## Αναπαραστάσεις της $A_4$

μάθημα 16°
6/5/19

$A_4 = \langle (12)(34), (123) \rangle = \langle a, b \mid a^2, b^3, (ab)^3 \rangle$

$a = (12)(34),\ b = (123)$

$[ab = (12)(34)(123) = (243)]$

$|A_4| = 12 \Rightarrow \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}A_4 = 12$

1-διάστατες αναπαραστάσεις: Είναι $[A_4, A_4] = V$

όπου $V = \{ \mathbb{1}, (12)(34), (13)(24), (14)(23) \}$

Πράγματι $|A_4/V| = \frac{12}{4} = 3 \Rightarrow A_4/V \simeq \mathbb{Z}_3 \Rightarrow [A_4, A_4] \subseteq V.$

Αντίστροφα, είναι: $[(123), (234)] = (123)(234)(132)(243) = (14)(23)$

δηλαδή $(14)(23) \in [A_4, A_4]$ ...

Συνεπώς $(A_4)_{ab} = A_4/[A_4, A_4] = A_4/V \simeq \mathbb{Z}_3 = \langle \overline{(123)} \rangle$

Εναλλακτικά, είναι: $(A_4)_{ab} = \langle a, b \mid a^2, b^3, (ab)^3, aba^{-1}b^{-1} \rangle = \langle b \mid b^3 \rangle$

Συνεπώς υπάρχουν 3 1-διάστατες αναπαραστάσεις $(\chi_1, \chi_2, \chi_3)$ οι οποίες αντιστοιχούν στους ομομορφισμούς ομάδων $(A_4)_{ab} \to \mathbb{C}^*$

$b \mapsto ?$

Πίνακας Χαρακτήρων

| | $\mathbb{1}_{(1)}$ | $(12)(34)_{(3)}$ | $(123)_{(4)}$ | $(132)_{(4)}$ |
|---|---|---|---|---|
| $\chi_1$ | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $\chi_2$ | 1 | 1 | $\omega$ | $\omega^2$ |
| $\chi_3$ | 1 | 1 | $\omega^2$ | $\omega$ |
| $\chi$ | 3 | | | |

$(234)(12)(34)(243) = (13)(24)$

Τα $(123)$ και $(132)$ δεν είναι συζυγή στην $A_4$, γιατί $\chi_2((123)) \neq \chi_2((132))$

Εργαζόμενος στην $S_4$ είναι: $[S_4 : C_{(123)}] = \#[(123)]_{S_4}$

(διότι αν $[g] = \{xgx^{-1} / x \in G\}$, $C_g = \{x \in G / xg = gx\}$ ισχύει $\#[g] = [G : C_g]$)

δηλαδή $\frac{24}{|C_{(123)}|} = 8 \Rightarrow |C_{(123)}| = 3 \Rightarrow \langle (123) \rangle = C_{(123)}$

Άρα $C_{(123)} \subseteq A_4 \Rightarrow A_4 \cap C_{(123)} = C_{(123)}$

Είναι $[S_4 : C_{(123)}] = [S_4 : A_4][A_4 : C_{(123)}] \Rightarrow [A_4 : C_{(123)}] = 4$

και άρα $\#[(123)]_{A_4} = 4$

Γράφοντας $\mathbb{C}A_4 = \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \prod_{i=1}^{r} M_{n_i}(\mathbb{C})$, $n_i > 1$ έχω:

$12 = 1 + 1 + 1 + n_1^2 + n_2^2 + \ldots$ άρα λείπει ακριβώς 1 3-διάστατη
$(4, 9, 16, 25, \ldots)$ ανάγωγη αναπαράσταση.

Η $S_4$ δρα με μεταθέσεις στον $V = \mathbb{C}^4 = \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus \mathbb{C}e_3 \oplus \mathbb{C}e_4$

(π.χ. $(132)e_1 = e_3$, $(132)e_2 = e_1$, $(123)e_4 = e_4$)
και ο $U = \langle(1,1,1,1)\rangle = \langle e_1+e_2+e_3+e_4\rangle$ είναι $S_4$-αναλλοίωτος.
Θεωρώ το $\mathbb{C}S_4$-πρότυπο $V/U$ και το επαγόμενο $\mathbb{C}A_4$-πρότυπο $\underbrace{V/U}_{\bar{e_4} = -\bar{e_1}-\bar{e_2}-\bar{e_3}}$
$V/U = \mathbb{C}\bar{e_1} \oplus \mathbb{C}\bar{e_2} \oplus \mathbb{C}\bar{e_3}$. Για να βρω τον χαρακτήρα της αναπαράστασης υπολογίζω ότι:

$$a \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b^2 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Πρόβλημα: Είναι αυτή η 3-διάστατη αναπαράσταση της $A_4$ ανάγωγη?
Πράγματι, αν το $\mathbb{C}A_4$-πρότυπο $V/U$ δεν ήταν ανάγωγο, θα ήταν ευθύ άθροισμα 3 1-διάστατων αναπαραστάσεων. Άρα το $a = (12)(34)$ θα δρούσε ως $I_3$. Αυτό είναι άτοπο, καθώς το $(12)(34)$ δρα ως:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \neq I_3.$$

Αναπαραστάσεις της $S_4$:

1-διάστατες αναπαραστάσεις: Είναι $[S_4, S_4] = A_4$. Καθώς $|S_4/A_4| = 2$ είναι $S_4/A_4 \simeq \mathbb{Z}_2$ (αβελιανή) και άρα $[S_4, S_4] \subseteq A_4$. Αντίστροφα για ν.δ.ο. $A_4 \subseteq [S_4, S_4]$ αρκεί ν.δ.ο. $(12)(34), (123) \in [S_4, S_4]$.
Είδαμε ότι $(12)(34) \in [A_4, A_4] \subseteq [S_4, S_4]$ και υπολογίζουμε:
$[(12),(23)] = (12)(23)(12)(23) = (132)$, δηλαδή $(132) \in [S_4, S_4]$.
Άρα $(S_4)_{ab} = S_4/A_4 \simeq \mathbb{Z}_2 = \langle\overline{(12)}\rangle$ και συνεπώς υπάρχουν 2 1-διάστατες αναπαραστάσεις:

- η τετριμμένη αναπαράσταση $\chi_1 : S_4 \to S_4/A_4 \to \mathbb{C}^*$, $(12) \longrightarrow 1$
- η αναπαράσταση πρόσημο $\chi_2 : S_4 \to S_4/A_4 \to \mathbb{C}^*$, $(12) \longrightarrow -1$

Πίνακας χαρακτήρων

| | $1$ | $(12)$ | $(123)$ | $(1234)$ | $(12)(34)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | $(1)$ | $(6)$ | $(8)$ | $(6)$ | $(3)$ |
| $\chi_1$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $\chi_2$ | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 |
| $\chi$ | 2 | 0 | -1 | 0 | 2 |
| $\chi'$ | 3 | | | | |
| $\chi''$ | 3 | | | | |

Γράφω $\mathbb{C}S_4 = \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times M_n(\mathbb{C}) \times M_k(\mathbb{C}) \times M_\lambda(\mathbb{C}) \times \cdots$ και έχω
$24 = 1 + 1 + n^2 + k^2 + \lambda^2 + \cdots \quad (n, k, \lambda \geq 2)$
Πρέπει να υπάρχουν 2 3-διάστατες αναπαραστάσεις ($\chi', \chi''$) και 1 2-διάστατη ($\chi$).

