Βιβλιογραφία
1) Walters: Introduction to Ergodic Theory
2) Einsiedler, Ward: Ergodic Theory with a view towards number Theory
3) Petersen: Ergodic Theory
4) Viana, Oliveira: Fundamentals of Ergodic Theory
+ σημειώσεις στην eclass

μάθημα 1°
1/10/18

Σύνολο X

$T: X \to X$

$T^n = \underbrace{T \circ T \circ \dots \circ T}_{n \text{ φορές}}$

Μας ενδιαφέρει η συμπεριφορά του $T^n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in X$ (τροχιά του σημείου x)

Χρειαζόμαστε επιπλέον δομή

1) X χώρος πιθανότητας, $T: X \to X$, μετρήσιμη απεικόνιση. μετρήσιμο δυναμικό σύστημα ή σύστημα που διατηρεί το μέτρο.

2) X τοπολογικός χώρος (συνήθως συμπαγής μετρικός χώρος) $T: X \to X$ συνεχής. Τοπολογικά δυναμικά συστήματα.

3) X λεία πολλαπλότητα. $T: X \to X$ λεία απεικόνιση. Λεία δυναμικά συστήματα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1°
ΜΕΤΡΗΣΙΜΑ ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Ορισμός Ενα μετρήσιμο δυναμικό σύστημα ή σύστημα που διατηρεί το μέτρο είναι $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ οπου $(X, \mathcal{B}, \mu)$ χώρος πιθανότητας και $T: X \to X$ μετρήσιμη, δηλαδή $T^{-1}\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}$ (T μετρήσιμη) και επίσης η T διατηρεί το μέτρο: $\mu(T^{-1}(B)) = \mu(B)$ $\forall B \in \mathcal{B}$

Συμβολισμοί

$T^{-1}\mathcal{B} = \{T^{-1}(B) \,/\, B \in \mathcal{B}\}$

$T_*\mu(B) = \mu(T^{-1}(B))$

Η T διατηρεί το μέτρο: $T_*\mu = \mu$

Ενα σύστημα που διατηρεί το μέτρο (σ.δ.μ.) $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ λέγεται αντιστρέψιμο αν T είναι αντιστρέψιμη και η T^{-1} είναι επίσης μετρήσιμη, δηλ. $T\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}$.

Λήμμα Αν $(X, \mathcal{B}, \mu)$ είναι χώρος πιθανότητας και $T: X \to X$ μετρήσιμη τότε $T_*\mu(B) = \mu(T^{-1}(B))$ $B \in \mathcal{B}$ είναι μέτρο πιθανότητας.

Ορισμός Έστω X σύνολο και $\mathcal{A} \subseteq P(X)$ ($P(X)$: δυναμοσύνολο του X).
Η σ-άλγεβρα που παράγεται από την $\mathcal{A}$ είναι η μικρότερη σ-άλγεβρα που περιέχει την $\mathcal{A}$, δηλ. η τομή όλων των σ-αλγεβρών που περιέχουν την $\mathcal{A}$. Συμβολίζεται με $\sigma(\mathcal{A})$
Αν $\mathcal{F}$ είναι μια οικογένεια συναρτήσεων $f : X \to \mathbb{R}$ (ή $f : X \to \mathbb{C}$) τότε $\sigma(\mathcal{F})$ η σ-άλγεβρα που παράγεται από την $\mathcal{F}$ είναι η μικρότερη σ-άλγεβρα ως προς την οποία όλες οι συναρτήσεις στην $\mathcal{F}$ είναι μετρήσιμες δηλ. $\sigma(\mathcal{F})$ περιέχει όλες $f^{-1}((-\infty, b])$, $b \in \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{F}$

Μια οικογένεια $P \subseteq P(X)$ λέγεται π-σύστημα αν $A, B \in P \Rightarrow A \cap B \in P$

Λήμμα. Έστω $(X, \mathcal{B}, \mu)$ χώρος πιθανότητας και $T : X \to X$ μετρήσιμη. Τότε η T διατηρεί το μέτρο ανν $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$, $\forall A \in P$ όπου P ένα P σύστημα που παράγει την σ-άλγεβρα $\mathcal{B}$, δηλαδή με $\sigma(P) = \mathcal{B}$

απόδειξη Ορίζουμε το μέτρο $\nu = T_* \mu$. Θέλουμε να δείξουμε ότι $\nu = \mu$. Τα ν και μ είναι μέτρα πιθανότητας. Αν συμφωνούν σε ένα π-σύστημα που παράγει την $\mathcal{B}$ τότε είναι ίσα (*). Οπότε αν $\nu(A) = \mu(A)$ για κάποιο P π-σύστημα με $\sigma(P) = \mathcal{B}$ έπεται ότι $\nu = \mu$ και η T διατηρεί το μέτρο.

(*) Πρόταση σελ 15 - Θεωρία Μέτρου

Παράδειγμα Στον $\mathbb{R}$ η $P = \{(a,b) \,/\, a, b \in \mathbb{R}\}$ είναι π-σύστημα που παράγει την Borel σ-άλγεβρα του $\mathbb{R}$.

Έστω $(X, \mathcal{B}, \mu)$ χώρος μέτρου. Για $f : X \to \mathbb{R}$ (ή $f : X \to \mathbb{C}$) μετρήσιμη ορίζουμε $\|f\|_p = \left(\int |f|^p \, d\mu \right)^{1/p}$, $1 \le p < +\infty$

Ο $L^p(X, \mathcal{B}, \mu) = \{ f : \|f\|_p < \infty \}$
για $p = \infty$ ορίζουμε $\|f\|_\infty = \inf \{ t > 0 : \mu\{x \in X \,/\, |f(x)| > t\} = 0 \}$
$L^\infty(X, \mathcal{B}, \mu) = \{ f \,/\, \|f\|_\infty < \infty \}$

Λήμμα Έστω $(X, \mathcal{B}, \mu)$ χώρος πιθανότητας. $T: X \to X$ μετρήσιμη. Τότε:
(i) Αν $\int f d\mu = \int f \circ T d\mu \quad \forall f \in L^\infty(X, \mathcal{B}, \mu)$ τότε η T διατηρεί το μέτρο
(ii) Αν η T διατηρεί το μέτρο τότε $\int f \circ T d\mu = \int f d\mu$ ισχύει για καθε $f \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ και καθε $f \geq 0$ μετρήσιμη

απόδειξη (i) Έστω $B \in \mathcal{B}$. Θέτουμε $f = 1\!\!1_B \in L^\infty(X, \mathcal{B}, \mu)$ άρα

$\int f d\mu = \int f \circ T d\mu \Rightarrow$

$\Rightarrow \int 1\!\!1_B d\mu = \int 1\!\!1_B \circ T d\mu \Rightarrow$ (Έχω $1\!\!1_B \circ T = 1\!\!1_{T^{-1}(B)}$)

