Lang Algebra
Jacobson Basic Algebra

μαθημα 1° 18/2/19

Θεωρια Wedderburn - Artin
Δακτύλιοι (με μονάδα 1)
Ομομορφισμοί $f: R \to S$ $(f 1_R = 1_S)$
Υποδακτύλιοι $S \subseteq R$ $(1_R = 1_S)$
πχ $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}[i], \mathbb{R}[x], M_n(\mathbb{R}), \ldots$

Παράδειγμα Εστω $(M,+)$ μια αβελιανή ομάδα και:
$\text{End}M = \{ f: M \to M \ / \ f \text{ προσθετική} \}$
Ορίζω τη δομή δακτυλίου στον EndM ως εξής:
Αν $f, g \in \text{End}M$ (δηλαδή $f, g: M \to M$ είναι προσθετικές) τοτε ορίζω $f+g: M \to M$ και $fg: M \to M$ θετοντας:
$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \in M$ και $(fg)(x) = f(g(x)) \in M \quad \forall x \in M$
Δείχνουμε εύκολα ότι $f+g, fg \in \text{End}M$. Επιπλέον αυτές οι πράξεις εφοδιάζουν το EndM με τη δομή δακτυλίου με μονάδα την ταυτοτική απεικόνιση $I_M: M \to M$, $x \mapsto x$
πχ Αν $f, g, h \in \text{End}M$ τοτε $f(g+h) = fg + fh \in \text{End}M$
Πραγματι αν $x \in M$ τοτε $(f(g+h))(x) = f((g+h)(x)) =$
$= f(g(x) + h(x)) = f(g(x)) + f(h(x)) = (fg)(x) + (fh)(x) =$
$= (fg + fh)(x)$

V $\mathbb{R}$-δ.χ $\rightsquigarrow \mathcal{L}(V) = \{ f: V \to V \ / \ f \text{ γραμμική} \}$ αλγεβρα/$\mathbb{R}$

Παρατηρηση Η απεικονιση $\text{End}M \times M \xrightarrow{ev} M$ εχει τις
$(F, x) \mapsto F(x) := F \circ x$
εξης ιδιοτητες για $f, g \in \text{End}M$ και $x, y \in M$:
$(f+g) \circ x = f \circ x + g \circ x$ $\qquad (f+g)(x) = f(x) + g(x)$
$f \circ (x+y) = f \circ x + f \circ y$ $\qquad f(x+y) = f(x) + f(y)$ (f προσθετική)
$(fg) \circ x = f \circ (g \circ x)$ $\qquad (fg)(x) = f(g(x))$
$I_M \circ x = x$ $\qquad I_M(x) = x$

Ορισμός Αν R είναι ένας δακτύλιος τότε ένα <u>R-πρότυπο</u> είναι μια αβελιανή ομάδα $(M,+)$ εφοδιασμένη με έναν ομομορφισμό δακτυλίων $\ell : R \to End(M,+)$

π.χ. Κάθε αβελιανή ομάδα $(M,+)$ είναι ένα $End(M,+)$-πρότυπο $(\ell = I_{End(M,+)})$

Παρατήρηση Έστω M ένα R-πρότυπο και $\ell : R \to End(M,+)$ ο αντίστοιχος ομομορφισμός δακτυλίων. Η σύνθετη απεικόνιση

$$R \times M \xrightarrow{\ell \times I_M} End(M,+) \times M \xrightarrow{ev} M$$

$$(r,x) \mapsto (\ell(r), x) \longmapsto (\ell(r))(x) := rx$$

Έχει τις εξής ιδιότητες: Αν $r,s \in R$ και $x,y \in M$ τότε

$(r+s)x = rx + sx \Leftrightarrow (\ell(r+s))(x) = (\ell(r))(x) + (\ell(s))(x) \Leftarrow$

$r(x+y) = rx + ry$ $\quad \Leftrightarrow (\ell(r)+\ell(s))(x) = (\ell(r))(x) + (\ell(s))(x) \Leftarrow$

$(rs)x = r(sx)$ $\quad \Leftarrow (\ell(r)+\ell(s))\circ x = \ell(r)\circ x + \ell(s)\circ x$