Για τη 2-διάστατη αναπαράσταση:
Η $V = \{\mathbb{1}, (12)(34), (14)(23), (13)(24)\}$ είναι κανονική στην $S_4$ και $|S_4/V| = 24/4 = 6$. Καθώς $[(12),(23)] = (12)(23)(12)(23) = (132) \notin V$ η ομάδα $S_4/V$ δεν είναι αβελιανή και άρα $S_4/V \cong S_3$. Έστω $M$ η ανάγωγη 2-διάστατη αναπαράσταση της $S_3$

$(12) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (123) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Η σύνθεση $S_4 \xrightarrow{\text{πηλίκο}} S_4/V \cong S_3 \xrightarrow{\rho_M} GL_2(\mathbb{C})$ ορίζει μια 2-διάστατη αναπαράσταση της $S_4$, η οποία είναι ανάγωγη.

Πίνακας χαρακτήρων της $S_4$

μάθημα 17°
8/5/19

| | $\mathbb{1}$ (1) | (12) (6) | (123) (8) | (1234) (6) | (12)(34) (3) |
|---|---|---|---|---|---|
| $\chi_{τετρ}$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $\chi_{sgn}$ | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 |
| $\chi_{S_3}$ | 2 | 0 | -1 | 0 | 2 |
| $\chi_M$ | 3 | 1 | 0 | -1 | -1 |
| $\chi'$ | 3 | -1 | 0 | 1 | -1 |

Θεωρώ την $S_4$ ως ομάδα μεταθέσεων της βάσης $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ του δ.χ. $\mathbb{C}^4 = \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus \mathbb{C}e_3 \oplus \mathbb{C}e_4$ και ορίζω $M = \mathbb{C}^4 / \langle(1,1,1,1)\rangle$

Είναι $M = \mathbb{C}\bar{e}_1 \oplus \mathbb{C}\bar{e}_2 \oplus \mathbb{C}\bar{e}_3$ $(\bar{e}_4 = -\bar{e}_1 - \bar{e}_2 - \bar{e}_3 \in M)$

Καθώς είπαμε διαπιστώσει ότι το $M$ είναι ανάγωγο ως $\mathbb{C}A_4$-πρότυπο το $M$ είναι επίσης ανάγωγο ως $\mathbb{C}S_4$-πρότυπο. Για τον επαγόμενο ομομορφισμό ομάδων $G \to GL_{\mathbb{C}}(M) = GL_3(\mathbb{C})$ είναι:

$$(12) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (12)(34) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(123) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1234) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$M \underset{\mathbb{C}}{\otimes} \mathbb{C}_{sgn} = N$ $\mathbb{C}S_4$-πρότυπο.

<u>Κατασκευή</u>: Αν η ομάδα $G$ δρα στο σύνολο $X$

$G \times X \to X$

$(g, x) \mapsto g \cdot x$

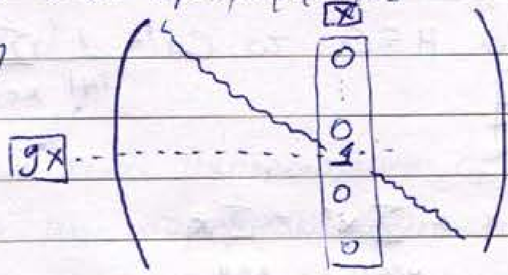
- $1 \cdot x = x \ \forall x \in X$
- $(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x) \ \forall g, h \in G, \ \forall x \in X$

μπορώ να θεωρήσω το $\mathbb{C}G$-πρότυπο $M = \bigoplus_{x \in X} \mathbb{C} \cdot x$ με τον φυσιολογικό τρόπο: Αν $g \in G$ και $v \in M$ με $v = \sum_{x \in X} \lambda_x \cdot x$, τότε

$$g\cdot v = \sum_{x\in X} \lambda_x\, gx \qquad ([g\cdot v](x) = v(g^{-1}x)\in \mathbb{C})$$

Αν τα $G, X$ είναι πεπερασμένα, τότε για τον αντίστοιχο χαρακτήρα $\chi_M : G \to \mathbb{C}$ ισχύει το εξής: $\chi_M(g) = \#\{x\in X \,/\, gx = x\}$

Πράγματι, θεωρώντας την "κανονική βάση" $\{x \,/\, x\in X\}$ του $\mathbb{C}$-δx $M$ η εικόνα του $g\in G$ στον ομομορφισμό $G \to GL_{\mathbb{C}}(M)$ είναι ο πίνακας-μετάθεση




Πχ $S_3$ δρα στο $X = \{e_1, e_2, e_3\}$

Το $\mathbb{C}^3 = \bigoplus_{i=1}^{3} \mathbb{C}e_i$ είναι $\mathbb{C}S_3$-πρότυπο

$$(12) \longmapsto \begin{pmatrix} \boxed{0} & 1 & 0 \\ 1 & \boxed{0} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα: Η ομάδα $G$ δρα στον εαυτό της με αριστερούς πολλαπλασιασμούς

$G \times G \to G \qquad 1y = y$

$(x,y) \mapsto xy \qquad (xy)z = x(yz)$

Όπως πριν, ο δx $\bigoplus_{g\in G} \mathbb{C}g = \mathbb{C}G$ γίνεται $\mathbb{C}G$-πρότυπο με αριστερούς πολλαπλασιασμούς ("αριστερή κανονική αναπαράσταση της $G$")

Για τον αντίστοιχο χαρακτήρα $\chi_{reg} : G \to \mathbb{C}$ ισχύει ότι:

$$\chi_{reg}(g) = \begin{cases} |G|, & g = 1 \\ 0, & g \neq 1 \end{cases}$$

$e = e^2 \in R \quad (0, 1, \dots)$

$R$ μεταθετικός $\rightsquigarrow$ $X$ τοπ. χώρος

$R = C(X) \qquad \{e = e^2 \in C(X)\} \longleftrightarrow \{A \subseteq X \,/\, A$ ανοικτό και κλειστό$\}$

Πρόβλημα: Τι ξέρω για $e = e^2 \in \mathbb{C}G$ ($|G| < \infty$)

$$\left[\mathbb{C}G = \prod_{i=1}^{r} M_{n_i}(\mathbb{C}) \dots \right]$$

$e = e_1 \cdot 1 + e_g \cdot g + e_h \cdot h + e_\ell \cdot \ell + \cdots$

Αν $\tau : \mathbb{C}G \to \mathbb{C}$ και $e = e^2 \in \mathbb{C}G$, τότε $\tau(e) \in \mathbb{Q}$, $0 \le \tau(e) \le 1$

$\left( \sum_{g \in G} \lambda_g g \mapsto \lambda_1 \right)$

και αν $\tau(e) = \frac{a}{b}$ ($a, b \in \mathbb{Z}$, μκδ$(a,b) = 1$) τότε για κάθε $p$ πρώτο με $p \mid b$ είναι $p \mid |G|$

[Αντίστροφα, για κάθε υποομάδα $H \le G$ το $e_H = \frac{1}{|H|} \sum_{x \in H} x$ είναι ταυτοδύναμο και $\tau(e_H) = \frac{1}{|H|}$

Αν $x_0 \in H$, τότε $x_0 \sum_{x \in H} x = \sum_{x \in H} x_0 x = \sum_{x' \in H} x' = \sum_{x \in H} x$

Συνεπώς $\left( \sum_{x \in H} x \right)^2 = \sum_{x \in H} x' \cdot \sum_{x \in H} x = \sum_{x' \in H} \left( x' \sum_{x \in H} x \right) = \sum_{x' \in H} \left( \sum_{x \in H} x \right) =$

$= |H| \sum_{x \in H} x$ και άρα $\left( \frac{1}{|H|} \sum_{x \in H} x \right)^2 = \frac{1}{|H|} \sum_{x \in H} x$ ]

απόδειξη (του ισχυρισμού για το $\tau(e)$)

Για το $e = \sum_{g \in G} \lambda_g g$ και την απεικόνιση $\chi_{reg} : \mathbb{C}G \to \mathbb{C}$ και υπολογίζω

$\chi_{reg}(e) = \chi_{reg} \left[ \sum_{g \in G} \lambda_g \cdot g \right] = \sum_{g \in G} \lambda_g \cdot \chi_{reg}(g) = |G| \lambda_1$

Όμως ο χαρακτήρας του $e$ μπορεί να υπολογιστεί ως το ίχνος του πίνακα που περιγράφει τη γραμμική απεικόνιση $e : \mathbb{C}G \to \mathbb{C}G$ ως προς οποιαδήποτε βάση του $\mathbb{C}$-δ.χ. $\mathbb{C}G$. Θεωρώ τους δ.υπόχωρους $e\mathbb{C}G$ και $(1-e)\mathbb{C}G$ για τους οποίους είναι $\mathbb{C}G = e\mathbb{C}G \oplus (1-e)\mathbb{C}G$.

