.

Απόδειξη. Έστω $U \subseteq X_{i_0}$ ανοιχτό. Τότε

$$\pi_{i_0}^{-1}(U) = X_1 \times \dots \times \underset{\substack{\uparrow \\ i_0\text{-θεση}}}{U} \times \dots \times X_n$$

Δηλαδή το $\pi_{i_0}^{-1}(U)$ είναι ανοιχτό ορθογώνιο. Συνεπώς $\pi_{i_0}^{-1}(U) \in \prod_{i=1}^{n} \tau_i$. Άρα η π_{i_0} είναι συνεχής. □

Το ακόλουθο θεώρημα είναι η πιο σημαντική ιδιότητα της τοπολογίας γινόμενο.

Θεώρημα 20. Έστω (X_1, τ_1), (X_2, τ_2) τοπολογικοί χώροι και $K_1 \subseteq X_1$, $K_2 \subseteq X_2$ συμπαγή. Τότε το σύνολο $K_1 \times K_2$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $X_1 \times X_2$ για την τοπολογία γινόμενο.

Απόδειξη. Έστω $K_1 \subseteq X_1$, $K_2 \subseteq X_2$ συμπαγή και $(U_i)_{i\in I}$ ανοιχτό κάλυμα του $K_1 \times K_2$.
Αφού η οικογένεια των ανοιχτών ορθογωνίων είναι βάση για την $\tau_1 \times \tau_2$, χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $U_i = A_i \times B_i$ όπου $A_i \in \tau_1$ και $B_i \in \tau_2$ για κάθε $i \in I$.

Έστω $x \in K_1$. Θέτουμε

$$I_x = \{i \in I : x \in A_i\}.$$

Η οικογένεια $(A_i \times B_i)_{i\in I_x}$ καλύπτει το σύνολο $\{x\} \times K_2$.

Άρα η οικογένεια $(B_i)_{i\in I_x}$ είναι ανοιχτό κάλυμα του K_2.

Συνεπώς υπάρχει $F_x \subseteq I_x$ πεπερασμένο ώστε

$$K_2 \subset \bigcup_{i\in F_x} B_i$$

Άρα

$$\{x\} \times K_2 \subseteq \bigcup_{i\in F_x} A_i \times B_i \quad (1)$$

Θέτουμε $A_x = \bigcap_{i\in F_x} A_i$. Τότε $A_x \subseteq X_1$ ανοιχτό και $x \in A_x$. Επιπλέον

$$A_x \subseteq A_i \text{ για κάθε } i\in F_x \quad (2)$$

Η οικογένεια $(A_x)_{x\in K_1}$ είναι ανοιχτό κάλυμα του K_1.

Άρα υπάρχουν $x_1, \dots, x_n \in K_1$ ώστε

$$K_1 \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} A_{x_j} \quad (3)$$

Ισχυριζόμαστε ότι

$$K_1 \times K_2 \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} \left(\bigcup_{i\in F_{x_j}} (A_i \times B_i) \right).$$

Πράγματι έστω $(x,y) \in K_1 \times K_2$. Αφού $x \in K_1$, από σχέση (3), υπάρχει $j \in \{1, \dots, n\}$ ώστε

$$x \in A_{x_j}.$$

Από σχέση (1), υπάρχει $i \in F_{x_j}$ ώστε $y \in B_i$.
Από σχέση (2) έχουμε ότι $x \in A_{x_j} \subseteq A_i$. Άρα

$$(x,y) \in A_i \times B_i \subseteq \bigcup_{i\in F_{x_j}} (A_i \times B_i).$$

Άρα το $(A_i \times B_i)_{i\in F_{x_j},\, i\in\{1,\dots,n\}}$ είναι ανοιχτό πεπερασμένο υποκάλυμμα του $K_1 \times K_2$ και συνεπώς το $K_1 \times K_2$ είναι συμπαγές. □