$1x = x$

Παράδειγμα Έστω $R = \mathbb{Z}[t]/(t^2) := \mathbb{Z}(\tau)$ (όπου $\tau = \overset{t+(t^2)}{\overset{\|}{\overline{t}}} \in R$) τότε τα R-πρότυπα είναι ακριβώς οι αβελιανές ομάδες $(M,+)$ που είναι εφοδιασμένες με μια προσθετική απεικόνιση $f : M \to M$ με $f^2 = 0$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}[t] \arrow[r, "\text{πηλίκο}"] \arrow[dr, "\lambda"'] & \mathbb{Z}[t]/(t^2) = R \arrow[d, "\ell"] \\ & End(M,+) \end{tikzcd}$$

t

$(t^2) \subseteq Ker\lambda$ $\qquad \lambda(t) = f$

$\lambda(t^2) = 0 \Leftrightarrow (\lambda(t))^2 = 0 \Leftrightarrow f^2 = 0$

Ορισμός Αν M, N είναι δύο R-πρότυπα τότε μια απεικόνιση $f : M \to N$ καλείται <u>ομομορφισμός R-προτύπων</u> (ή <u>R-γραμμική απεικόνιση</u>) αν

(i) $f(x+y) = f(x) + f(y) \in N \quad \forall x, y \in M$

(ii) $f(rx) = rf(x) \in N \quad \forall r \in R, \ \forall x \in M$

Παράδειγμα Έστω M ένα R-πρότυπο και $\mathrm{End}_R M = \{f: M \to M \,/\, f \ R\text{-γραμμική}\}$
Προφανώς είναι $\mathrm{End}_R M \subseteq \mathrm{End}(M,+)$ και μάλιστα αν $\ell: R \to \mathrm{End}(M,+)$ είναι ο ομομορφισμός δακτυλίων που ορίζει το R-πρότυπο M τότε $\mathrm{End}_R M = \{f \in \mathrm{End}(M,+) \,/\, f\,\ell(r) = \ell(r) f \ \forall r \in R\}$
$= (\mathrm{im}\,\lambda)' \leq \mathrm{End}(M,+)$

Ορισμός Αν M είναι ένα R-πρότυπο, τότε ένα R-υποπρότυπο $N \subseteq M$ είναι μια υποομάδα τ.ω. να είναι $rx \in N$ $\forall r \in R$ $\forall x \in N$
(Τότε ο εγκλεισμός $i: N \hookrightarrow M$ είναι ομομορφισμός R-προτύπων)

Παραδείγματα
1) Αν M είναι ένα R-πρότυπο και $X \subseteq M$ είναι ένα υποσύνολο του τότε υπάρχει ένα ελάχιστο υποπρότυπο $\langle X \rangle$ του M που περιέχει το X το οποίο καλείται γραμμική θήκη του X και ορίζεται ως εξής
$\langle X \rangle = \{x \in M \,/\, \exists n \in \mathbb{N},\ r_1, r_2, \dots, r_n \in R$ και $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ με $r_1 x_1 + r_2 x_2 + \dots + r_n x_n = x\}$
2) Αν $X = \{x_1, \dots, x_k\}$ γράφω $\langle X \rangle = \langle x_1, \dots, x_k \rangle$

Ορισμός Το R-πρότυπο M καλείται πεπερασμένα παραγόμενο αν υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ και $x_1, \dots, x_k \in M$ έτσι ώστε $M = \langle x_1, \dots, x_k \rangle$
3) Αν M είναι ένα R-πρότυπο θεωρώ το διατεταγμένο σύνολο $L(M) = \{N \subseteq M \,/\, N \ R\text{-υποπρότυπο}\}$ (με τη σχέση $\subseteq$)
Αν $K, N \subseteq M$ είναι υποπρότυπα τότε:
(α) η τομή $K \cap N$ είναι R-υποπρότυπο (το οποίο είναι το μέγιστο υποπρότυπο που περιέχεται στα K, N)
(β) το άθροισμα $K + N = \{x \in M \,/\, \exists k \in K$ και $n \in N$ με $x = k + n\}$ είναι το ελάχιστο υποπρότυπο του M που περιέχει τα K και N
4) Αν $A, B, \Gamma \in L(M)$ για κάποιο R-πρότυπο M και $A \subseteq B$ τότε $(A + \Gamma) \cap B = A + (\Gamma \cap B)$ $(= A \cap B + A \cap \Gamma)$

απόδειξη

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \text{Είναι } A \subseteq A + \Gamma \\ \Gamma \cap B \subseteq \Gamma \subseteq A + \Gamma \end{array}\right\} \Rightarrow A + (\Gamma \cap B) \subseteq A + \Gamma \\ \left.\begin{array}{l} A \subseteq B \\ \Gamma \cap B \subseteq B \end{array}\right\} \Rightarrow A + (\Gamma \cap B) \subseteq B \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A + (\Gamma \cap B) \subseteq (A + \Gamma) \cap B$$