($\xi \in \mathbb{C}G$ : $\xi = e\xi + (1-e)\xi \in e\mathbb{C}G + (1-e)\mathbb{C}G$)

($\xi \in e\mathbb{C}G \cap (1-e)\mathbb{C}G$ : $\xi = e\eta = (1-e)\zeta$ και άρα $\xi = e\eta = e^2\eta = ee\eta =$
$= e\xi = e(1-e)\zeta = (e - e^2)\zeta = 0\zeta = 0$)

Επιλέγω μια βάση $B$ του $e\mathbb{C}G$ και μια βάση $B'$ του $(1-e)\mathbb{C}G$ και θεωρώ την βάση $B \cup B'$ του $\mathbb{C}G$. Ως προς αυτήν τη βάση, ο πίνακας της $e : \mathbb{C}G \to \mathbb{C}G$ είναι ο
$$\left( \begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix} & \\ \hline & \begin{matrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{matrix} \end{array} \right)$$

Συνεπώς $\chi_{reg}(e) = \dim_{\mathbb{C}} e\mathbb{C}G$. Άρα $|G| \lambda_1 = \dim_{\mathbb{C}} e\mathbb{C}G \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda_1 = \dfrac{\dim_{\mathbb{C}} e\mathbb{C}G}{|G|}$. Βέβαια $0 \subseteq e\mathbb{C}G \subseteq \mathbb{C}G$ και άρα

$$\underset{\substack{\uparrow\\0}}{\dim_{\mathbb{C}} 0} \le \dim_{\mathbb{C}} e\mathbb{C}G \le \underset{\substack{\uparrow\\|G|}}{\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}G}$$

Άσκηση Ν.δ.ο. αν $e=e^2 \in \mathbb{C}G$ και $\tau(e)=0$ (αντίστοιχα 1) τότε $e=0$ (αντίστοιχα 1)

Παρατήρηση Αν $G$ είναι πεπερασμένη ομάδα και $r$ είναι το πλήθος των αναγώγων ανά δύο μη-ισόμορφων αναπαραστάσεων της $G$ τότε $r$ είναι ακριβώς το πλήθος των κλάσεων συζυγίας της $G$. (Άρα οι "πίνακες χαρακτήρων είναι πάντα τετραγωνικοί")

Πράγματι, είναι $\mathbb{C}G = \prod_{i=1}^{r} M_{n_i}(\mathbb{C})$ και άρα το κέντρο $Z(\mathbb{C}G)$ είναι ισόμορφο με το $\prod_{i=1}^{r} Z[M_{n_i}(\mathbb{C})] = \prod_{i=1}^{r} \mathbb{C} I_{n_i}$

Συνεπώς $\dim_{\mathbb{C}} Z(\mathbb{C}G) = \dim_{\mathbb{C}} \prod_{i=1}^{r} \mathbb{C} I_{n_i} = r$. Γνωρίζουμε όμως ότι

$$Z(\mathbb{C}G) = \bigoplus_{[g]\in \mathcal{C}(G)} \mathbb{C}\Big(\sum_{x\in[g]} x\Big)$$ και άρα $\dim_{\mathbb{C}} Z(\mathbb{C}G) = \# \mathcal{C}(G)$

μάθημα 18°
13/5/19

Αν $|G|<\infty$ το πλήθος των αναγώγων αναπαραστάσεων είναι ίσο με το πλήθος των κλάσεων συζυγίας της $G$. Γιατί:

$\mathbb{C}G \simeq M_{n_1}(\mathbb{C}) \times M_{n_2}(\mathbb{C}) \times \cdots \times M_{n_r}(\mathbb{C})$, $Z(\mathbb{C}G) \simeq Z[M_{n_1}(\mathbb{C})] \times \cdots \times Z[M_{n_r}(\mathbb{C})] =$
$= \mathbb{C} I_{n_1} \times \cdots \times \mathbb{C} I_{n_r}$ Άρα $\# \mathcal{C}(G) = \dim_{\mathbb{C}} Z(\mathbb{C}G) = r$

Δύο βάσεις του $\mathbb{C}$-δχ $Z(\mathbb{C}G)$:

- Για κάθε $g\in G$ η κλάση συζυγίας $[g]$ δίνει το άθροισμα $C_{[g]} = \sum_{x\in[g]} x$

Βάση $B$ του $\mathbb{C}$-δχ $Z(\mathbb{C}G)$: $\{C_{[g]} / [g] \in \mathcal{C}(G)\}$

- Για $i=1,2,\dots,r$ ο πίνακας $I_{n_i} \in M_{n_i}(\mathbb{C})$ αντιστοιχεί στο κεντρικό ταυτοδύναμο στοιχείο $e_i = 0 \times \cdots \times 0 \times \overset{i\text{-θέση}}{I_{n_i}} \times 0 \times \cdots \times 0$

Βάση $B'$ του $\mathbb{C}$ δχ $Z(\mathbb{C}G)$: $e_1, e_2, \dots, e_r$

**Πρόταση** Είναι $e_i = \frac{n_i}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_i(g^{-1}) g$ για $i = 1, 2, \dots, r$

$$\left( = \frac{n_i}{|G|} \sum_{[g] \in \mathcal{C}(G)} \chi_i(g^{-1}) C_{[g]} = \sum_{[g] \in \mathcal{C}(G)} \frac{n_i \chi_i(g^{-1})}{|G|} C_{[g]} \right)$$

**απόδειξη** Γράφω $e_i = \sum_{g \in G} \lambda_{i,g} g$, σταθεροποιώ ένα $g \in G$ και θεωρώ το

$e_i g^{-1} = \sum_{x \in G} \lambda_{i,x} x g^{-1}$ και υπολογίζω τον $\chi_{reg}(e_i g^{-1}) \in \mathbb{C}$.