$\Rightarrow \mu(B) = \int 1\!\!1_{T^{-1}(B)} d\mu \Rightarrow$

$\Rightarrow \mu(B) = \mu(T^{-1}(B))$

(ii) Από την $T_*\mu = \mu$ έπεται ότι $\int f d\mu = \int f \circ T d\mu$ (*)
ισχύει για $f = 1\!\!1_B$, $B \in \mathcal{B}$. Από γραμμικότητα η (*) ισχύει για γραμμικούς συνδυασμούς χαρακτηριστικών συναρτήσεων δηλ. απλές. Καθε $f \geq 0$ μετρήσιμη προσεγγίζεται από απλές $0 \leq s_n \nearrow f$ τότε $0 \leq s_n \circ T \nearrow f \circ T$

$\int f d\mu = \lim \int s_n d\mu = \lim \int s_n \circ T d\mu = \int f \circ T d\mu$ από θεώρημα μονότονης σύγκλισης

Επειδή καθε $f \in L^1$ πραγματική γράφεται ως $f = f^+ - f^-$ και $(f \circ T)^+ = f^+ \circ T$, $(f \circ T)^- = f^- \circ T$ έπεται ότι η (*) ισχύει για πραγματικές f στον L^1. Και αν $f \in L^1$, $f: X \to \mathbb{C}$ γράφουμε την f στο πραγματικό και στο φανταστικό μέρος

Παρατήρηση Αν $(X, \mathcal{B}, \mu)$ χώρος πιθανότητας και $T: X \to X$ μετρήσιμη $\int f d T_*\mu = \int f \circ T d\mu$ για $f \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ και καθε $f \geq 0$ μετρήσιμη.

Παράδειγμα

Τόρος $\mathbb{T} = [0,1) \simeq \mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq S^1$

$S^1 = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$

$\mathbb{R}/\mathbb{Z} = \{x + \mathbb{Z} / x \in \mathbb{R}\}$

$x (\mathrm{mod}\, 1) = x - [x]$, $[x]$ = ακέραιο μέρος του x

$\mathcal{B}$ η Borel σ-άλγεβρα του $[0,1)$ ή του S^1 αντίστοιχα

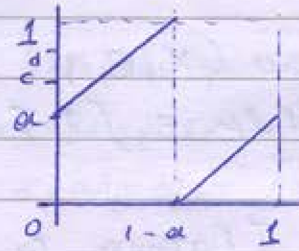
$\lambda_{\mathbb{T}}$ το μέτρο Lebesgue στο $[0,1) = \mathbb{T}$

Για $a \in \Pi$ ορίζω:

$T_a(x) = (x + a) (\mathrm{mod}\, 1) = x + a - [x+a]$

$T_a(x + \mathbb{Z}) = x + a + \mathbb{Z}$, $x + \mathbb{Z} \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$

$T_a(z) = e^{2\pi i a} \cdot z$, $z \in S^1$



πρώτος τρόπος

Η T_a διατηρεί το μέτρο λ_Π. Αρκεί να ελέγξουμε την $\lambda(T^{-1}(a,b)) = \lambda(a,b)$ για διαστήματα (a,b) (από λήμμα σελ 2)

$$T_a^{-1}((c,d)) = \begin{cases} (c-a, d-a), & a \le c < d < 1 \\ (c-a+1, d-a+1), & 0 \le c < d < a \\ (0, d-a) \cup (c-a+1, 1), & 0 \le c < a \le d < 1 \end{cases}$$

Δεύτερος τρόπος

Έστω $f \in L^\infty(\Pi, \mathcal{B}_\Pi, \lambda_\Pi)$. Θέλω $\int f \circ T_a \, d\lambda = \int f \, d\lambda$

$$\int f \, d\lambda = \int_0^1 f(x)\, dx$$

Επεκτείνω την f σε όλο το $\mathbb{R}$ περιοδικά.

$$\int f \circ T_a \, d\lambda = \int_0^1 f(x+a)\, dx = \int_a^{1+a} f(x)\, dx = \int_a^1 f(x)\, dx + \int_1^{1+a} f(x)\, dx$$

$$\overset{\text{περιοδική}}{=} \int_a^1 f(x)\, dx + \int_1^{1+a} f(x-1)\, dx = \int_a^1 f(x)\, dx + \int_0^a f(x)\, dx = \int f \, d\lambda$$

Γενικό παράδειγμα : Στροφές σε ομάδες συμπαγείς.

Ορισμός Τοπολογική ομάδα είναι μια ομάδα G με μια τοπολογία ως προς την οποία η πράξη είναι συνεχής με την τοπολογία γινόμενο στην $G \times G$ και η $x \mapsto x^{-1}$ είναι επίσης συνεχής.

Ορισμός Αν G τοπολογική ομάδα η οποία είναι τοπικά συμπαγής και Hausdorff τότε υπάρχει κανονικό μέτρο Borel λ τ.ω (σημειώσεις Θ. μέτρου σελ 47)

(*) $\lambda(xE) = \lambda(E)$ $\forall E \in \mathcal{B}(G)$, $\forall x \in G$ δηλαδή το λ είναι αναλλοίωτο ως προς "μεταφορές"

Παρατηρήσεις (1) Το λ είναι μοναδικό υπό την εξής έννοια: αν $\lambda_1 = \lambda_2$ δύο κανονικά μέτρα Borel που ικανοποιούν την (*) τότε $\lambda_1 = c\lambda_2$ για κάποιο $c > 0$.

(2) Επίσης το λ είναι πεπερασμένο αν η G είναι συμπαγής.

Στην περίπτωση που G συμπαγής θεωρούμε το λ με $\lambda(G)=1$

(3) Επίσης $\lambda(U)>0$ $\forall\, U \subseteq G$ ανοικτό. Ένα τέτοιο μέτρο λέγεται **αριστερό μέτρο Haar** για την G. Συμβολισμός: $xE = \{xy \,/\, y\in E\}$

Παραδείγματα Στον $\mathbb{R}^n$ το μέτρο Haar είναι το μέτρο Lebesgue.

Στον $\mathbb{T}$ το μέτρο Haar είναι το μέτρο Lebesgue $\lambda_{\mathbb{T}}$.