Για να δείξω ότι $(A+\Gamma)\cap B \subseteq A+(\Gamma\cap B)$ θεωρώ $x\in (A+\Gamma)\cap B$ τότε $x\in B$ και $x\in A+\Gamma$ άρα $\exists\, a\in A$ και $y\in\Gamma$ με $x=a+y$.
Τότε είναι $y = \underset{\in B}{x} - \underset{\in A\subseteq B}{a} \in B$ δηλαδή $y\in \Gamma\cap B$

Άρα $x = a+y \in A+(\Gamma\cap B)$

Παρατήρηση Αν $A\subseteq B$ είναι υποπρότυπο του R-προτύπου M, τότε $A=B \iff \exists$ R-υποπρότυπο $C\subseteq M$ με $A+C = B+C$ και $A\cap C = B\cap C$

μάθημα 9°
20/3/19

απόδειξη "$\Rightarrow$" προφανές
"$\Leftarrow$" Είναι $A = A+(C\cap A) = A+(C\cap B) \overset{\text{παρατήρηση 4)}}{=} (A+C)\cap B = (B+C)\cap B = B$

Πρότυπο πηλίκο Αν $N\subseteq M$ R-υποπρότυπο, τότε μπορώ να ορίσω στην αβελιανή ομάδα M/N τη δομή του R-προτύπου ως εξής: αν $r\in R$ και $x+N\in M/N$ θέτω $r(x+N) = rx+N\in M/N$
(Αν $x+N = x'+N$ τότε $x'-x\in N \Rightarrow r(x'-x)\in N \Rightarrow rx'-rx\in N \Rightarrow$
$\Rightarrow rx'+N = rx+N \in M/N$)

Πρόταση Έστω $f: M\to N$ είναι ομομορφισμός R-προτύπων
(i) Αν $M_0\subseteq M$ R-υποπρότυπο, τότε $f(M_0)\subseteq N$ R-υποπρότυπο
(ii) Η εικόνα $f(M)\subseteq N$ είναι υποπρότυπο του N (και $\operatorname{im} f = N \iff f$ επί)
(iii) Αν $N_0\subseteq N$ R-υποπρότυπο τότε $f^{-1}(N_0)$ R-υποπρότυπο του M.
(iv) Ειδικότερα, $\ker f = f^{-1}(0)\subseteq M$ είναι R-υποπρότυπο (και $\ker f = 0 \iff f$ 1-1)
απόδειξη (ii) Έστω $y,y'\in f(M_0)$ και $r\in R$. Τότε $\exists\, x,x'\in M_0$ με $y = f(x)$ και $y' = f(x')$. Συνεπώς $y+y' = f(x)+f(x') = f(x+x')\in f(M_0)$ και $ry = rf(x) = f(rx)\in f(M_0)$.
(iii) Όμοια με (ii). Έστω $x,x'\in f^{-1}(N_0)$ και $r\in R$. Τότε:
$f(x+x') = f(x)+f(x')\in N_0 \Rightarrow x+x'\in f^{-1}(N_0)$ κ.λ.π.

Θεωρήματα Ισομορφισμών Προτύπων

1° Θ. Ισομορφισμών Προτύπων

Εστω $f: M \to N$ ομομορφισμός προτύπων. Τότε υπάρχει μοναδικός ισομορφισμός $\tilde{f}: M/\ker f \to \operatorname{im} f$ τ.ω. η f να παραγοντοποιείται ως σύνθεση $M \xrightarrow{p} M/\ker f \xrightarrow{\tilde{f}} \operatorname{im} f \overset{i}{\hookrightarrow} N$

απόδειξη Ορίζω $\tilde{f}: M/\ker f \to \operatorname{im} f$

$$x + \ker f \mapsto f(x)$$

Είναι $\tilde{f}(r(x+\ker f)) = \tilde{f}(rx + \ker f) = f(rx) = r f(x) = r\tilde{f}(x+\ker f) \in \operatorname{im} f$ $\forall r \in R$. Η συνέχεια της απόδειξης είναι όπως στη Θ. ομάδων

2° Θ. Ισομορφισμών Προτύπων

Εστω $A, B \subseteq M$ υποπρότυπα ενός R-προτύπου M. Τότε $A/A\cap B \cong \frac{A+B}{B}$

απόδειξη Ορίζω $f: A \to A+B/B$ και παρατηρώ ότι f επί,

$$a \mapsto a+B$$

και $\ker f = A \cap B$. Από $1°$ Θ. Ισομορφισμών έχω:

$$A/A\cap B = A/\ker f \cong \operatorname{im} f = f(A) = A+B/B$$

3° Θ. Ισομορφισμών Προτύπων

Εστω N, M δύο R-πρότυπα με $N \subseteq M$.