Είναι $\chi_{reg}(e_i g^{-1}) = \sum_x \lambda_{i,x} \chi_{reg}(x g^{-1}) = \lambda_{i,g} |G|$. Γράφοντας όμως

$e_i = 0 \times \dots \times 0 \times I_{n_i} \times 0 \times \dots \times 0 \in \prod_j M_{n_j}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}G$ προκύπτει ότι το στοιχείο $e_i g^{-1} = g^{-1} e_i \in \mathbb{C}G$ δρα ως $0$ στις ανάγωγες αναπαραστάσεις $V_1^{n_1}, \dots, V_{i-1}^{n_{i-1}}, V_{i+1}^{n_{i+1}}, \dots, V_r^{n_r}$ και ως $g^{-1}: V_i \to V_i$ στην αναπαράσταση $V_i$.
Καθώς $\mathbb{C}G \cong V_1^{n_1} \oplus \dots \oplus V_{i-1}^{n_{i-1}} \oplus V_i^{n_i} \oplus V_{i+1}^{n_{i+1}} \oplus \dots \oplus V_r^{n_r}$ είναι
$\chi_{reg} = n_1 \chi_1 + \dots + n_{i-1} \chi_{i-1} + n_i \chi_i + n_{i+1} \chi_{i+1} + \dots + n_r \chi_r$ και άρα
$\chi_{reg}(e_i g^{-1}) = n_1 \chi_1(e_i g^{-1}) + \dots + n_{i-1} \chi_{i-1}(e_i g^{-1}) + n_i \chi_i(e_i g^{-1}) +$
$+ n_{i+1} \chi_{i+1}(e_i g^{-1}) + \dots + n_r \chi_r(e_i g^{-1}) = n_i \chi_i(g^{-1})$
Είναι $\lambda_{i,g} |G| = n_i \chi_i(g^{-1}) \Rightarrow \lambda_{i,g} = \frac{n_i}{|G|} \chi_i(g^{-1})$

**Παράδειγμα** $G = S_3$ $\qquad \mathbb{C}S_3 \cong \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times M_2(\mathbb{C})$

| | $\mathbb{1}$ (1) | (12) (3) | (123) (2) |
|---|---|---|---|
| $\chi_1$ | 1 | 1 | 1 |
| $\chi_2$ | 1 | -1 | 1 |
| $\chi_3$ | 2 | 0 | -1 |

Τα 3 κεντρικά ταυτοδύναμα $e_1, e_2, e_3$ που αντιστοιχούν είναι:

$e_1 = \frac{1}{6}(\mathbb{1} + (12) + (13) + (23) + (123) + (132)) \hookrightarrow (1,0,0)$

$e_2 = \frac{1}{6}(\mathbb{1} - (12) - (13) - (23) + (123) + (132)) \hookrightarrow (0,1,0)$

$e_3 (= 1 - e_1 - e_2) = \frac{2}{6}(2\,\mathbb{1} + 0(12) + 0(13) + 0(23) - 1 \cdot (123) - 1(132)) =$

$= \frac{1}{3}(2 \cdot \mathbb{1} - (123) - (132))$

Άρα $e_1 = \frac{1}{6} \underset{\mathbb{1}}{\underset{\uparrow}{C_{[\mathbb{1}]}}} + \frac{3}{6} \underset{(12)+(13)+(23)}{\underset{\uparrow}{C_{[(12)]}}} + \frac{2}{6} \underset{(123)+(132)}{\underset{\uparrow}{C_{[(123)]}}}$

$e_2 = \frac{1}{6} C_{[1]} - \frac{1}{6} C_{[(12)]} + \frac{1}{6} C_{[(123)]}$

$e_3 = \frac{2}{3} C_{[1]} - \frac{1}{3} C_{[(123)]}$

Πρόταση Είναι $C_{[g]} = \gamma_g \sum_{i=1}^{r} \frac{\chi_i(g)}{n_i} e_i$ για $g \in G$ (οπου $\gamma_g = \# [g] =$

$= [G : C_G(g)]$, $C_G(g) = \{x \in G / xgx^{-1} = g\}$)

απόδειξη Γραφω $C_{[g]} = \sum_{j=1}^{r} M_{[g],j} e_j$ και υπολογίζω για ένα σταθεροποιημένο

$i$ το $\chi_i(C_{[g]})$ Αρχικα είναι $\chi_i(C_{[g]}) = \chi_i\left(\sum_{x \in [g]} x\right) = \sum_{x \in [g]} \chi_i(x) = \gamma_g \chi_i(g)$.

Επίσης $\chi_i(C_{[g]}) = \sum_{j=1}^{r} M_{[g],j} \chi_i(e_j) = M_{[g],i} \chi_i(e_i) = M_{[g],i} \cdot n_i$

$$\left[\begin{array}{l} j \neq i \quad e_i = 0 \times \cdots \times \overset{(j)}{0} \times \cdots \times \overset{(i)}{I} \times \cdots \times 0 \\ \qquad V_j = 0 \oplus \cdots \oplus V_j \oplus \cdots \oplus 0 \oplus \cdots \oplus 0 \end{array}\right]$$

Συνεπώς είναι $\gamma_g \chi_i(g) = M_{[g],i} n_i \Rightarrow M_{[g],i} = \gamma_g \frac{\chi_i(g)}{n_i} \in \mathbb{C}$

Πόρισμα (σχέσεις ορθογωνιότητας)

(i) $\sum_{g \in G} \chi_i(g^{-1}) \chi_j(g) = \begin{cases} |G|, & i = j \\ 0, & \text{αν } i \neq j \end{cases}$

(ii) $\sum_{i=1}^{r} \chi_i(g) \chi_i(h^{-1}) = \begin{cases} |C_G(g)|, & [g] = [h] \\ 0, & [g] \neq [h] \end{cases}$

απόδειξη $e_i = \frac{n_i}{|G|} \sum_g \chi_i(g^{-1}) g = \frac{n_i}{|G|} \sum_{[g]} \chi_i(g^{-1}) C_{[g]} =$

$= \frac{n_i}{|G|} \sum_{[g]} \chi_i(g^{-1}) \gamma_g \sum_j \frac{\chi_j(g)}{n_j} e_j = \sum_{[g],j} \frac{n_i}{|G|} \chi_i(g^{-1}) \gamma_g \frac{\chi_j(g)}{n_j} e_j =$

$= \sum_j \left( \sum_{[g]} \frac{n_i}{|G| n_j} \gamma_g \chi_i(g^{-1}) \chi_j(g) \right) e_j = \sum_j \frac{n_i}{|G| n_j} \sum_{[g]} \gamma_g \chi_i(g^{-1}) \chi_j(g)) e_j =$

$= \left( \sum_j \frac{n_i}{|G| n_j} \sum_g \chi_i(g^{-1}) \chi_j(g) \right) e_j$ Αρα αν $i \neq j$ είναι:

$\frac{n_i}{|G| n_j} \sum_g \chi_i(g^{-1}) \chi_j(g) = 0 \Rightarrow \sum_g \chi_i(g^{-1}) \chi_j(g) = 0$.

Αν $i = j$ τοτε $\frac{n_i}{|G| n_i} \sum_g \chi_i(g^{-1}) \chi_i(g) = 1 \Rightarrow \sum_g \chi_i(g^{-1}) \chi_i(g) = |G|$

(ii) $C[g] = \gamma_g \sum_i \frac{\chi_i(g)}{n_i} e_i = \gamma_g \sum_i \frac{\chi_i(g)}{n_i} \frac{n_i}{|G|} \sum_h \chi_i(h^{-1}) h =$

$= \sum_{i,h} \gamma_g \frac{1}{|G|} \chi_i(g) \chi_i(h^{-1}) h = \sum_h \left( \sum_i \frac{\gamma_g}{|G|} \chi_i(g) \chi_i(h^{-1}) \right) h = \sum_{[h]} \left( \sum_i \frac{\gamma_g}{|G|} \chi_i(g) \chi_i(h^{-1}) \right) C_{[h]}$

Άρα αν $[g] \neq [h]$ τότε $\sum_i \frac{\gamma_g}{|G|} \chi_i(g) \chi_i(h^{-1}) = 0$ και έτσι

$\sum_i \frac{1}{|C_G(g)|} \chi_i(g) \chi_i(h^{-1}) = 0 \Rightarrow \frac{1}{|C_G(g)|} \sum_i \chi_i(g) \chi_i(h^{-1}) = 0$

δηλαδή $\sum_i \chi_i(g) \chi_i(h^{-1}) = 0$. Αν $[g] = [h]$ τότε $\sum_i \frac{\gamma_g}{|G|} \chi_i(g) \chi_i(h^{-1}) = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dots \Rightarrow \sum_i \chi_i(g) \chi_i(h^{-1}) = |C_G(g)|$