ΤΥΧΑΙΑ ΓΙΝΟΜΕΝΑ ΤΟΠΟΛΟΓΙΚΩΝ ΧΩΡΩΝ

Έστω $(X_i, \tau_i)_{i \in I}$ οικογένεια τοπολογικών χώρων.
Έστω $\mathcal{R}$ το εξής σύνολο

$$\mathcal{R} = \left\{ \prod_{i \in I} U_i : U_i \in \tau_i \text{ και } U_i = X_i \text{ για όλα εκτός από πεπερασμένα } i \in I \right\}.$$

Παρατηρούμε ότι το $\mathcal{R}$ είναι κλειστό κάτω από πεπερασμένες τομές. Πράγματι έστω $A, B \in \mathcal{R}$. Τότε υπάρχουν $I_A, I_B \subseteq I$ πεπερασμένα, τέτοια ώστε

$$A = \prod_{i \in I} U_i \quad \text{όπου} \quad U_i = X_i \text{ για κάθε } i \in I \setminus I_A$$
$$\text{και } U_i \in \tau_i \text{ για κάθε } i \in I_A$$

ενώ

$$B = \prod_{i \in I} W_i, \quad \text{όπου} \quad W_i = X_i \text{ για κάθε } i \in I \setminus I_B$$
$$\text{και } W_i \in \tau_i \text{ για κάθε } i \in I_B$$

Τότε $A \cap B = \prod_{i \in I} V_i$ όπου $V_i = X_i$ για κάθε $i \in I \setminus (I_A \cup I_B)$

και $V_i = U_i \cap V_i \in \tau_i$ για κάθε $i \in I_A \cup I_B$.

Άρα $A \cap B \in \mathcal{R}$. Επιπλέον $\prod_{i \in I} X_i \in \mathcal{R}$.

Συνεπώς, από την Πρόταση 17, η οικογένεια $\mathcal{R}$ είναι βάση για την τοπολογία την οποία παράγει.

<u>Ορισμός 21</u>. Έστω $(X_i, \tau_i)_{i \in I}$ οικογένεια τοπολογικών χώρων. Με $\prod_{i \in I} \tau_i$ συμβολίζουμε την τοπολογία στον $\prod_{i \in I} X_i$ που παράγεται από την $\mathcal{R}$. Την τοπολογία $\prod_{i \in I} \tau_i$ την καλούμε τοπολογία γινόμενο.

Έχουμε την αντίστοιχη πρόταση με τη Πρόταση 19.

Πρόταση 22. Έστω $(X_i, \tau_i)_{i\in I}$ οικογ. τοπολογικών χώρων. Τότε για κάθε $i_0 \in I$ η προβολή

$$\pi_{i_0} : \left(\prod_{i\in I} X_i , \prod_{i\in I} \tau_i\right) \longrightarrow (X_{i_0}, \tau_{i_0})$$

είναι συνεχής.

Απόδειξη. Έστω $U \subseteq X_{i_0}$ ανοιχτό. Τότε

$$\pi_{i_0}^{-1}(U) = \prod_{i\in I} U_i$$

όπου $U_i = X_i$ αν $i \neq i_0$ και $U_i = U$ αν $i = i_0$. Συνεπώς $\pi_{i_0}^{-1}(U) \in \mathcal{R}$. Άρα η π_{i_0} είναι συνεχής. □

Θα μπορούσε κανείς να αναρωτηθεί γιατί χρησιμοποιήσαμε σαν βάση περιοχών της τοπολογίας γινόμενο το σύνολο $\mathcal{R}$ και όχι το σύνολο όλων των ανοιχτών ορθογωνίων. Ο λόγος είναι ότι με αυτό τον ορισμό έχουμε την ακόλουθη γενίκευση του Θεωρήματος 20, που οφείλεται στον Tychonoff.

Θεώρημα 23 (Tychonoff). Έστω $(X_i, \tau_i)_{i\in I}$ οικογένεια τοπολογικών χώρων και $K_i \subseteq X_i$ συμπαγές για κάθε $i \in I$. Τότε το σύνολο $\prod_{i\in I} K_i$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\prod_{i\in I} X_i$ για την τοπολογία γινόμενο.

