Παρατήρηση Έστω k δακτύλιος, V ένα k-πρότυπο και $\rho: R \to End_k V$ είναι ομομορφισμός δακτυλίων.

μάθημα 23
3/6/19

Η εικόνα $im\rho$ είναι πυκνή στον $End_k V$ ανν $\forall f \in End_k V$ και $v_1, \dots, v_n \in V$ $\exists r \in R$ ώστε $\rho(r)(v_i) = f(v_i)$ για $i=1,\dots,n$

$$im\rho \cap \left[\bigcap_{i=1}^{n} \{g \in End_k V / g(v_i) = f(v_i)\}\right] \neq \emptyset$$

Λήμμα Έστω V ένα ημιαπλό R-πρότυπο και $k = End_R V$, $E = End_k V$. Τότε μια υποομάδα $U \subseteq V$ είναι R-υποπρότυπο ανν είναι E-υποπρότυπο.

$\Big[$ $(V,+)$ αβελιανή ομάδα

$\rho: R \to End(V,+)$

$k = \{f \in End(V,+) / f \circ \rho(r) = \rho(r) \circ f \ \ \forall r \in R\} = (im\rho)'$

$E = \{f \in End(V,+) / f \circ x = x \circ f \ \ \forall x \in k\} = k' = (im\rho)''$

"R" $= im\rho \subseteq (im\rho)'' = E$ $\Big]$

απόδειξη "$\Leftarrow$" ✓

"$\Rightarrow$" Αν το $U \subseteq V$ είναι ένα R-υποπρότυπο τότε υπάρχει $U' \leq V$ με $V = U \oplus U'$. Θεωρώ την R-γραμμική απεικόνιση $p: V \to V$ με $p(u) = u$ $\forall u \in U$ και $p(u') = 0$ $\forall u' \in U'$. Είναι $p \in End_R V = k$.

Αν $e \in E$ και $u \in U$ είναι $e(u) = e(p(u)) = (e \circ p)(u) \overset{e \in E,\, p \in k}{=} (p \circ e)(u) = p(e(u)) \in U$. Άρα το U είναι E-υποπρότυπο.

Παρατηρήσεις

1) Αν V είναι ένα R-πρότυπο τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ είναι $End_R(V^n) \cong \mathbb{M}_n(End_R V)$

2) Έστω T δακτύλιος και $S \subseteq T$ υποδακτύλιος. Τότε ο μεταθέτης $\mathbb{M}_n(S)$ του υποδακτυλίου $\mathbb{M}_n(S) \subseteq \mathbb{M}_n(T)$ είναι ίσος με $S' \cdot I_n = \{s' I_n / s' \in S'\}$ όπου $S' \subseteq T$ είναι ο μεταθέτης του S στον T.

[πχ $T = \mathbb{C}$, $S = \mathbb{C}$. $Z(\mathbb{M}_n(\mathbb{C})) = (\mathbb{M}_n(\mathbb{C}))' = \mathbb{C}' I_n = \mathbb{C} \cdot I_n$]

Πράγματι, ΘΔΟ $[\mathbb{M}_n(S)]' = S' I_n$

"$\supseteq$" Αν $s' \in S'$ και $A = (s_{ij})_{ij} \in \mathbb{M}_n(S)$, τότε $A \cdot s' I_n = (s_{ij} s')_{ij} \overset{!}{=} (s' s_{ij})_{ij} = s' I_n \cdot A$. Άρα είναι $s' I_n \in [\mathbb{M}_n(S)]'$ δηλαδή $S' \cdot I_n \subseteq [\mathbb{M}_n(S)]'$.

"$\subseteq$" Έστω $X = (t_{ij})_{ij} \in [\mathbb{M}_n(S)]' \subseteq \mathbb{M}_n(T)$. ΘΔΟ $t_{ij} = 0$ για $i \neq j$

και $t_{11} = t_{22} = \dots = t_{nn} \in S'$ Γράφω $X = \sum_{i,j} t_{ij} E_{ij}$ και υπολογίζω για κάθε $\kappa, \lambda \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$X E_{\kappa\lambda} = \sum_{i,j} t_{ij} \underbrace{E_{ij} E_{\kappa\lambda}}_{\delta_{j\kappa} E_{i\lambda}} = \sum_{i} t_{i\kappa} E_{i\lambda}$$

$$E_{\kappa\lambda} \cdot X = \sum_{i,j} t_{ij} \underbrace{E_{\kappa\lambda} E_{ij}}_{\delta_{\lambda i} E_{\kappa j}} = \sum_{j} t_{\lambda j} E_{\kappa j}$$