Έστω $K(G)$ ο διανυσματικός χώρος των συναρτήσεων $G \to \mathbb{C}$ που είναι σταθερές στις κλάσεις συζυγίας (class functions)

Είναι $K(G) = \{ \chi : G \to \mathbb{C} \,/\, \chi \text{ σταθερή σε κλάσεις συζυγίας} \} =$

$= \{ \chi : \mathbb{C}G \to \mathbb{C} \,/\, \chi \text{ γραμμική και } \chi|_{[\mathbb{C}G, \mathbb{C}G]} = 0 \} =$

$= \{ \chi : \mathbb{C}G / [\mathbb{C}G, \mathbb{C}G] \to \mathbb{C} \,/\, \chi \text{ γραμμική} \} =$

$= \{ \chi : \mathbb{C}G \,/\, \chi \text{ γραμμική και } \chi(gh) = \chi(hg) \ \forall g, h \in \mathbb{C}G \}$

Είναι $\dim_{\mathbb{C}} K(G) = \# C(G)$. Ορίζω ένα εσωτερικό γινόμενο στον δ.χ. $K(G)$ ως εξής: Αν $x, y \in K(G)$ τότε $\langle x, y \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} x(g^{-1}) y(g) \in \mathbb{C}$.

μάθημα 19°
15/5/19

$$e_i = \frac{n_i}{|G|} \sum_g \chi_i(g^{-1}) g \quad (i=1,2,\dots,r)$$

$$c_g \left(= \sum_{x \in [g]} x\right) = h_g \sum_{i=1}^{r} \frac{\chi_i(g)}{n_i} e_i \quad (g \in G)$$

$$\sum_g \chi_i(g^{-1}) \chi_j(g) = \begin{cases} |G|, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

$K(G) = \{ \chi : G \to \mathbb{C} \ / \ \chi(g) = \chi(g') \text{ αν } [g]=[g'] \}$

$\dim_{\mathbb{C}} K(G) = r \quad (\to K(G) \cong \mathbb{C}^r)$

Ορίζω για $x, y \in K(G)$, $[x,y] = \frac{1}{|G|} \sum_g x(g^{-1}) y(g) \in \mathbb{C}$

Ισχύουν τα εξής

(i) Το $[-,-]$ είναι μια διγραμμική και συμμετρική μορφή.

Για τη συμμετρία: $[x,y] = \frac{1}{|G|} \sum_g x(g^{-1}) y(g) \overset{g^{-1}=h}{=} \frac{1}{|G|} \sum_h x(h) y(h^{-1}) =$

$= \frac{1}{|G|} \sum_h y(h^{-1}) x(h) = [y,x]$

(ii) Τα $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_r$ αποτελούν μια ΟΚ βάση του $K(G)$. Καθώς $r = \dim_{\mathbb{C}} K(G)$ αρκεί ν.δ.ο. τα $\chi_1, \dots, \chi_r$ είναι (ανεξάρτητα και) $[\chi_i, \chi_j] = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i=j \end{cases}$

Αυτές είναι οι σχέσεις που ήδη αποδείξαμε.

(iii) Για κάθε $x \in K(G)$ είναι $x = \sum_{i=1}^{r} [x, \chi_i] \chi_i$

$[\, x = \lambda_1 \chi_1 + \dots + \lambda_r \chi_r, \quad [x, \chi_i] = \lambda_i \,]$

(iv) Αν $x, y \in K(G)$ τότε $[x,y] = \sum_{i=1}^{r} [x, \chi_i][y, \chi_i]$

Ειδικότερα, $[x,x] = \sum [x, \chi_i]^2$

(v) Αν $x \in K(G)$, τότε υπάρχει $\mathbb{C}G$-πρότυπο $V$ με $\dim_{\mathbb{C}} V < \infty$ ώστε $x = \chi_V$ ανν $[x, \chi_i] \in \mathbb{N}$ $\forall i = 1, 2, \dots, r$

απόδειξη "⇒" Γνωρίζουμε ότι $V \cong V_1^{a_1} \oplus V_2^{a_2} \oplus \dots \oplus V_r^{a_r}$ για κάποια $a_1, a_2, \dots, a_r \geq 0$ και άρα $\chi_V = \sum_{i=1}^{r} a_i \chi_i$

Τότε $[x, \chi_i] = [\chi_V, \chi_i] = a_i \in \mathbb{N}$

"$\Leftarrow$" Αν $[\chi, \chi_i] = a_i \in \mathbb{N}$, τότε $\chi = \sum_{i=1}^{r} a_i \chi_i = \chi_{V_1^{a_1} \oplus \cdots \oplus V_r^{a_r}}$

(vi) Αν $V$ είναι ένα $\mathbb{C}G$-πρότυπο με $\dim_{\mathbb{C}} V < \infty$ τότε το $V$ είναι απλό (ανάγωγη αναπαράσταση) ανν $[\chi_V, \chi_V] = 1 \left( \Leftrightarrow \sum_g \chi_V(g^{-1}) \chi_V(g) = |G| \right)$

απόδειξη

"$\Rightarrow$" Αν το $V$ είναι απλό $\mathbb{C}G$-πρότυπο, τότε $V = V_i$ για κάποιο $i = 1, \dots r$

Άρα $[\chi_V, \chi_V] = [\chi_i, \chi_i] = 1$

"$\Leftarrow$" Γράφω $V = V_1^{a_1} \oplus V_2^{a_2} \oplus \cdots \oplus V_r^{a_r}$ για $a_1, a_2, \dots, a_r \in \mathbb{N}$ και έχω ότι $\chi_V = \sum_{i=1}^{r} a_i \chi_i$. Συνεπώς είναι: $1 = [\chi_V, \chi_V] = \left[ \sum_i a_i \chi_i, \sum_j a_j \chi_j \right] =$

$= \sum_{i,j} a_i a_j [\chi_i, \chi_j] = \sum_{i=1}^{r} a_i^2$. Άρα υπάρχει $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ με $a_i = 1$ και

$a_j = 0$ για $j \neq i$. Άρα $V = V_i$ (ανάγωγο)

Εφαρμογή $G = S_5$

Η $G$ δρα στον $\mathbb{C}^5 = \bigoplus_{i=1}^{5} \mathbb{C} e_i$ και αφήνει αναλλοίωτο τον $V = \langle (1,1,1,1,1) \rangle$

Έστω $M = \mathbb{C}^5 / V = \sum_{i=1}^{5} \mathbb{C} \bar{e}_i = \bigoplus_{i=1}^{4} \mathbb{C} \bar{e}_i$ $(\bar{e}_5 = -\bar{e}_1 - \bar{e}_2 - \bar{e}_3 - \bar{e}_4)$

Ισχυρισμός: Το $M$ είναι απλό. (4-διάστατη ανάγωγη αναπαράσταση)

Αρκεί ν.δ.ο. είναι $[\chi_M, \chi_M] = 1 \Leftrightarrow \sum_{g \in S_5} \chi_M(g^{-1}) \chi_M(g) = 120$

| | $1$ | $(12)$ | $(123)$ | $(1234)$ | $(12345)$ | $(12)(34)$ | $(12)(345)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 10 | 20 | 30 | 24 | 15 | 20 |
| $\chi_M$ | 4 | 2 | 1 | 0 | $-1$ | 0 | $-1$ |
| $\chi_M^2$ | 16 | 4 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |

$1 \mapsto \begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}$ $\quad (12) \mapsto \begin{pmatrix} 0&1&0&0 \\ 1&0&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}$ $\quad (123) \mapsto \begin{pmatrix} 0&0&1&0 \\ 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}$