Το Θεώρημα του Tychonoff είναι θεμελιώδους σημασίας για την γενική τοπολογία.
Η απόδειξή του βασίζεται στο Αξίωμα της Επιλογής (στην πραγματικότητα το Θεώρημα του Tychonoff είναι ισοδύναμο με το Αξίωμα της Επιλογής) και ξεφεύγει από τα πλαίσια αυτών των σημειώσεων.

Μια πιο εύκολη, αλλά εξαιρετικά σημαντική, ιδιότητα της τοπολογίας γινόμενο είναι η ακόλουθη.

Πρόταση 24. Έστω $(X_i, \tau_i)_{i\in I}$ οικογένεια Hausdorff τοπολογικών χώρων.
Τότε ο $\left(\prod_{i\in I} X_i, \prod_{i\in I} \tau_i\right)$ είναι Hausdorff.

Απόδειξη. Έστω $(x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} X_i$ με $(x_i)_{i\in I} \neq (y_i)_{i\in I}$. Συνεπώς υπάρχει $i_0 \in I$ τέτοιο ώστε $x_{i_0} \neq y_{i_0}$. Αφού ο (X_{i_0}, τ_{i_0}) είναι Hausdorff υπάρχουν $U_{i_0}, V_{i_0} \subseteq X_{i_0}$ ανοιχτά με $x_{i_0} \in U_{i_0}$, $y_{i_0} \in V_{i_0}$ και $U_{i_0} \cap V_{i_0} = \emptyset$.

Θέτουμε $U = \prod_{i\in I} U_i$ με $U_i = X_i$ αν $i \neq i_0$ και $\overset{U_i=}{U_{i_0}}$ αν $i = i_0$

και $V = \prod_{i\in I} V_i$ με $V_i = X_i$ αν $i \neq i_0$ και $\overset{V_i=}{V_{i_0}}$ αν $i = i_0$.

Τότε $U, V \subseteq \prod_{i\in I} X_i$ ανοιχτά για την τοπολογία γινόμενο, $(x_i)_{i\in I} \in U$, $(y_i)_{i\in I} \in V$ και $U \cap V = \emptyset$

Άρα ο τοπ. χώρος $\left(\prod_{i\in I} X_i, \prod_{i\in I} \tau_i\right)$ είναι Hausdorff. □

ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΙΚΟΙ ΤΟΠΟΛΟΓΙΚΟΙ ΧΟΡΟΙ

Ορισμός 25. Έστω (X,τ_1), (Y,τ_2) τοπολ. χώροι. Θα λέμε ότι οι (X,τ_1) και (Y,τ_2) ότι είναι ομοιομορφικοί αν υπάρχει συνάρτηση $f: X \to Y$ τέτοια ώστε

(α) Η f να είναι 1-1

(β) Η f να είναι επί

(γ) Και η f και η f^{-1} να είναι συνεχής.

Σε αυτή την περίπτωση η f καλείται ομοιομορφισμός.

Η ακόλουθη πρόταση δείχνει την σημασία της έννοιας του ομοιομορφισμού των τοπολογικών χώρων.

Πρόταση 26. Έστω (X,τ_1), (Y,τ_2) ομοιομορφικοί τοπολογικοί χώροι και $f: X \to Y$ ομοιομορφισμός.

Τότε

(α) Αν $U \subseteq X$, τότε U ανοιχτό αν και μόνο αν $f(U)$ ανοιχτό

(β) Αν $C \subseteq X$, τότε C κλειστό αν και μόνο αν $f(C)$ κλειστό

(γ) Αν $K \subseteq X$, τότε K συμπαγές αν και μόνο αν $f(K)$ συμπαγής.

Απόδειξη. Έστω $A \subseteq X$ τυχαίο. Τότε, αφού η f είναι 1-1 και επί έχουμε

$$A = f^{-1}(f(A)) \text{ και } (f^{-1})^{-1}(A) = f(A)$$

(α) Αν U ανοιχτό τότε αφού η f^{-1} είναι συνεχής, έχουμε ότι το $f(U) = (f^{-1})^{-1}(U)$ είναι ανοιχτό

Αντίστροφα αν το $f(U)$ είναι ανοιχτό τότε, αφού η f είναι συνεχής, έχουμε ότι το $U = f^{-1}(f(U))$ είναι ανοικτό.