Ο τόρος $\mathbb{T}^n := [0,1)^n \cong \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \simeq S\times S\times \dots \times S$

Μέτρο Haar του $\mathbb{T}^n$ είναι το μέτρο Lebesgue στο $[0,1)^n$

Αν $X = G$ συμπαγής ομάδα, $\mu=\lambda_G$ = μέτρο Haar της G ώστε $\mu(X)=1$ και $a\in G$, τότε η $T_a(x)=ax$ $\boxed{\lambda(T_a^{-1}(B)) = \lambda(a^{-1}B) = \lambda(B),\ \forall B\in\mathcal{B}(G)}$ διατηρεί μέτρο αφού $a^{-1}\in G$

Το σύστημα $(X,\mathcal{B}(G),\mu,T_a)$ είναι σύστημα που διατηρεί το μέτρο

Ειδικές περιπτώσεις: $G=\mathbb{T}$, $X=\mathbb{T}^n$, $\mathcal{B}=\mathcal{B}(\mathbb{T}^n)$, $\mu=\lambda_{\mathbb{T}^n}$ = Lebesgue στον $\mathbb{T}^n$

Για $a=(a_1,a_2,\dots,a_n)\in\mathbb{T}^n$ ορίζουμε

$T_a(x) = (x_1+a_1 (\mathrm{mod}\,1),\ x_2+a_2(\mathrm{mod}\,1),\ \dots,\ x_n+a_n(\mathrm{mod}\,1))$

(Σαν απεικόνιση $T_a: S\times\dots\times S \to S\times\dots\times S$

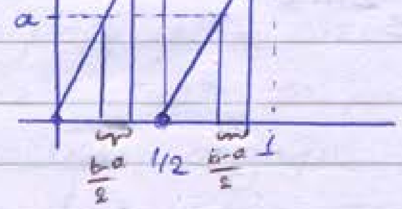
$$T_a(z_1,z_2,\dots,z_n) = (e^{2\pi i a_1} z_1, \dots, e^{2\pi i a_n} z_n)$$

Παράδειγμα 2 $X=\mathbb{T}$, $\mathcal{B}=\mathcal{B}(\mathbb{T})$, $\mu=\lambda_{\mathbb{T}}$

$T_2(x) = 2x(\mathrm{mod}\,1) = 2x-[2x]$

$(T_2: S\to S,\ T_2(z)=z^2)$

Το σύστημα $(X,\mathcal{B},\mu,T_2)$ είναι ένα σύστημα που διατηρεί το μέτρο



Η αντίστροφη εικόνα ενός διαστήματος (a,b) είναι δύο διαστήματα μήκους $\frac{b-a}{2}$ το καθένα.

Γενικά για $k\in\mathbb{N}$ η $T_k(x)=kx(\mathrm{mod}\,1)$ ορίζει απεικόνιση που διατηρεί το μέτρο Lebesgue.

Furstenberg

Εικασία: Αν μ συνεχές μέτρο πιθανότητας στον κύκλο και $(T_2)_*\mu=\mu$ και $(T_3)_*\mu=\mu$ τότε μ = Lebesgue

$(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ σύστημα που διατηρεί το μέτρο, δηλ.

$(X, \mathcal{B}, \mu)$ χώρος πιθανότητας, $T: X \to X$ μετρήσιμη

$T_* \mu = \mu \Leftrightarrow \mu(T^{-1}(B)) = \mu(B) \ \forall B \in \mathcal{B}$

μάθημα 2°
3/10/18

$\mathbb{T} = [0,1) \simeq \mathbb{R}/\mathbb{Z} \sim S$

$x - [x] \leftarrow x + \mathbb{Z} \leftrightarrow e^{2\pi i x}$

Οι συναρτήσεις στον τόρο είναι σε ένα προς ένα αντιστοιχία με περιοδικές (1 περιοδικές συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$)

f στον τόρο. $\tilde{f}(x) = f(x - [x]) = f(x + \mathbb{Z}) = f(e^{2\pi i x})$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Μετρικές $d_S(z,w) = 2\arcsin \frac{|z-w|}{2}$

$d_{\mathbb{T}}(t,s) = \min\{|t-s|, 1-|t-s|\}$, $t,s \in \mathbb{T}$

$d_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}(x+\mathbb{Z}, y+\mathbb{Z}) = \min\limits_{m \in \mathbb{Z}} |x-y+m|$

Ανοικτές μπάλες

Στο $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$: $(a,b)+\mathbb{Z}$, $a,b \in \mathbb{R}$

Στο $\mathbb{T}$ $(a,b) \subset [0,1)$ και $[0,b) \cup (a,1)$

Στο S $\{e^{2\pi i x} / x \in (a,b)\}$

Ανοικτά σύνολα: Ενώσεις τέτοιων

Borel σ-άλγεβρα: η μικρότερη σ-άλγεβρα που περιέχει ανοικτά: η σ-άλγεβρα που παράγεται από τις παραπάνω ανοικτές μπάλες

$\lambda_{\mathbb{T}}$ = μέτρο Lebesgue στο $[0,1)$

$\lambda_S = \frac{1}{2\pi}$ μήκος τόξου $= \frac{1}{2\pi} h_* \lambda_{\mathbb{T}}$ όπου $h(t) = e^{2\pi i t}$

$\lambda_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} = g_* \lambda_{\mathbb{T}}$ $g(t) = t + \mathbb{Z}$

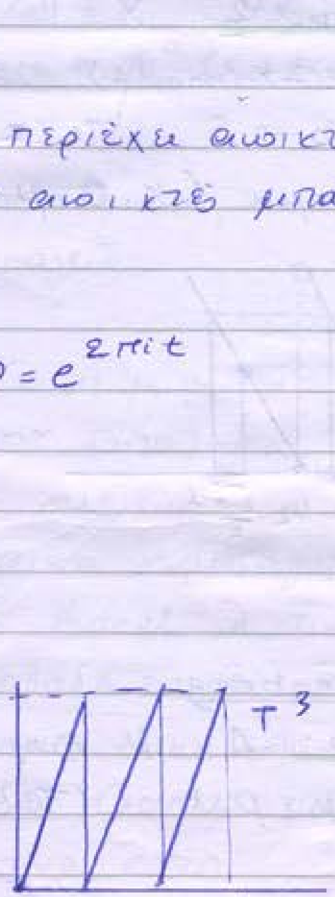
Παράδειγμα Για $k \in \mathbb{N}$, $T_k(x) = kx \pmod 1$

(στο S: $T_k(z) = z^k$)

Διατηρεί το μέτρο $\lambda_{\mathbb{T}}$

2η απόδειξη: Έστω $f \in L^\infty(\mathbb{T})$

Έστω $\tilde{f}(x) = f(x - [x])$



$$\int_{\mathbb{T}} f\circ T_k(t)\, d\lambda_{\mathbb{T}}(t) = \int_{[0,1)} f(kt-[kt])\, d\lambda_{\mathbb{T}}(t) = \int_0^1 \tilde{f}(kt)\,dt =$$
$$= \frac{1}{k}\int_0^k \tilde{f}(x)\,dx = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\int_{j-1}^{j}\tilde{f}(x)\,dx = \frac{1}{k}\,k\int_0^1 \tilde{f}(x)\,dx = \int_{\mathbb{T}} f\, d\lambda_{\mathbb{T}}$$