$(1234) \mapsto \begin{pmatrix} 0&0&0&1 \\ 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \end{pmatrix}$ $\quad (12345) \mapsto \begin{pmatrix} 0&0&0&-1 \\ 1&0&0&-1 \\ 0&1&0&-1 \\ 0&0&1&-1 \end{pmatrix}$

$(12)(34) \mapsto \begin{pmatrix} 0&1&0&0 \\ 1&0&0&0 \\ 0&0&0&1 \\ 0&0&1&0 \end{pmatrix}$ $\quad (12)(345) \mapsto \begin{pmatrix} 0&1&0&-1 \\ 1&0&0&-1 \\ 0&0&0&-1 \\ 0&0&1&-1 \end{pmatrix}$

π.χ. $(1234)$: ένα στοιχείο από τα $\{1,2,3,4,5\}$ μένει σταθερό $\to$ 5 επιλογές. Από αυτά που μετακινούνται (τα 4) επιλέγω ως 1ο στοιχείο, τα άλλα 3 τοποθετούνται σε κύκλο με $3!$ τρόπους. Άρα $5 \cdot 3! = 30$

Είναι: $[\chi_M,\chi_M] = \sum_{g\in S_5} \chi_M(g^{-1})\chi_M(g) = \sum_{g\in S_5}[\chi_M(g)]^2 =$

$= 1\cdot 16 + 10\cdot 4 + 20\cdot 1 + 30\cdot 0 + 24\cdot 1 + 15\cdot 0 + 20\cdot 1 =$
$= 16+40+20+0+24+0+20 = 120$

**Στόχος** Για κάθε ομάδα $G$ με $|G|<+\infty$ και ανάγωγες αναπαραστάσεις $V_1, V_2, \dots, V_r$ είναι $\dim_{\mathbb{C}} V_i \mid |G|$ $(i=1,2,\dots,r)$

**Πρόταση** Έστω $R$ ένας μεταθετικός δακτύλιος. Τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα για ένα στοιχείο $r\in R$:
(i) Υπάρχει $f(t)=t^n+a_{n-1}t^{n-1}+\dots+a_1t+a_0 \in \mathbb{Z}[t]$ ώστε $f(r)=0\in R$
(ii) ο υποδακτύλιος $\mathbb{Z}[r]\subseteq R$ με $\mathbb{Z}[r]=\{g(r) / g(t)\in \mathbb{Z}[t]\} =$
$= \{r^2-5, 2r^2+r+18, \dots\}$ είναι πεπερασμένα παραγόμενος ως αβελιανή ομάδα.
(iii) Υπάρχει πεπερασμένα παραγόμενη υποομάδα $M\subseteq R$ με $1\in M$ και $rM\subseteq M$

απόδειξη $(i)\to(ii)\to(iii)\to(i)$
$(i)\to(ii)$ Αν είναι $r^n+a_{n-1}r^{n-1}+\dots+a_1r+a_0=0\in R$ για κατάλληλα $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}\in\mathbb{Z}$ τότε θ.δ.ο. $\mathbb{Z}[r]=\mathbb{Z}\cdot 1+\mathbb{Z}\cdot r+\dots+\mathbb{Z}\cdot r^{n-1} \subseteq R$
Ο εγκλεισμός "$\supseteq$" είναι προφανής. Για να δείξω τον εγκλεισμό "$\subseteq$" αρκεί ν.δ.ο. $r^k \in \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{Z} r^i$ $\forall k\in\mathbb{N}$. Αν $k=0,1,\dots,n-1$ αυτό είναι προφανές. Επαγωγικά, αν $r^k = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{Z} r^i$, τότε $r^{k+1} \in \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{Z} r^{i+1} = \mathbb{Z}r+\mathbb{Z}r^2+\dots+\mathbb{Z}r^{n-1}+\mathbb{Z}\underbrace{r^n}_{-a_{n-1}r^{n-1}-\dots-a_1r-a_0}$
$\subseteq \mathbb{Z}1+\mathbb{Z}r+\dots+\mathbb{Z}r^{n-1}$

$(iii)\Rightarrow(i)$ Γράφω $M=\mathbb{Z}x_1+\dots+\mathbb{Z}x_n$ για κάποια $x_1,\dots,x_n\in M$

Μάθημα 20°
20/5/19

Είναι $rx_1\in rM=M \Rightarrow rx_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n$ για κάποια $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}\in\mathbb{Z}$. Ανάλογα για $i=1,\dots,n$ βρίσκω $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}\in\mathbb{Z}$ με
$rx_i = a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\dots+a_{in}x_n$.

Συνεπώς $\begin{pmatrix} rx_1\\ \vdots\\ rx_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ δηλαδή $r\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ $\in M_n(R)$

Άρα $(A-rI_n)\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} \Rightarrow adj(A-rI_n)(A-rI_n)\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow det(A-rI_n) I_n \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow det(A-rI_n) \cdot x_i = 0 \in R \quad \forall i=1,\dots,n$

Αν είναι $x_1 \neq 0$ έπεται ότι $det(A-rI_n) = 0 \in R \Rightarrow \pm r^n + \underset{\in \mathbb{Z}}{\square} r^{n-1} + \dots + \underset{\in \mathbb{Z}}{\square} r + \underset{\in \mathbb{Z}}{\square} = 0 \in R$

$\{\dots, rs + s^{10} - r^4 s + 6, \dots\}$

**Παρατήρηση** Αν για τα $r, s \in R$ ισχύουν οι υποθέσεις του προηγούμενου Θεωρήματος, τότε η αβελιανή ομάδα $\mathbb{Z}[r,s]$ είναι πεπερασμένα παραγόμενη.

απόδειξη Γνωρίζουμε ότι $\mathbb{Z}[r] = \mathbb{Z} \cdot 1 + \mathbb{Z} \cdot r + \dots + \mathbb{Z} r^{n-1}$ και $\mathbb{Z}[s] = \mathbb{Z} \cdot 1 + \mathbb{Z} \cdot s + \dots + \mathbb{Z} \cdot s^{m-1}$ για κάποια $n, m \in \mathbb{N}$. Άρα για κάθε $i, j$ είναι $r^i s^j \in \sum_{\substack{0 \le k < n \\ 0 \le \lambda < m}} \mathbb{Z} \cdot r^k \cdot s^\lambda$, δηλαδή $\mathbb{Z}[r,s] = \sum_{\substack{0 \le k < n \\ 0 \le \lambda < m}} r^k s^\lambda$

**Πόρισμα** Το σύνολο των $r \in R$ που ικανοποιούν τις υποθέσεις του Θεωρήματος είναι ένας υποδακτύλιος του $R$

απόδειξη Αν τα $r, s$ ικανοποιούν τις υποθέσεις του Θεωρήματος τότε η αβελιανή ομάδα $M = \mathbb{Z}[r,s]$ είναι π.π. παραγόμενη με $1 \in M$ και $(r \pm s) M \subseteq M$, $(rs) M \subseteq M$. Άρα από το Θεώρημα τα $r \pm s$, $rs$ ικανοποιούν τις υποθέσεις του Θεωρήματος.