(β) Όμοια με το (α).

(γ) Έστω ότι το K είναι συμπαγές και έστω $(V_i)_{i\in I}$ ένα ανοιχτό κάλυμα του $f(K)$.

Η οικογένεια $(f^{-1}(V_i))_{i\in I}$ είναι ανοιχτό κάλυμα του K. Πράγματι το $f^{-1}(V_i)$ είναι ανοιχτό (ως αντίστροφη εικόνα ανοιχτού) για κάθε $i\in I$ και επιπλέον αφού

$$f(K) \subseteq \bigcup_{i\in I} V_i$$

έχουμε

$$K = f^{-1}(f(K)) \subseteq f^{-1}\Big(\bigcup_{i\in I} V_i\Big) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(V_i)$$

Έστω $(f^{-1}(V_{i_n}))_{n=1}^{\ell}$ πεπερασμένο υποκάλυμα του K. Τότε

$$K \subseteq \bigcup_{n=1}^{\ell} f^{-1}(V_{i_n}) \Longrightarrow f(K) \subseteq f\Big(\bigcup_{n=1}^{\ell} f^{-1}(V_{i_n})\Big)$$

$$= \bigcup_{n=1}^{\ell} f\big(f^{-1}(V_{i_n})\big)$$

$$= \bigcup_{n=1}^{\ell} V_{i_n}$$

Δηλαδή το $(V_{i_n})_{n=1}^{\ell}$ είναι υποκάλυμα του $f(K)$. Άρα το $f(K)$ είναι συμπαγές.

Το αντίστροφο δείχνεται με πανομοιότυπο τρόπο. □.

Η Πρόταση 26 μας επιτρέπει να ταυτίζουμε δύο ομοιομορφικούς τοπολογικούς χώρους μιας και όποια ιδιότητα αναφέρεται στα ανοιχτά ή κλειστά υποσύνολα του ενός μεταφέρεται στον άλλο.

Η ΕΛΑΧΙΣΤΗ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ ΠΟΥ ΚΑΝΕΙ ΜΙΑ ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΑ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΣΥΝΕΧΕΙΣ

Έστω X μη κενό σύνολο και $\mathcal{F}=(f_i)_{i\in I}$ μια οικογένεια πραγματικών συναρτήσεων στον X, δηλαδή $f_i : X \to \mathbb{R}$ για κάθε $i\in I$.

Ενδιαφερόμαστε να βρούμε μια τοπολογία τ στον X, για την οποία όλες οι f_i να είναι συνεχείς. Παρατηρούμε ότι αν $\tau=\mathcal{P}(X)$ τότε κάθε f_i είναι συνεχής, αλλά αυτή η λύση σίγουρα δεν είναι και η πιο οικονομική (έχουμε κάνει όλα τα υποσύνολα του X ανοιχτά).

Έτσι, κατά φυσιολογικό τρόπο προκύπτει το πρόβλημα της εύρεσης της "ελάχιστης" (ή πιο οικονομικής) τοπολογίας στον X για την οποία όλες οι f_i να είναι συνεχείς.

Η ύπαρξη της ελάχιστης τοπολογίας μπορεί να εξασφαλισθεί από την Πρόταση 15. Πράγματι θεωρούμε το σύνολο

$$\{\tau : \tau \text{ τοπολογία στον } X \text{ και για κάθε } i\in I \text{ η συνάρτηση } f_i \text{ είναι συνεχής}\}.$$

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει το παραπάνω σύνολο είναι μη κενό αφού η τοπολογία $\tau=\mathcal{P}(X)$ ανήκει σε αυτό.
Έτσι ο ακόλουθος ορισμός έχει νόημα

Ορισμός 27. Έστω X σύνολο και $\mathcal{F}=(f_i)$ οικογένεια πραγματικών συναρτήσεων στον X. Με $(X,\mathcal{F})$ συμβολίζουμε την τοπολογία στον X που ορίζεται ως

$$(X,\mathcal{F}) = \bigcap \{\tau : \tau \text{ τοπολογία στον } X \text{ και για κάθε } i\in I \text{ η συνάρτηση } f_i \text{ είναι συνεχής}\}.$$

Δηλαδή η $(X,\mathcal{F})$ είναι η ελάχιστη τοπολογία στο X για την οποία κάθε συνάρτηση f_i είναι συνεχής.