Το ανάλογο του T_k στις πολλές διαστάσεις

Έστω A $n\times n$ πίνακας με στοιχεία στο $\mathbb{Z}$. Τότε:

$T(x) = Ax \pmod 1 \quad x\in \mathbb{T}^n$

και $T(x+\mathbb{Z}^n) = Ax+\mathbb{Z}^n$

Λήμμα Έστω G ομάδα, H κανονική υποομάδα, $\varphi: G\to G$ ομομορφισμός με $\varphi(H)\subseteq H$. Τότε η $\tilde{\varphi}: G/H\to G/H$ με $\tilde{\varphi}(xH)=\varphi(x)H$ είναι καλά ορισμένος ομομορφισμός. Αν φ επιμορφισμός τότε και $\tilde{\varphi}$ επιμορφισμός.

απόδειξη: καλά ορισμένο: Αν $xH = yH \Leftrightarrow y^{-1}x\in H$. Τότε $\varphi(y^{-1}x)\in H$ $\Leftrightarrow \varphi(y)^{-1}\varphi(x)\in H \Leftrightarrow \varphi(x)H = \varphi(y)H$

επιμορφισμός: άμεσο.

Αν $\det(A)\neq 0$ η $x\mapsto Ax$, $x\in\mathbb{R}^n$ είναι επιμορφισμός στον $\mathbb{R}^n$ και άρα από το λήμμα η $T(x+\mathbb{Z}^n) = Ax+\mathbb{Z}^n$ είναι καλά ορισμένος επιμορφισμός.

Πρόταση Αν G συμπαγής ομάδα Hausdorff και $T: G\to G$ μετρήσιμος επιμορφισμός, τότε το σύστημα $(G, \mathcal{B}(G), \lambda_G, T)$ είναι σύστημα που διατηρεί το μέτρο (λ_G μέτρο Haar της G)

απόδειξη ορίζουμε $\mu = T_*\lambda_G$. Θέλουμε να δείξουμε ότι $\mu=\lambda_G$.
Θα δείξουμε ότι το μ είναι ένα μέτρο Haar.

Έστω $E\in\mathcal{B}(G)$, $y\in G$. Θέλω $\mu(yE)=\mu(E) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lambda_G(T^{-1}(yE)) = \lambda_G(T^{-1}(E))$

Έστω $x\in T^{-1}(\{y\})\neq\emptyset$.

$z\in T^{-1}(yE) \Leftrightarrow y^{-1}T(z)\in E \Leftrightarrow T(x^{-1}z)\in E \Leftrightarrow z\in xT^{-1}(E)$

Άρα $T^{-1}(yE) = xT^{-1}(E)$.

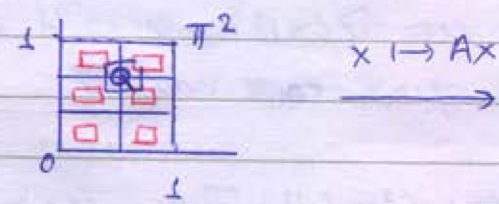
Άρα $\mu(yE) = \lambda_G(T^{-1}(yE)) = \lambda_G(xT^{-1}(E)) = \lambda_G(T^{-1}(E)) = \mu(E)$

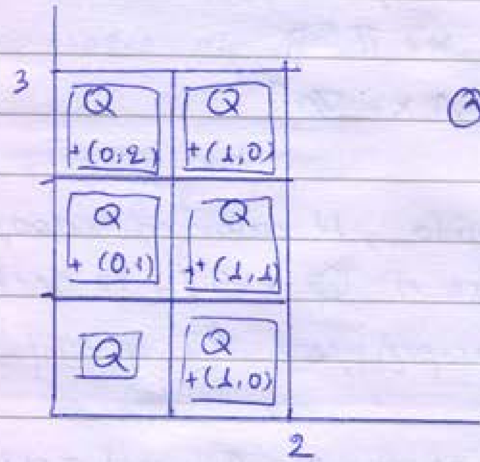
Άρα μ είναι ένα μέτρο Haar. Άρα $\mu = c\lambda_a$ για κάποιο $c>0$.
$\mu(a) = \lambda_a(T^{-1}(a)) = \lambda_a(a) \Rightarrow c=1$
Επομένως $T^*\lambda_a = \mu = \lambda_a$.

Εφαρμογή Ο επιμορφισμός $T(x) = Ax \pmod 1$ του $\mathbb{T}^n$ όπου A πίνακας με ακέραια στοιχεία και $\det(A) \neq 0$ διατηρεί το μέτρο Lebesgue ($=$ μέτρο Haar της $\mathbb{T}^n$).

Συγκεκριμένο Παράδειγμα

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$





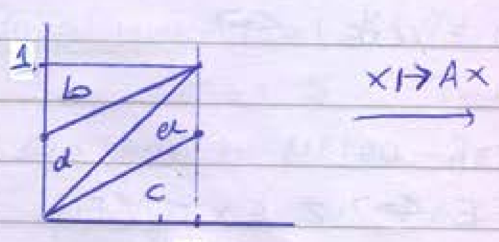
Q ορθογώνιο στο $[0,1)^2$

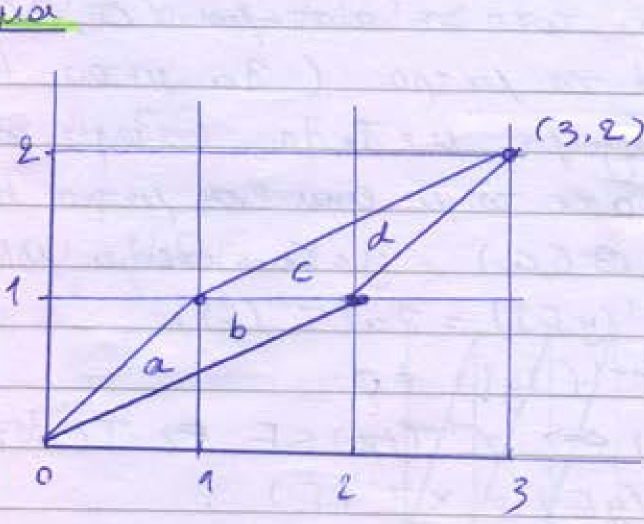
Τα 6 κόκκινα ορθογώνια είναι $T^{-1}(Q)$. Κάθε κόκκινο ορθογώνιο έχει εμβαδό $\frac{1}{6}$ εμβαδόν(Q), είναι συνολικά 6 άρα διατηρείται το μέτρο.