(i) Αν $\Lambda \subseteq M/N$ είναι ένα υποπρότυπο τότε $\Lambda = L/N$ για ένα μοναδικό υποπρότυπο $L \subseteq M$ με $L \supseteq N$.

(ii) Αν $L \subseteq M$ είναι ένα υποπρότυπο με $L \supseteq N$ τότε το L/N είναι ένα υποπρότυπο και υπάρχει ισομορφισμός R-προτύπων $\frac{M/N}{L/N} \cong M/L$

απόδειξη (i) Εστω $p: M \to M/N$ η απεικόνιση πηλίκο και $L = p^{-1}(\Lambda)$. Καθώς η p είναι επί είναι $\Lambda = p(p^{-1}(\Lambda)) =$ $= p(L) = L/N$

Εστω $L_1, L_2 \subseteq M$ υποπρότυπα με $L_1, L_2 \supseteq N$ και $L_1/N = L_2/N$. Θ.δ.ο. $L_1 = L_2$, δηλ. $L_1 \subseteq L_2$ και $L_2 \subseteq L_1$. Αν $x \in L_1$ τότε $x+N \in L_1/N = L_2/N$ και άρα υπάρχει $x' \in L_2$ με $x+N = x'+N \in M/N \Rightarrow x'-x \in N \subseteq L_2$.

Συνεπώς $x = x' - (x'-x) \in L_2$ άρα $L_1 \subseteq L_2$

(ii) Εστω $g: M/N \to M/L$ με $g(x+N) = x+L \in M/L$.

Η g είναι καλά ορισμένη καθώς $N \subseteq L$. (Αν $x+N = x'+N \in M/N$) τότε

$x'-x \in N \Rightarrow x'-x \in L \Rightarrow x+L = x'+L \in M/L$).

Η q είναι R-γραμμική: Αν $x_1+N, x_2+N \in M/N$ και $r \in R$ τότε
$q\left((x_1+N)+(x_2+N)\right) = q\left((x_1+x_2)+N\right) = (x_1+x_2)+L = (x_1+L)+(x_2+L) =$
$= q(x_1+N)+q(x_2+N) \in M/L$
$q(r(x_1+N)) = q(rx_1+N) = rx_1+L = r(x_1+L) = rq(x_1+N) \in M/L$

Η q είναι επί και $\ker q = L/N$. Συνεπώς από το 1° Θ. Ισομορφισμών υπάρχει ισομορφισμός $\bar{q}: \dfrac{M/N}{L/N} = \dfrac{M/N}{\ker q} \to \operatorname{Im} q = M/L$

Προταση Οι επόμενες συνθήκες είναι ισοδύναμες για ένα R-πρότυπο M:

(i) Δεν υπάρχει γνησίως αύξουσα ακολουθία υποπροτύπων του M.
(Ισοδύναμα αν $M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \dots \subseteq M_n \subseteq \dots$ είναι υποπρότυπα του M τότε υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ με $M_n = M_{n+1} = M_{n+2} = \dots$)

(ii) Κάθε υποπρότυπο $N \subseteq M$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο.

(iii) Κάθε μη-κενή οικογένεια $\mathcal{X}$ υποπροτύπων του M έχει μεγιστικό στοιχείο. ($\exists N \in \mathcal{X}: \forall N' \in \mathcal{X}$ είναι $N' \supseteq N \Rightarrow N' = N$)

Στην περίπτωση που αυτές ικανοποιούνται, το R-πρότυπο M καλείται πρότυπο της Noether.

__απόδειξη__ (i) ⇒ (iii) Καθώς $\mathcal{X} \neq \emptyset$, επιλέγω $M_0 \in \mathcal{X}$. Αν το M_0 είναι μεγιστικό τελείωσα. Αν όχι, $\exists M_1 \in \mathcal{X}$ με $M_1 \supsetneq M_0$. Αν το M_1 είναι το μεγιστικό, ομοίως τελείωσα. Αν όχι $\exists M_2 \in \mathcal{X}$ με $M_2 \supsetneq M_1$. Από (i) φαίνεται ότι κάποια στιγμή θα το βρώ.