Παρόλο που η ύπαρξη της ελάχιστης τοπολογίας $(X,\mathcal{F})$ μπορεί να εξασφαλισθεί είναι εξαιρετικά χρήσιμη η περιγραφή της κατασκευής της και ιδιαίτερα η περιγραφή της βάσης περιοχών της. Η κατασκευή της θα γίνει σε τρία στάδια

Βήμα 1º Θεωρούμε την ακόλουθη οικογένεια υποσυνόλων του X.

$$\mathcal{B}_1 = \{ f^{-1}(I) : f\in\mathcal{F} \text{ και } I \text{ ανοικτό διάστημα του } \mathbb{R} \}$$

(δηλαδή το I είναι της μορφής $I=(\alpha,b)$ με $\alpha<b$ και $\alpha, b\in\mathbb{R}$).

Βήμα 2º Θεωρούμε την οικογένεια όλων των υποσυνόλων του X που προκύπτει από πεπερασμένες τομές στοιχείων της $\mathcal{B}_1$. Δηλαδή

$$\mathcal{B}_2 = \{ f_1^{-1}(I_1)\cap f_2^{-1}(I_2)\cap\dots\cap f_n^{-1}(I_n) : f_1,\dots,f_n\in\mathcal{F} \text{ και } I_1,\dots,I_n \text{ ανοιχτά διαστήματα του } \mathbb{R} \}.$$

Βήμα 3ο.

Παρατηρούμε ότι η οικογένεια $\mathcal{B}_2$ είναι κλειστή κάτω από πεπερασμένες τομές. Δηλαδή αν $U_1, \dots, U_k \in \mathcal{B}_2$ τότε το σύνολο $U_1 \cap \dots \cap U_k$ ανήκει και αυτό στην $\mathcal{B}_2$. Επιπλέον, αφού για κάθε $f \in \mathcal{F}$ έχουμε

$$X = f^{-1}(\mathbb{R}) = \bigcup_{\substack{I \subseteq \mathbb{R} \text{ ανοιχτό} \\ \text{διάστημα}}} f^{-1}(I)$$

προκύπτει ότι $X = \bigcup_{U \in \mathcal{B}_2} U$.

Συνεπώς, από την πρόταση 17, η $\mathcal{B}_2$ είναι βάση για την τοπολογία την οποία παράγει. Δηλαδή το σύνολο

$$\tau = \{\emptyset\} \cup \left\{ \bigcup_{j \in J} U_j \ : \ (U_j)_{j \in J} \subseteq \mathcal{B}_2 \right\}$$

είναι τοπολογία στον X και η οικογένεια $\mathcal{B}_2$ είναι βάση για την τ.

Θα δείξουμε ότι η τ ταυτίζεται με την $(X, \mathcal{F})$.

Ισχυρισμός 1. $\tau \supseteq (X, \mathcal{F})$.

Απόδειξη:

Από τον ορισμό της $(X, \mathcal{F})$ ως την ελάχιστη τοπολογία που κάνει κάθε $f \in \mathcal{F}$ συνεχή, αρκεί να δείξουμε ότι κάθε $f \in \mathcal{F}$ είναι τ-συνεχής.

Έστω $f \in \mathcal{F}$ και $U \subseteq \mathbb{R}$ ανοιχτό τυχαίο.

Αν $U = \emptyset$, τότε $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \tau$.

Αν $U \neq \emptyset$, τότε $U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$ όπου $I_n \subseteq \mathbb{R}$ ανοιχτά διαστήματα του $\mathbb{R}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Από τον ορισμό της $\mathcal{B}_1$ έχουμε ότι

$$f^{-1}(I_n) \in \mathcal{B}_1 \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Αφού $\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B}_2$, συμπεραίνουμε ότι $f^{-1}(I_n) \in \mathcal{B}_2$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αλλά

$$f^{-1}(U) = f^{-1}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(I_n).$$

Άρα το σύνολο $f^{-1}(U)$ γράφεται ως ένωση στοιχείων της $\mathcal{B}_2$. Συνεπώς $f^{-1}(U) \in \tau$. Άρα η f είναι τ-συνεχής και ο ισχυρισμός αποδείχθηκε. ◇

Ισχυρισμός 2. $(X,\mathcal{F}) \supseteq \tau$.