Άσκηση Αποδείξτε ότι ένας τέτοιος T είναι $\det(A)$-προς-1 δηλ. κάθε $y \in \mathbb{T}^n$ έχει $\det(A)$ αντίστροφες εικόνες.
Ειδικότερα αν $\det(A)=1$ ο T είναι αυτομορφισμός του Τόρου.

Άλλο συγκεκριμένο παράδειγμα

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$





Παράδειγμα

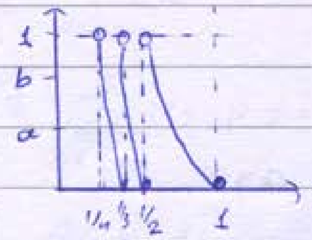
Απεικόνιση Gauss

$T:(0,1] \to [0,1]$

$T(x) = \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right] \quad , x \neq 0$

Η T διατηρεί το μέτρο μ: $\frac{d\mu(x)}{dx} = \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{1}{1+x}$

$\left(\left[\frac{1}{x}\right] = n \Leftrightarrow n \leq \frac{1}{x} < n+1 \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n} \right)$



Έστω $0<a<b<1$. $T(x) \in (a,b)$ και $\frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}$

$\frac{1}{x} - n \in (a,b)$ και $\frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}$

$\frac{1}{n+b} < x < \frac{1}{n+a}$ άρα $T^{-1}((a,b)) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{n+b}, \frac{1}{n+a}\right)}_{\text{ξένα γιατί } 0<a<b<1}$

$\mu(T^{-1}(a,b)) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(\frac{1}{n+b}, \frac{1}{n+a}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{n+b}}^{\frac{1}{n+a}} \frac{dx}{x+1} \cdot \frac{1}{\ln 2} =$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\ln\left(\frac{1}{n+a}+1\right) - \ln\left(\frac{1}{n+b}+1\right) \right] \frac{1}{\ln 2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\ln\left(\frac{n+a+1}{n+b+1}\right) - \ln\left(\frac{n+a}{n+b}\right) \right] \frac{1}{\ln 2}$

$= \frac{1}{\ln 2} \ln \frac{1+b}{1+a}$

$\mu(a,b) = \int_a^b \frac{dx}{1+x} \cdot \frac{1}{\ln 2} = \frac{1}{\ln 2} \ln \frac{1+b}{1+a}$

Η $T[0,1] \nsubseteq [0,1]$

Είτε θεωρώ $X = [0,1] \setminus \mathbb{Q}$ και τότε $T: X \to X$ είτε ορίζω την T στο $(0,1]$ ορίζοντας την αυθαίρετα στους ρητούς.

Η T σχετίζεται με συνεχή κλάσματα. Αν $x \in (0,1) \setminus \mathbb{Q}$ τότε ο x γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως:

$$x = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\dots}}} \quad , \text{ όπου } a_i \in \mathbb{N} \ \forall i \in \mathbb{N}$$

$\frac{1}{x} - a_1 = \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3+\cdots}} \in (0,1)$ άρα $a_1 = \left[\frac{1}{x}\right]$

Επειδή $T(x) = \frac{1}{a_2+\frac{1}{a_3+\cdots}} \Rightarrow \frac{1}{T(x)} - a_2 = \frac{1}{a_3+\frac{1}{a_4+\cdots}}$

άρα $a_2 = \left[\frac{1}{T(x)}\right]$ $\quad T^2(x) = T(T(x)) = \frac{1}{a_3+\frac{1}{\cdots}}$

Επαγωγικά: $a_n = \left[\frac{1}{T^{n-1}(x)}\right]$

Ειδικότερα: $x = [a_1, a_2, \dots]$ τότε $T(x) = [a_2, a_3, \dots]$

Παράδειγμα - Χώροι ακολουθιών

(1) Bernoulli shifts, μονόπλευρα. Έστω S πεπερασμένο σύνολο,
$X = S^{\mathbb{N}} = \{\underline{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \,/\, x_n \in S \ \forall n\in\mathbb{N}\}$
$T: X \to X$ είναι το shift $T(x_1, x_2, \dots) = (x_2, x_3, \dots)$
$\mathcal{B} = \sigma(\{\underline{x}\in X \,/\, x_1 = s_1, x_2 = s_2, \dots, x_n = s_n\} \ n\in\mathbb{N},\ s_1,\dots,s_n \in S)$
Αν $\pi_n : X \to S$ με $\pi_n(x_1, x_2, \dots) = x_n$, $n\in\mathbb{N}$ τότε $\mathcal{B} = \sigma(\pi_n \,/\, n\in\mathbb{N})$
μετρήσιμος χώρος $(X, \mathcal{B})$ και $T: X \to X$. Η T είναι μετρήσιμη.
Πράγματι, $T^{-1}(\{\underline{x}\in X \,/\, x_1 = s_1, \dots x_n = s_n\}) =$
$= \bigcup_{s\in S} \{\underline{x}\in X / x_1 = s, x_2 = s_1, \dots, x_{n+1} = s_n\}) \in \mathcal{B}$

Η $\{B \subseteq X \,/\, T^{-1}(B) \in \mathcal{B}\}$ είναι σ-άλγεβρα και αφού περιέχει τα $\{\underline{x}\in X \,/\, x_1 = s_1, \dots, x_n = s_n\}$, $s_1, \dots, s_n \in S$, $n \in \mathbb{N}$, περιέχει την προηγούμενη σ-άλγεβρα δηλ. την $\mathcal{B}$.
Δοθέντος $(p_s)_{s\in S}$, $p_s \geq 0$ $\forall s\in S$, $\sum_{s\in S} p_s = 1$, ισχύει:

Θεώρημα Υπάρχει μοναδικό μέτρο πιθανότητας μ στον μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{B})$ τ.ω. $\mu(\{\underline{x}\in X / x_1 = s_1, \dots, x_n = s_n\}) = p_{s_1} p_{s_2} \cdots p_{s_n}$.
απόδειξη Billingsley, Probability + Measure κεφάλαιο 1, παράγραφος 2.