Καθώς $1 \in S$ είναι $E_{\kappa\lambda} \in M_n(S)$ και άρα πρέπει να είναι $X E_{\kappa\lambda} = E_{\kappa\lambda} \cdot X$ $\forall \kappa, \lambda$ δηλαδή $\sum_i t_{i\kappa} E_{i\lambda} = \sum_j t_{\lambda j} E_{\kappa j}$ $\forall \kappa, \lambda$. Για $\kappa \neq \lambda$ προκύπτει ότι $t_{\kappa\kappa} = t_{\lambda\lambda}$ και $t_{\lambda\kappa} = 0$

$i = \kappa$ στο αριστερό άθροισμα $t_{\kappa\kappa} E_{\kappa\lambda}$ — $j = \lambda$ στο δεξί άθροισμα $t_{\lambda\lambda} E_{\kappa\lambda}$ — $i = \lambda$ στο αριστερό άθροισμα $t_{\lambda\kappa} E_{\lambda\lambda}$

Συνεπώς γράφοντας $t_{11} = t_{22} = \dots = t_{nn} = t \in T$ είναι $X = t \cdot I_n$. Για κάθε $s \in S$ είναι $s I_n \in M_n(S)$ και άρα $s t I_n = s I_n \cdot t I_n = s I_n X \overset{!}{=} X \cdot s I_n = t I_n \cdot s I_n = t s I_n$ και άρα $ts = st \in T$. Άρα $t \in S'$.

Θεώρημα (Πυκνότητας του Jacobson)

Έστω V ένα ημιαπλό R-πρότυπο και $k = End_R V$. Τότε ο ομομορφισμός δακτυλίων $\rho : R \to End_k V$ έχει πυκνή εικόνα.

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, dashed, "\rho"'] & End(V, +) \\ End_k V = (\mathrm{Im}\rho)'' \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

απόδειξη: Έστω $f \in End_k V$ και $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$. Θεωρώ το R-πρότυπο $\bar{V} = V^n = V \oplus V \oplus \dots \oplus V$ το οποίο είναι ημιαπλό. Είναι: $\bar{k} = End_R(\bar{V}) = End_R(V^n) = M_n(End_R V) = M_n(k)$

$\bar{E} = End_{\bar{k}} \bar{V} = End_{M_n(k)}(V^n) = [M_n(k)]' \subseteq M_n(End(V, +))$, όπου $E = k' = End_k V$

$k' \cdot I_n = E \cdot I_n$

Συνεπώς, κάθε R-υποπρότυπο του $\bar{V}$ είναι $\bar{E}$-υποπρότυπο.

Έστω $U = R \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} r v_1 \\ r v_2 \\ \vdots \\ r v_n \end{pmatrix} / r \in R \right\} \subseteq V^n = \bar{V}$. Το U είναι όμως $\bar{E}$-υποπρότυπο και άρα για το $f \in End_k V = E$ είναι $f \cdot I_n \in E \cdot I_n = \bar{E}$ και άρα $\underbrace{f \cdot I_n}_{\in \bar{E}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}}_{\in U} \in U$, δηλαδή $\begin{pmatrix} f(v_1) \\ f(v_2) \\ \vdots \\ f(v_n) \end{pmatrix} \in U$.

Συνεπώς υπάρχει $r \in R$ ώστε $\begin{pmatrix} f(v_1) \\ \vdots \\ f(v_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r v_1 \\ \vdots \\ r v_n \end{pmatrix}$

Πόρισμα Αν το V είναι ημιαπλό R-πρότυπο, $k = End_R V$ και το k-πρότυπο V είναι πεπ. παραγόμενο, τότε ο ομομορφισμός $R \to End_k V$ είναι επί.

<u>απόδειξη</u> Καθώς το k-πρότυπο V είναι πεπ. παραγόμενο, η τοπολογία στον $End_k V = Hom_k(V,V)$ είναι τετριμμένη και άρα το μόνο πυκνό υποσύνολο του $End_k V$ είναι όλος ο χώρος. Άρα $im\rho = End_k V$

Θεώρημα (δομής των αριστερά πρωταρχικών δακτυλίων)

Έστω R ένας αριστερά πρωταρχικός δακτύλιος και V ένα απλό πιστό R-πρότυπο. Αν $k = End_R V$ (διαιρετικός δακτύλιος από το λήμμα του Schur) τότε:

(i) ο R είναι ένας πυκνός υποδακτύλιος του $End_k V$

(ii) αν ο R είναι αριστερά του Artin, τότε $dim_k V = n < \infty$ και $R = M_n(k)$