**Ορισμός** Ο Υποδακτύλιος $A \subseteq R$ του πορίσματος καλείται υποδακτύλιος των $\mathbb{Z}$-ακεραίων στον $R$.

Παραδείγματα

1) Αν $R = \mathbb{C}$ τότε ο $A$ καλείται δακτύλιος των αλγεβρικών ακεραίων ($\pi.\chi.$ $i, \sqrt{2} \in A$, $\pi \notin A$)

2) Αν $A \subseteq \mathbb{C}$ είναι ο δακτύλιος των αλγεβρικών ακεραίων τότε $A \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}$

Αν $q = \frac{a}{b} \in A$ με $a, b \in \mathbb{Z}$, $(a,b) = 1$ και $b \neq 0$, τότε υπάρχουν $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{Z}$ με $q^n + a_{n-1} q^{n-1} + \dots + a_1 q + a_0 = 0 \in \mathbb{C}$ και άρα $a^n + a_{n-1} a^{n-1} b + \dots + a_1 a b^{n-1} + a_0 b^n = 0 \in \mathbb{C}$ $\mathbb{Z}$

$\left.\begin{array}{l} \text{Συνεπώς } b \mid a^n \\ \text{είναι } (b,a) = 1 \Rightarrow (b, a^n) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow b \mid 1 \Rightarrow b = \pm 1$

3) Αν $R, S$ είναι δακτύλιοι και $A \subseteq R$, $B \subseteq S$ είναι οι αντίστοιχοι υποδακτύλιοι των $\mathbb{Z}$-ακεραίων τότε για κάθε ομομορφισμό δακτυλίων $f: R \to S$

Είναι $f(A) \subseteq B$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f|"] \arrow[d, hook] & B \arrow[d, hook] \\ R \arrow[r, "f"] & S \end{tikzcd}$$

Πράγματι, αν $r \in A \subseteq R$ τότε μπορώ να βρω $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{Z}$ με $r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \dots + a_1 r + a_0 = 0 \in R$. Συνεπώς είναι $0 = f(0) = f(r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \dots + a_1 r + a_0) = [f(r)]^n + f(a_{n-1})[f(r)]^{n-1} + \dots + f(a_1)f(r) + f(a_0) = [f(r)]^n + a_{n-1}[f(r)]^{n-1} + \dots + a_1 f(r) + a_0$. Άρα $f(r) \in B$.

$G$ πεπερασμένη ομάδα

• $e_1, \dots, e_r$ κεντρικά ταυτοδύναμα $\mathbb{C}G \cong \prod_{i=1}^{r} M_{n_i}(\mathbb{C})$

$e_i = (0, \dots, 0, I_{n_i}, 0, \dots, 0)$

• για $g \in G$ $C_g = \sum_{x \in [g]} x \in Z(\mathbb{C}G)$

• $e_i = \frac{n_i}{|G|} \sum_{g} \chi_i(g^{-1}) g = \frac{n_i}{|G|} \sum_{[g] \in C\ell(G)} \chi_i(g^{-1}) C_g$

$C_g = \lambda_g \sum_{i=1}^{r} \frac{\chi_i(g)}{n_i} e_i$ $(\lambda_g = \#[g])$

Πρόταση $n_i \mid |G|$ $\forall i = 1, \dots, r$

απόδειξη (i) Το $C_g$ είναι ακέραιο στοιχείο του κέντρου $Z(\mathbb{C}G)$

απόδειξη του (i) Είναι $C_g \in Z(\mathbb{C}G) \cap \mathbb{Z}G = Z(\mathbb{Z}G)$

(Για την τελευταία ισότητα: Προφανώς $Z(\mathbb{C}G) \cap \mathbb{Z}G \supseteq Z(\mathbb{Z}G)$. Αντίστροφα, αν $\xi \in Z(\mathbb{Z}G)$ τότε $\xi \in \mathbb{Z}G$ και $\xi h = h\xi$ $\forall h \in G$. Τότε όμως $\xi h = h\xi$ $\forall h \in \mathbb{C}G$, δηλαδή $\xi \in Z(\mathbb{C}G)$)

Όμως γνωρίζουμε ότι $Z(\mathbb{Z}G) \cong \bigoplus_{[h] \in C\ell(G)} \mathbb{Z} \cdot C_h \cong \mathbb{Z}^r$. Τελικά $C_g \in \underbrace{Z(\mathbb{Z}G)}_{M} \cong \mathbb{Z}^r$

και $1 \in Z(\mathbb{Z}G)$, δηλαδή το $C_g$ είναι $\mathbb{Z}$-ακέραιο στοιχείο του κέντρου $Z(\mathbb{C}G)$

(ii) Ο συντελεστής $\lambda_g \frac{\chi_i(g)}{n_i}$ του $C_g$ ως προς τη βάση $\{e_1, \dots, e_r\}$ του $Z(\mathbb{C}G)$

είναι αλγεβρικός ακέραιος

απόδειξη του (ii) Η διάσπαση Wedderburn-Artin $\mathbb{C}G \cong \prod_{i=1}^{r} M_{n_i}(\mathbb{C})$ οδηγεί στη διάσπαση του κέντρου $Z(\mathbb{C}G) \cong \prod_{i=1}^{r} \mathbb{C} I_{n_i}$.

Για κάθε $i = 1, \dots, r$ θεωρώ τον επιμορφισμό δακτυλίων $Z(\mathbb{C}G) \xrightarrow{p_i} \mathbb{C}$

(προσοχή στην $i$-συνιστώσα του Καρτεσιανού γινομένου)
Άρα το $\mathbb{Z}$-ακέραιο στοιχείο $C_g \in Z(\mathbb{C}G)$ απεικονίζεται στο $\mathbb{Z}$-ακέραιο στοιχείο $P_i(C_g) \in \mathbb{C}$. Όμως $P_i(C_g) = \lambda_g \dfrac{\chi_i(g)}{n_i}$

(iii) $\dfrac{|G|}{n_i} \in A = \{\text{αλγεβρικοί ακέραιοι}\} \subseteq \mathbb{C}$

απόδειξη του (iii) Είναι $\dfrac{|G|}{n_i} e_i = \sum_{[g]} \chi_i(g^{-1}) C_g = \sum_{[g]} \chi_i(g^{-1}) \sum_j \lambda_g \dfrac{\chi_j(g)}{n_j} e_j =$

$= \sum_{[g],j} \chi_i(g^{-1}) \lambda_g \dfrac{\chi_j(g)}{n_j} e_j = \sum_{j=1}^{r} \left( \sum_{[g]} \chi_i(g^{-1}) \lambda_g \dfrac{\chi_j(g)}{n_j} \right) e_j$

Είναι $\chi_i(g^{-1}) = \sum$ ριζών της μονάδας $\in A$ και από το (ii) είναι $\lambda_g \dfrac{\chi_j(g^{-1})}{n_j} \in A$ Άρα $\sum_{[g]} \chi_i(g^{-1}) \lambda_g \dfrac{\chi_j(g)}{n_j} \in A$ (για κάθε $i,j$)

Όμως $\dfrac{|G|}{n_i} = \sum_{[g]} \chi_i(g^{-1}) \lambda_g \dfrac{\chi_i(g)}{n_i}$ και άρα $\dfrac{|G|}{n_i} \in A$

(iv) Είναι $\dfrac{|G|}{n_i} \in A \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}$ δηλαδή $n_i \,/\, |G|$

Θεώρημα (Shur)
$n_i \,/\, [G:Z(G)] = \dfrac{|G|}{|Z(G)|}$ , $\forall i = 1, \dots r$

Παρατήρηση Αν $R$ δακτύλιος τότε είναι $\text{rad} R = 0$ ανν $\boxed{\text{μάθημα 21} \quad 22/5/19}$
υπάρχει ημιαπλό πιστό αριστερό $R$-πρότυπο
"$\Rightarrow$" Γνωρίζουμε ότι $\text{rad} R = \{ r \in R \,/\, rM = 0$ για κάθε απλό $R$-πρότυπο $M\}$
Έστω $(M_i)_i$ μια οικογένεια απλών $R$-προτύπων έτσι ώστε για κάθε απλό πρότυπο $M$ υπάρχει $i$ με $M \simeq M_i$. Γράφω $N = \bigoplus_i M_i$ και έχω ότι το $N$ είναι ημιαπλό $R$-πρότυπο και αν $r \in R$ με $rN = 0$ τότε $rM_i = 0$ $\forall i$ και άρα $rM = 0$ για κάθε απλό $R$-πρότυπο $M$ και άρα $r \in \text{rad} R = 0$. Έτσι το πρότυπο $N$ είναι πιστό.
"$\Leftarrow$" Αν το $N$ είναι ένα ημιαπλό πιστό $R$-πρότυπο τότε $N = \sum_\lambda M_\lambda$ για κάποια οικογένεια απλών $R$-προτύπων $(M_\lambda)_\lambda$. Αν $r \in \text{rad} R$ τότε $rM_\lambda = 0$ $\forall \lambda$ και άρα $rN = 0$. Καθώς το $N$ είναι πιστό, έπεται

ότι $r=0$. Συνεπώς $\operatorname{rad} R = 0$

Ορισμός Ο δακτύλιος $R$ καλείται αριστερά πρωταρχικός (left primitive) αν υπάρχει ένα απλό πιστό αριστερό $R$-πρότυπο

Παραδείγματα

1) Υπάρχουν αριστερά πρωταρχικοί δακτύλιοι που δεν είναι δεξιά πρωταρχικοί.