Πχ $X=\{0,1\}$, $\mu(\{\underset{\sim}{x}\in X / x_1=0, x_2=0, x_3=1, x_4=0\}) =$
$= p_0 \cdot p_0 \cdot p_1 \cdot p_0 = p_0^3 \cdot p_1$

Πρόταση Το $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ είναι σ.δ.μ

απόδειξη $P = \{\{\underset{\sim}{x}\in X / x_1=s_1, \dots, x_n=s_n\} / s_1,\dots,s_n\in S, n\in\mathbb{N}\}\cup\{\emptyset\}$
είναι π-σύστημα και εξ ορισμού $\sigma(P)=\mathcal{B}$
αρκεί νδο το shift διατηρεί τα μέτρα τέτοιων συνόλων.
$\mu(T^{-1}\{\underset{\sim}{x}\in X / x_1=s_1,\dots,x_n=s_n\}) = \mu(\bigcup_{s\in S}\{\underset{\sim}{x}\in X / x_1=s, x_2=s_1,\dots,x_{n+1}=s_n\})$

$= \sum_{s\in S} p_s\cdot p_{s_1}\cdot p_{s_2}\cdots p_{s_n} = p_{s_1} p_{s_2}\cdots p_{s_n} = \mu(\{\underset{\sim}{x}\in X / x_1=s_1,\dots,x_n=s_n\})$

(ii) **Αμφίπλευρο Bernoulli shift**, S πεπερασμένο σύνολο.
$X = S^{\mathbb{Z}} = \{\underset{\sim}{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} / x_n\in S \ \forall n\in\mathbb{Z}\}$
$\mathcal{B} = \sigma\left(\{\underset{\sim}{x}\in X / x_{m+1}=s_1, x_{m+2}=s_2,\dots, x_{m+n}=s_n\}, \begin{matrix} m\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{N} \\ s_1,\dots,s_n\in S\end{matrix}\right)$

$= \sigma(\Pi_n / n\in\mathbb{Z})$
Δοθέντος $(p_s)_{s\in S}$ με $p_s \geq 0$ $\forall s\in S$, $\sum_{s\in S} p_s$ $\Rightarrow$ υπάρχει μοναδικό

μέτρο μ στο $(X,\mathcal{B})$ τ.ω. $\mu(\{\underset{\sim}{x}\in X / x_{m+1}=s_1,\dots, x_{m+n}=s_n\}) =$
$= p_{s_1} p_{s_2} \cdots p_{s_n}$.
Το shift $T(\dots, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots) = (\dots, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots)$
$(T\underset{\sim}{x})_n = x_{n+1}$
Η T διατηρεί οποιοδήποτε τέτοιο μ. Αυτά τα συστήματα είναι αντιστρέψιμα.

Παρένθεση X ίδιο, T ίδιο, $\mathcal{B} = \sigma\left(\{\underset{\sim}{x}\in X / x_0=s_0, x_1=s_1,\dots, x_n=s_n\}, \ s_0, s_1,\dots,s_n\in S, \ n\in\mathbb{N}\cup\{0\}\right)$

Είναι ένα παράδειγμα με την T αντιστρέψιμη σαν απεικόνιση αλλά T^{-1} όχι μετρήσιμη.

S πεπερασμένο σύνολο $\boxed{\text{μάθημα } 3^o \quad 8/10/18}$

$X = S^{\mathbb{N}} = \{ \underset{\sim}{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \ / x_n \in S \ \forall n \in \mathbb{N} \}$

$\mathcal{B} = \sigma(\{ \underset{\sim}{x} \in X \ / \ x_1 = s_1, \dots, x_n = s_n \} \ n \in \mathbb{N}, s_1, \dots, s_n \in S)$

$= \sigma(\Pi_n / n \in \mathbb{N})$

$\Pi_n(x_1, x_2, \dots, \dots) = x_n$

$T: X \to X$ shift

$(T(\underset{\sim}{x}))_n = x_{n+1}, \ n \in \mathbb{N}$

Θεωρούμε $P = (P_{ij})_{i,j \in S}$ στοχαστικός πίνακας, δηλ. $P_{ij} \geq 0 \ \forall i,j \in S$

$\sum_{j\in S} P_{ij} = 1 \ \forall i \in S$

Θεωρούμε ένα διάνυσμα πιθανότητας $p = (p_s)_{s\in S}$ το οποίο είναι αριστερό ιδιοδιάνυσμα για τον P για την ιδιοτιμή 1 δηλ.

$p_s \geq 0 \ \forall s \in S$, $\sum_{s\in S} p_s = 1$, $\circledast \sum_{i\in S} p_i P_{ij} = p_j \ \forall j \in S$ $\left(\text{δηλαδή } (p_1, \dots, p_n) P = (p_1, \dots, p_n) \right)$

Ένα τέτοιο διάνυσμα p για τα P πάντα υπάρχει από το Θεώρημα Perron - Frobenius

Πρόταση Υπάρχει ένα μοναδικό μέτρο πιθανότητας στον μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{B})$ τ.ω. $\mu(\{ \underset{\sim}{x} \in X \ / x_1 = s_1, \dots, x_n = s_n \}) =$

$= p_{s_1} P_{s_1 s_2} P_{s_2 s_3} \cdots P_{s_n s_{n+1}} \ \forall s_1, \dots, s_n \in S, \ \forall n \in \mathbb{N}$

απόδειξη ίδια με αυτήν για Bernoulli shifts (Billingsley 2 κεφ. Probability & Methods)

Πρόταση $\forall P, p$ όπως πιο πάνω το $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ είναι σ.δ.μ

απόδειξη Για τυχόν T, $n \in \mathbb{N}$, $s_1, \dots, s_n \in S$ $\mu(T^{-1}(\{ \underset{\sim}{x} \in X / x_1 = s_1, \dots, x_n = s_n \}))$

$= \mu(\{ \underset{\sim}{x} \in X / x_2 = s_1, x_3 = s_2, \dots, x_{n+1} = s_n \}) =$

$= \sum_{s\in S} \mu(\{ \underset{\sim}{x} \in X / x_1 = s, x_2 = s_1, \dots, x_{n+1} = s_n \}) =$

$= \sum_{s\in S} p_s P_{s s_1} P_{s_1 s_2} \cdots P_{s_{n-1} s_n} \overset{\circledast}{=} p_{s_1} P_{s_1 s_2} \cdots P_{s_{n-1} s_n} =$

$= \mu(\{ \underset{\sim}{x} \in X / x_1 = s_1, \dots, x_n = s_n \})$. Άρα ο T διατηρεί το μ.

Παρατηρήσεις

1) Ορίζεται ανάλογα το αμφίπλευρο Markov shift.
2) Ειδική περίπτωση όπου ο P έχει όλες τις γραμμές ίδιες, τότε παίρνουμε το Bernoulli shift. Πράγματι, αν $P_{ij} := P_j$ $\forall i, j \in S$ τότε το $p_j := P_j$, $j \in S$ είναι το μοναδικό αριστερό ιδιοδιάνυσμα που είναι διάνυσμα πιθανότητας και το μ είναι το Bernoulli shift που αντιστοιχεί σε αυτό το διάνυσμα.