(iii) αν ο R δεν είναι αριστερά του Artin, τότε $dim_k V = \infty$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει υποδακτύλιος $R_n \subseteq R$ και επιμορφισμός δακτυλίων $R_n \twoheadrightarrow M_n(k)$

<u>απόδειξη</u> (i) Καθώς το R-πρότυπο V (ως απλό είναι επίσης ημιαπλό) γνωρίζουμε ότι ο ομομορφισμός $R \to End_k V$ έχει πυκνή εικόνα. Καθώς το R-πρότυπο V είναι πιστό, ο σύνθεση $R \xrightarrow{\rho} End_k V \hookrightarrow End(V,+)$ είναι 1-1 και άρα η ρ είναι 1-1

μάθημα 24°
8/6/19

(ii) Αν $dim_k V = n < \infty$ τότε η τοπολογία του $End_k V$ είναι διακριτή και άρα ο εγκλεισμός $R \hookrightarrow End_k V$ είναι επί.

Προφανώς $End_k V \cong M_n(k)$ ($V \cong k^n$ ως k-πρότυπο)

(iii) Αν $dim_k V = \infty$ μπορώ να επιλέξω μια k-γραμμικά ανεξάρτητη ακολουθία διανυσμάτων $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ του V. Θέτω $V_n = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle = \sum_{i=1}^{n} k x_i$ και ορίζω $R_n = \{ r \in R / r \cdot V_n \subseteq V_n \}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Προφανώς ο R_n είναι υποδακτύλιος του R. Θ.δ.ο. η απεικόνιση:

$$R_n \to End_k V_n \cong End_k k^n = M_n(k)$$
$$r \longmapsto r|_{V_n} : V_n \to V_n$$

είναι επιμορφισμός δακτυλίων. Πράγματι, αν $f: V_n \to V_n$ είναι μια k-γραμμική απεικόνιση, μπορώ να βρω k-γραμμική απεικόνιση $F: V \to V$ με $F(x) = f(x)$ $\forall x \in V$. Καθώς ο ομομορφισμός $R \to End_k V$ έχει πυκνή εικόνα, υπάρχει $r \in R$ με $r x_i = F(x_i) = f(x_i)$ $\forall i = 1, \dots, n$

Τότε όμως είναι $rx_i = f(x_i) \in V_n \ \forall i=1,\dots,n$ και άρα $\forall x \in V_n$ είναι $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ για κάποια $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in k$ και άρα :

$$rx = \sum_{i=1}^{n} r\lambda_i x_i \underset{\begin{pmatrix}\lambda_i \in k = End_R V \\ \lambda_i \circ r = r\circ \lambda_i\end{pmatrix}}{\overset{!}{=}} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \underbrace{rx_i}_{\in V_n} = \sum_{i=1}^{n} r_i f(x_i) \underset{\begin{pmatrix} f \in End_k V \\ \lambda_i \in k \\ f\circ\lambda_i = \lambda_i \circ r\end{pmatrix}}{\overset{!}{=}} \sum_{i=1}^{n} f(r_i x_i) = f\left(\sum_{i=1}^{n} r_i x_i\right) =$$

$= f(x) \in V_n$

Έστω $I_n = \ker(R_n \to End_k V_n) = \{r \in R_n / r|_{V_n} = 0 : V_n \to V_n\} \subseteq$
$\subseteq \{r \in R / rx = 0 \in V \ \forall x \in V_n\}$ (ιδεώδες του R_n, αριστερό ιδεώδες του R)

Από την τελευταία ισότητα έπεται ότι $I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \dots \supseteq I_n \supseteq I_{n+1} \supseteq \dots$

<u>Ισχυρισμός</u> $I_n \supset I_{n+1}$, δηλαδή $I_n \setminus I_{n+1} \neq \emptyset \ \forall n$

Πράγματι, καθώς τα $x_1, \dots, x_n, x_{n+1}$ είναι γρ. ανεξάρτητα $\exists f \in End_k V$ με $f(x_1) = \dots = f(x_n) = 0$ και $f(x_{n+1}) \neq 0$. Λόγω πυκνότητας $\exists r \in R$ με
$\underbrace{rx_1}_{f(x_1)} = \dots = \underbrace{rx_n}_{f(x_n)} = 0$ και $\underbrace{rx_{n+1}}_{f(x_{n+1})} \neq 0$

Είναι $r \in I_n$ (καθώς $V_n = \langle x_1, x_2, \dots, x_n\rangle$ και $r\cdot x_i = 0 \ \forall i = 1,2,\dots,n$) και $r \notin I_{n+1}$.