(iii) ⇒ (ii) Θεωρώ ένα R-υποπρότυπο $N \subseteq M$ και ορίζω $\mathcal{X}$ τη συλλογή όλων των πεπερασμένα παραγόμενων υποπροτύπων του N.
Είναι $\mathcal{X} \neq \emptyset$ καθώς $0 \in \mathcal{X}$. Από την υπόθεση, υπάρχει μεγιστικό στοιχείο $N_0 \in \mathcal{X}$. Είναι $N_0 \subseteq N$ και $N_0 = \langle x_1, \dots, x_k \rangle$ για κάποια $x_1, \dots, x_k \in N_0$. __Ισχυρισμός__: $N_0 = N$. __Απόδειξη__: Έστω $x \in N$. Τότε $\langle x_1, x_2, \dots, x_k, x \rangle := N_1 \in \mathcal{X}$ και $N_1 \supseteq N_0$. Άρα είναι $N_1 = N_0$ και έτσι $x \in N_0$, άρα $N_0 = N \Rightarrow N$ πεπερασμένα παραγόμενο.

(ii) ⇒ (i) Έστω $M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \dots$ μια αύξουσα ακολουθία υποπροτύπων του M και $N = \bigcup_{n=0}^{\infty} M_n$. Είναι εύκολο ν.δ.ο. το N είναι υποπρότυπο του M. Από την υπόθεση $\exists x_1, x_2, \dots, x_k \in N$ τ.ω. $N = \langle x_1, \dots, x_k \rangle$.
Είναι $x_i \in N = \bigcup_{n=0}^{\infty} M_n$ και άρα υπάρχει $n_i \in \mathbb{N}$ με $x_i \in M_{n_i}$ για

$i=1,\dots,k$. Αν $n_0 = \max\{n_1,\dots,n_k\}$ τότε $x_i \in M_{n_0}$ $\forall i=1,\dots,k$.
Συνεπώς $N = \langle x_1,\dots,x_k\rangle \subseteq M_{n_0} \subseteq M_{n_0+1} \subseteq \dots \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} M_n = N$
και άρα $M_{n_0} = M_{n_0+1} = M_{n_0+2} = \dots$

Πρόταση Τα επόμενα είναι ισοδύναμα για ένα R-πρότυπο M
(i) Δεν υπάρχει γνησίως φθίνουσα ακολουθία υποπροτύπων του M.
(Αν $M_0 \supseteq M_1 \supseteq M_2 \supseteq \dots$ υποπρότυπα του M τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $M_{n_0} = M_{n_0+1} = M_{n_0+2} = \dots$)
(ii) Κάθε μη-κενή οικογένεια υποπροτύπων $\mathcal{F}$ του M έχει ελαχιστικό στοιχείο ($\exists N \in \mathcal{F}$ ώστε $\forall N' \in \mathcal{F}$ με $N' \subseteq N \Rightarrow N' = N$)
Στην περίπτωση που αυτά ικανοποιούνται, το R-πρότυπο M καλείται πρότυπο του Artin

απόδειξη (i) ⇒ (ii) Είναι $\mathcal{F} \neq \emptyset$ και άρα υπάρχει $M_0 \in \mathcal{F}$. Αν το M_0 είναι ελαχιστικό στοιχείο τελείωσα. Αν όχι, $\exists M_1 \in \mathcal{F}$ με $M_1 \subset M_0$.
Αν το M_1 είναι ελαχιστικό, τελείωσα. Αν όχι συνεχίζω με τον ίδιο τρόπο και η υπόθεση μου λέει ότι θα το βρώ.
(ii) ⇒ (i) Αν $M_0 \supseteq M_1 \supseteq M_2 \supseteq \dots$ υποπρότυπα του M ορίζω:
$\mathcal{F} = \{M_n / n=0,1,2,\dots\}$ Από υπόθεση $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε το $M_{n_0} \in \mathcal{F}$ να είναι ελαχιστικό. Αν $n \in \mathbb{N}$ με $n > n_0$ είναι $M_n \subseteq M_{n_0}$, $M_n \in \mathcal{F}$ και άρα είναι $M_n = M_{n_0}$. Δηλαδή $M_{n_0} = M_{n_0+1} = M_{n_0+2} = \dots$