Θεώρημα Επαναφοράς Poincaré

Θεώρημα επαναφοράς 1

Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ ένα σ.δ.μ. και έστω $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) > 0$. Τότε $\exists n \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\mu(A \cap T^{-n}(A)) > 0$. Μάλιστα μπορεί να διαλεξει κανείς n με $\mu(A \cap T^{-n}(A)) > 0$ και $n \leq \left[\frac{1}{\mu(A)}\right]$

__απόδειξη__ Έστω ότι $A, T^{-1}(A), T^{-2}(A), \dots$ είναι όλα ξένα μεταξύ τους. Τότε $1 = \mu(X) \geq \mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(A)\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(T^{-n}(A)) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A) = +\infty$

άτοπο. Το ίδιο ισχύει και αν $\mu(T^{-n}(A) \cap T^{-m}(A)) = 0$ για όλα τα $n \neq m$. Επομένως πρέπει $\mu(T^{-n}(A) \cap T^{-m}(A)) > 0$ για κάποια n, m $\mathbb{N} \cup \{0\}$ και $n \neq m$

$0 < \mu(T^{-n}(A) \cap T^{-m}(A)) = \mu(T^{-\min\{n,m\}}(A \cap T^{-|n-m|}(A))) = \mu(A \cap T^{-|n-m|}(A))$

Το ίδιο επιχείρημα δίνει ότι $1 = \mu(X) \geq \mu\left(\bigcup_{n=0}^{[1/\mu(A)]} T^{-n}(A)\right) =$
$= \sum_{n=0}^{[1/\mu(A)]} \mu(T^{-n}(A)) = \left(\left[\frac{1}{\mu(A)}\right] + 1\right)\mu(A) > 1$, αν υποθέσουμε ότι ισχύει $\mu(T^{-n}(A) \cap T^{-m}(A)) = 0$ για όλα τα $n, m \in \{0, 1, 2, \dots, \left[\frac{1}{\mu(A)}\right]\}$ με $n \neq m$. Άρα έπεται ότι $\exists n, m \in \{0, 1, \dots, \left[\frac{1}{\mu(A)}\right]\}$ με $n \neq m$ τ.ω. $\mu(T^{-n}(A) \cap T^{-m}(A)) > 0 \iff \mu(A \cap T^{-|n-m|}(A)) > 0$ με $1 \leq |n-m| \leq \left[\frac{1}{\mu(A)}\right]$

Θεώρημα Επαναφοράς Poincaré

Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ ένα σ.δ.μ. και $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) > 0$. Τότε σχεδόν κάθε σημείο του A __επανέρχεται στο A__ άπειρες φορές.

Δηλ για σχεδόν κάθε $x \in A$ $\exists n_1 < n_2 < \dots$ τ.ω. $T^{n_k}(x) \in A$ $\forall k \in \mathbb{N}$

Παρατηρήσεις

1) Το αποτέλεσμα δεν ισχύει όταν $\mu(X)=+\infty$

αντιπαράδειγμα $X=\mathbb{Z}$, $\mathcal{A}=P(\mathbb{Z})$, $\mu(\{x\})=1$, $\forall x\in\mathbb{Z}$. $T(x)=x+1$, $\forall x\in\mathbb{Z}$

Η T διατηρεί το μ. Για $A=\{0\}$, έχουμε $\mu(A)>0$

$\bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}A=\{-1,-2,\dots\}$ δηλ κανένα στοιχείο του A δεν επιστρέφει στο A

2) Το αποτέλεσμα δεν ισχύει αν ο T δεν διατηρεί το μ.

αντιπαράδειγμα

$X=[0,1]$, $T(x)=x^2$, $\mu=$ Lebesgue, $\mathcal{A}=\mathcal{B}([0,1])$

$T^n(x)=x^{2^n}\to 0$ $\forall x\in[0,1)$. Άρα αυτά τα σημεία δεν επανέρχονται. π.χ. $(a,b)\subset[0,1]$ και $a<b<\sqrt{a}$ τότε

$T^{-n}(a,b)=(a^{2^{-n}},b^{2^{-n}})$ είναι όλα ξένα μεταξύ τους και ξένα από το (a,b)

απόδειξη θεωρήματος Poincaré

Πρώτα θα δείξουμε ότι μ-σχεδόν κάθε $x\in A$ επανέρχεται στο A τουλάχιστον μια φορά. Δηλ. $\mu\left(A\cap\bigcup_{n=1}^{\infty}T^{-n}(A)\right)=\mu(A)$

Έστω $B=A\cap\bigcap_{n=1}^{\infty}T^{-n}(A^c)$. Παρατηρούμε ότι τα $B, T^{-1}(B), T^{-2}(B),\dots$ είναι ξένα ανά δύο

αν $n\neq m$, $T^{-n}(B)\cap T^{-m}(B)=T^{-\min\{n,m\}}\left(B\cap T^{-|n-m|}(B)\right)$ και άρα αρκεί ν.δ.ο. όλα τα $B\cap T^{-k}(B)$ είναι κενά $k\in\mathbb{N}$.

$x\in T^{-k}(B)=T^{-k}(A)\cap T^{-(k+1)}(A^c)\cap T^{-(k+2)}(A^c)\cap\dots$

δηλ $x\in T^{-k}(B)\Rightarrow T^{k}(x)\in A$ με $k\geq 1$ και άρα $x\notin B$

Αφού $B, T^{-1}(B), T^{-2}(B),\dots$ ξένα συμπεραίνουμε ότι $1=\mu(X)\geq\mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty}T^{-n}(B)\right)=$

$=\sum_{n=0}^{\infty}\mu(T^{-n}(B))=\sum_{n=0}^{\infty}\mu(B)$

Άρα πρέπει $\mu(B)=0$.

άρα $\mu(A)=\mu\left(A\cap\bigcup_{n=1}^{\infty}T^{-n}(A)\right)+\mu\left(\underbrace{A\cap\bigcap_{n=1}^{\infty}T^{-n}(A^c)}_{B \text{ και } \mu(B)=0}\right)$

Για να πάρουμε άπειρες επαναφορές εφαρμόζουμε το παραπάνω στους T^k, $k\in\mathbb{N}$. κάθε $(X,\mathcal{A},\mu,T^k)$ είναι σ.δ.μ.

$\forall k \in \mathbb{N}$, το σύνολο $A_k = A \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-k\cdot n}(A)$ έχει μέτρο $\mu(A_k) = \mu(A)$.

Άρα και $\mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \mu(A)$. Πράγματι, $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \subseteq A$ και

$$\mu\left(A \setminus \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \mu\left(A \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k^c\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu\left(A \cap A_k^c\right) = 0$$

$\forall x \in A_\infty := \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ έχουμε το εξής: $\forall k \in \mathbb{N}\ \exists m_k \in \mathbb{N}$ τω. $T^{k\cdot m_k}(x) \in A$

Για $k=1$ $\exists m_1$ τ.ω. $T^{m_1}(x) \in A$. Θέτουμε $n_1 = m_1$. Για $k > n_1$ υπάρχει m_k τω. $T^{km_k}(x) \in A$ και θέτουμε $n_2 = km_k$.