Πρόταση Έστω k ένας διαιρετικός δακτύλιος και V ένα k-πρότυπο. Αν $R \subseteq End_k V$ είναι ένας πυκνός υποδακτύλιος τότε:

(i) Το R-πρότυπο V είναι απλό (και άρα ο R είναι αριστερά πρωταρχικός)

(ii) $End_R V = k$ (και άρα $k = R' \subseteq End(V,+)$, οπότε ο εγκλεισμός $R \subseteq End_k V$ είναι ο εγκλεισμός $R \subseteq k' = R''$ στον $End(V,+)$)

<u>απόδειξη</u> (i) Πρέπει ν.δ.ο. $\forall x \neq 0$ είναι $V = Rx$, δηλαδή ότι $\forall x, y \in V$ με $x \neq 0$ $\exists r \in R$ με $y = rx$. Αυτό όμως είναι προφανές λόγω της πυκνότητας του R στον $End_k V$. ($\exists f \in End_k V$ με $f(x) = y$ και βρίσκω $r \in R$ με $rx = f(x) = y$)

(ii) Καθώς $R \subseteq End_k V = k' \subseteq End(V,+)$, είναι $k \subseteq R' = End_R V$

Έστω $\sigma \in End_R V$. Για κάθε $x \in V$ είναι $\sigma(x) \in kx$. Διαφορετικά τα στοιχεία $x, \sigma(x) \in V$ θα ήταν k-γραμμικά ανεξάρτητα. Συνεπώς θα υπήρχε $f \in End_k V$ με $f(x) = 0$ και $f(\sigma(x)) \neq 0$. Λόγω πυκνότητας θα υπήρχε $r \in R$ με $rx = f(x) = 0$ και $r\sigma(x) = f(\sigma(x)) \neq 0$. Όμως είναι $\sigma \in End_R V$ και άρα $r\sigma(x) = \sigma(rx) = \sigma(0) = 0$ άτοπο. <u>Συμπέρασμα</u> : $\forall x \in V \ \exists \lambda_x \in k$

με $\sigma(x) = \lambda_x x$. Επιλέγω $x \in V$ με $x \neq 0$ και θέτω $\lambda = \lambda_x$. Θδο $\sigma(y) = \lambda y$ $\forall y \in V$. Λόγω πυκνότητας, $\exists r \in R$ με $y = rx$. Τότε $\sigma(y) = \sigma(rx) \underset{\sigma \in End_R V}{=}$
$= r\sigma(x) = r \cdot \lambda x = \lambda r x = \lambda y$

$\quad\uparrow$ $r \in R \subseteq End_K M$, $\lambda \in \mathbb{Z}$ K

Παράδειγμα Έστω $V = \mathbb{Q}x_1 \oplus \mathbb{Q}x_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Q}x_n \oplus \cdots$ και θεωρώ τον υποδακτύλιο $R \subseteq End_{\mathbb{Q}} V$ που ορίζεται ως εξής:

$$R = \left\{ f : V \to V \;/\; \begin{array}{l} f\ \mathbb{Q}\text{-γραμμική και } \exists\, n >> 0 \text{ και } \lambda \in \boxed{\mathbb{Z}} \text{ ώστε } f\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{Q}x_i\right) \subseteq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{Q}x_i \\ \text{και } f(x_j) = \lambda x_j \ \forall j > n \end{array} \right\}$$

$S \subseteq K$

$$\left(\begin{array}{c|cccc} A & & & & \\ \hline & \boxed{\lambda} & & & \\ & & \boxed{\lambda} & & \\ & & & \boxed{\lambda} & \\ & & & & \ddots \end{array}\right)$$

A είναι ο πίνακας της $f|_{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{Q}x_i}$

$$\begin{array}{ccc} V = \left[\bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Q}x_i\right] & \oplus & \left[\bigoplus_{j>n} \mathbb{Q}x_j\right] \\ \Big\downarrow \text{αυθαίρετα} & & \Big\downarrow \lambda \\ V = \left[\bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Q}x_i\right] & \oplus & \left[\bigoplus_{j>n} \mathbb{Q}x_j\right] \end{array}$$

Προφανώς ο R είναι ένας πυκνός υποδακτύλιος του $End_{\mathbb{Q}} V$ και το κέντρο $Z(R) = \{\lambda \cdot I_V \;/\; \lambda \in \mathbb{Z}\} \simeq \boxed{\mathbb{Z}}$ S

(μπορώ να επεκτείνω το παράδειγμα παίρνοντας σώμα K αντί για $\mathbb{Q}$ και $S \subseteq K$ αντί για $\mathbb{Z}$)

ΤΕΛΟΣ