2) Για ένα ιδεώδες $I \subseteq R$ ισχύει ότι ο $R/I$ είναι αριστερά πρωταρχικός ανν $I = \operatorname{ann}_R M$ για κάποιο απλό αριστερό $R$-πρότυπο.

"$\Rightarrow$" Υπάρχει απλό πιστό αριστερό $R/I$-πρότυπο $M$. Θεωρώντας το $M$ ως $R$-πρότυπο, μέσω της προβολής $R \to R/I$ είναι το $M$ απλό και $\operatorname{ann}_R M = I$

"$\Leftarrow$" Αν το $M$ είναι ένα απλό $R$-πρότυπο με $I = \operatorname{ann}_R M$ τότε μπορώ να θεωρήσω το $M$ ως $R/I$-πρότυπο. Προφανώς το $M$ είναι απλό και ως $R/I$-πρότυπο και $\operatorname{ann}_{R/I} M = I/I = 0 \subseteq R/I$. Άρα $R/I$ είναι αριστερά πρωταρχικός.

Λέμε ότι το $I$ είναι αριστερά πρωταρχικό.

3) Για κάθε δακτύλιο $R$ είναι $\operatorname{rad} R = \bigcap \{ I \mid I \text{ αριστερά πρωταρχικό} \}$

4) Κάθε αριστερά πρωταρχικός δακτύλιος είναι semiprimitive, δηλ. J-ημιαπλός δηλ. $\operatorname{rad} R = 0$.

5) Έστω $R$ ένας αριστερά πρωταρχικός δακτύλιος και $I, J \subseteq R$ ιδεώδη με $I, J \neq 0$. Τότε $IJ \neq 0$.

Πράγματι, αν $M$ είναι ένα πιστό απλό αριστερό $R$-πρότυπο, τότε:
$JM \neq 0$ (καθώς $J \neq 0$ και $M$ πιστό.) και άρα $JM = M$ (καθώς το $JM$ είναι $R$-υποπρότυπο και το $M$ είναι απλό). Ανάλογα είναι $IM = M$.
Συνεπώς $(IJ)M = I(JM) = IM = M (\neq 0)$ και άρα $IJ \neq 0$.

6) Αν ο $R$ είναι μεταθετικός, τότε ο $R$ είναι (αριστερά) πρωταρχικός ανν ο $R$ είναι σώμα.

"$\Leftarrow$" ✓

"$\Rightarrow$" Έστω $M$ ένα απλό πιστό $R$-πρότυπο. Τότε υπάρχει ένα μεγιστικό (αριστερό) ιδεώδες $m \subseteq R$ με $M \cong R/m$. Είναι $0 = \operatorname{ann}_R M = \operatorname{ann}_R R/m = m$. και άρα ο $R$ δεν έχει ιδεώδη (εκτός των $0, R$). Άρα ο $R$ είναι σ.

ή διαιρετικός δακτύλιος

f) Αν $k$ είναι ένα σώμα και $V$ ένας $k$-δχ τότε ο δακτύλιος $R = End_k V$ είναι αριστερά πρωταρχικός, καθώς το $V$ είναι ένα απλό πιστό αριστερό $R$-πρότυπο.
• πιστό: $R = End_k V \hookrightarrow End(V,+)$
• απλό: Για κάθε $0 \neq v \in V$ είναι $V = R \cdot v$ (καθώς για κάθε $v, v' \in V$ με $v \neq 0$ υπάρχει $k$-γραμμική απεικόνιση $f: V \to V$ με $v' = f(v) = f \cdot v$)

Πρόταση Έστω $R$ ένας δακτύλιος ο οποίος έχει ένα ελαχιστικό αριστερό ιδεώδες $I \subseteq R$. Τότε:
(i) ο $R$ είναι αριστερά πρωταρχικός ανν για κάθε δύο μη-μηδενικά ιδεώδη $J_1, J_2 \subseteq R$ είναι $J_1 J_2 \neq 0$
(ii) αν ο $R$ είναι αριστερά πρωταρχικός, τότε υπάρχει ένα μοναδικό (ως προς ισομορφισμό) πιστό απλό $R$-πρότυπο
(iii) αν ο $R$ είναι αριστερά πρωταρχικός, τότε ο $R$ έχει ένα ελαχιστικό δεξιό ιδεώδες.
(iv) ο $R$ είναι αριστερά πρωταρχικός ανν ο $R$ είναι δεξιά πρωταρχικός.
απόδειξη (i) "$\Rightarrow$" ✓
"$\Leftarrow$" Το αριστερό $R$-πρότυπο $I$ είναι απλό (ως ελαχιστικό αριστερό ιδεώδες)
Θ.δ.ο. $I$ πιστό $R$-πρότυπο. Έστω $r \in R$ με $rI = 0$. Τότε $RrIR = 0$
δηλαδή $Rr\underbrace{R \cdot RI}_{I}R = 0$. Από την υπόθεση είναι $RrR = 0$ ή $RIR = 0$

Όμως $RIR \supseteq I \neq 0$ και άρα $RrR = 0$, δηλαδή $r = 1r1 = 0$.
(ii) Γνωρίζουμε ότι το αριστερό $R$-πρότυπο $I$ είναι απλό και πιστό.
Έστω $M$ ένα απλό πιστό αριστερό $R$-πρότυπο. Τότε $IM \neq 0$ (καθώς $I \neq 0$ και $M$ πιστό) και άρα υπάρχει $x \in M$ με $Ix \neq 0$. Καθώς το $M$ είναι απλό και το $Ix$ είναι ένα υποπρότυπο του $M$ είναι $M = Ix$.
Θεωρώ την απεικόνιση $f: I \to M$ με $f(r) = rx \in M$ για κάθε $r \in I$.
Η $f$ είναι γραμμική: Αν $r, r' \in I$ και $s \in R$ τότε $f(r+r') = (r+r')x =$
$= rx + r'x = f(r) + f(r')$ και $f(sr) = (sr)x = s(rx) = sf(x)$
Η $f$ είναι επί: $im f = Ix = M$
Η $f$ είναι 1-1: Είναι $ker f = 0$ ή $I$. Αν $ker f = I$ τότε $f = 0 \Rightarrow im f = 0$
(iii) Επιλέγω $a \in I$ με $a \neq 0$. Τότε $Ra = I$. Θ.δ.ο. το $J = aR$ είναι ένα ελαχιστικό δεξιό ιδεώδες. Αρκεί ν.δ.ο. για κάθε $ar \in J$ με $ar \neq 0$ είναι $J = arR$, δηλαδή ότι $aR = arR$ δηλαδή ότι $a \in arR$. Είναι