Απόδειξη:

Αφού για κάθε $f \in \mathcal{F}$, η συνάρτηση f είναι $(X,\mathcal{F})$-συνεχής έχουμε ότι

$$f^{-1}(I) \in (X,\mathcal{F})$$

για κάθε $f \in \mathcal{F}$ και για κάθε $I \subseteq \mathbb{R}$ ανοιχτό διάστημα. Άρα

$$\mathcal{B}_1 \subseteq (X,\mathcal{F}).$$

Η $(X,\mathcal{F})$ είναι τοπολογία. Άρα είναι κλειστή κάτω από πεπερασμένες τομές. Συνεπώς

$$\mathcal{B}_2 \subseteq (X,\mathcal{F}) \qquad (1)$$

αφού η $\mathcal{B}_2$ προκύπτει από πεπερασμένες τομές στοιχείων της $\mathcal{B}_1$.

Αφού η τ έχει οριστεί ως το σύνολο όλων των υποσυνόλων του X που προκύπτουν από τυχαίες ενώσεις στοιχείων του $\mathcal{B}_2$ μαζί με το σύνολο $\emptyset$, καταλήγουμε ότι $\tau \subseteq (X,\mathcal{F})$. Πράγματι $\emptyset \in (X,\mathcal{F})$ και η $(X,\mathcal{F})$, ως τοπολογία, ~~περιέχει κάθε τυχαία ένωση στοιχείων της $\mathcal{B}_2$ από~~ τον εγκλεισμό (1). ◇.

Από τους ισχυρισμούς 1 και 2 καταλήγουμε ότι $(X,\mathcal{F}) = \tau$.

Παρατήρηση 28. Είναι σημαντικό να τονίσουμε ότι στην κατασκευή της $(X, \mathcal{F})$ πρώτα πήραμε πεπερασμένες τομές στοιχείων της $\mathcal{B}_1$ και στη συνέχεια τυχαίες ενώσεις. Είναι εύκολο να δούμε ότι αν αντιστρέψαμε τη διαδικασία (δηλαδή αν αρχικά παίρναμε τυχαίες ενώσεις και στη συνέχεια πεπερασμένες τομές) τότε θα καταλήγαμε σε μια οικογένεια συνόλων η οποία δεν θα ήταν τοπολογία. Για να γινόταν τοπολογία θα έπρεπε να παίρναμε για άλλη μια φορά τυχαίες ενώσεις, πράγμα που δεν μας οδηγεί στην ελάχιστη τοπολογία που επιθυμούμε.

Η παραπάνω διαδικασία όχι μόνο μας δείχνει την κατασκευή της $(X, \mathcal{F})$ αλλά μας εξασφαλίζει και μια βάση της, δηλαδή την οικογένεια $\mathcal{B}_2$. Τα στοιχεία της $\mathcal{B}_2$ όμως έχουν οριστεί ως αντίστροφες εικόνες ανοιχτών διαστημάτων. Πιο χρήσιμη είναι η παρακάτω (ισοδύναμη) γραφή της βάσης της $(X, \mathcal{F})$.

Πόρισμα 29. Για κάθε $\varepsilon > 0$, $x \in X$ και $\{f_1, \dots, f_n\} \subseteq \mathcal{F}$ θέτουμε

$$W(x, f_1, \dots, f_n, \varepsilon) = \{ y \in X : |f_i(x) - f_i(y)| < \varepsilon \text{ για κάθε } i = 1, \dots, n \}.$$

Τότε η οικογένεια

$$\{ W(x, f_1, \dots, f_n, \varepsilon) : \varepsilon > 0, x \in X, \{f_1, \dots, f_n\} \in \mathcal{F} \}$$

είναι μια βάση για την τοπολογία $(X, \mathcal{F})$.