Τότε $T^{n_2}(x) \in A$ και $n_2 \geq k > n_1$. Επαγωγικά βρίσκουμε $n_1 < n_2 < \dots$ τω. $T^{n_k}(x) \in A$ $\forall k \in \mathbb{N}$

Εφαρμογή 1 $\forall a \in \mathbb{R}$ και $\forall \varepsilon > 0$ η ακολουθία $(na)_{n\in\mathbb{N}}$ βρίσκεται ε κοντά σε ακέραιο για άπειρα n.

απόδειξη Θεωρούμε το σύστημα $X = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$, $\mu =$ Lebesgue, $T_a(x+\mathbb{Z}) = x + a + \mathbb{Z}$

$T_a^n(x+\mathbb{Z}) = x + na + \mathbb{Z}$

Έστω $A = \{x + \mathbb{Z} \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} \mid d_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}(x+\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) < \varepsilon/2\}$ Τότε:

$\mu(A) = \varepsilon > 0$ Από Θεώρημα Poincaré για σχεδόν κάθε $x + \mathbb{Z} \in A$ $\exists n_1 < n_2 < \dots$ τ.ω. $T_a^{n_k}(x+\mathbb{Z}) \in A$ $\forall k \in \mathbb{N}$.

$= x + n_k a + \mathbb{Z} \in A$ $\forall k \in \mathbb{N}$

$$d_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}(x + n_k a + \mathbb{Z}, \mathbb{Z}) < \varepsilon/2 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$= \min_{m \in \mathbb{Z}} |x + n_k a + m| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Επίσης $d_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}(x + n_k a + \mathbb{Z}, n_k a + \mathbb{Z}) = \min_{m \in \mathbb{Z}} |x + n_k a - n_k a + m| =$
$= d_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}(x + \mathbb{Z}, \mathbb{Z}) < \varepsilon$

Από τριγωνική ανισότητα $d_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}(n_k a + \mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \leq$
$\leq d_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}(n_k a + \mathbb{Z}, n_k a + x + \mathbb{Z}) + d_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}(x + n_k a + \mathbb{Z}, \mathbb{Z}) < \varepsilon$

άρα $\min_{m} |n_k a + m| < \varepsilon$ $\forall k \in \mathbb{N}$

Για την 2η εφαρμογή, θα χρειαστούμε την εξής έννοια:

Ορισμός Στρεβλό σύστημα (skew)

Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ ένα σδμ. Έστω $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ είναι χώρος πιθανότητας και $S: X\times Y \to Y$ μετρήσιμη $\mathcal{A}\times\mathcal{B} \to \mathcal{B}$ με την ιδιότητα $(S_x)_* \nu = \nu \ \forall x \in X$ όπου $S_x: Y\to Y$ με $S_x(y)=S(x,y)$

Το σύστημα $(X\times Y, \mathcal{A}\times\mathcal{B}, \mu\times\nu, \tau)$ όπου $\tau(x,y) = (T(x), S(x,y))$ είναι ένα σύστημα που διατηρεί το μέτρο και λέγεται στρεβλό γινόμενο

απόδειξη άσκηση

Εφαρμογή 2 $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall \varepsilon>0$ η ακολουθία $(\beta n + n^2\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ε-κοντά σε ακέραιο για άπειρους δείκτες n για σχεδόν κάθε β

Έστω $X=Y=\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $\mathcal{A}=\mathcal{B}=$ Borel $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$, $\mu=\nu$ - Lebesgue

$T_a: X\to X$, $T_a(x+\mathbb{Z}) = x+a+\mathbb{Z}$,

$S: X\times Y\to Y$, $S((x,y)+\mathbb{Z}^2) = x+y+\mathbb{Z}$

$\tau_a((x,y)+\mathbb{Z}^2) = (x+a+\mathbb{Z}, x+y+\mathbb{Z}) \boxed{= ((x+a, x+y)+\mathbb{Z}^2)}$

$\tau_a^2((x,y)+\mathbb{Z}^2) = (x+2\cdot a+\mathbb{Z}, y+2x+a+\mathbb{Z})$

Έστω $T^n((x,y)+\mathbb{Z}^2) = (x_n,y_n)+\mathbb{Z}^2$

$x_{n+1} = x_n + a$ $\quad y_{n+1} = y_n + x_n$ $\quad \forall n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ όπου $x_0=x$, $y_0=y$

$\sum_i^n x_i = \sum_1^n (x_{n-1}+a) = \sum_{i=0}^{n-1} x_n + n\cdot a \Rightarrow x_n = x_0 + n\cdot a \Rightarrow$

$\Rightarrow x_n = x + n a$

$\sum_1^n y_i = \sum_0^{n-1} y_i + \sum_0^{n-1} x_i \Rightarrow y_n = y_0 + \sum_1^{n-1} x_i + x_0 \Rightarrow y_n = y + \left(\sum_0^{n-2} x_i + na\right) + x$

επαγωγικά

$\Rightarrow y_n = y + nx + \frac{n(n-1)}{2} a$

άρα $\tau_a^n((x,y)+\mathbb{Z}^2) = (x+na+\mathbb{Z},\ y+n(x-\frac{a}{2}) + \frac{n^2}{2}a + \mathbb{Z})$

Παίρνω $a = 2\alpha$. $\tau_a^n((x,y)+\mathbb{Z}^2) = (x+2n\alpha+\mathbb{Z},\ y+n(x-\alpha)+n^2\alpha+\mathbb{Z})$

$A = \{(x,y)+\mathbb{Z}^2 \,/\, d_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}(y+\mathbb{Z},\mathbb{Z}) < \varepsilon/2\}$

$B = \{(x,y)+\mathbb{Z}^2 \in A \,/\, \tau^n((x,y)+\mathbb{Z}^2)\in A$ για άπειρα $n\}$

$\lambda_{\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2}(B) = \lambda_{\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2}(A) = \varepsilon > 0$

$\varepsilon = \lambda_{\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2}(B) = \int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} 1_B((x,y)+\mathbb{Z}^2)\, d\lambda(x+\mathbb{Z})\, d\lambda(y+\mathbb{Z}) =$

$= \int_{y+\mathbb{Z}\in(-\frac{\varepsilon}{2},\frac{\varepsilon}{2})} \lambda_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}(\{x+\mathbb{Z} \,/\, (x,y)+\mathbb{Z}^2\in B\})\, d\lambda(y+\mathbb{Z})$

Συμπεραίνουμε ότι για σχεδόν κάθε $y+\mathbb{Z}$ τ.ω. $d(y+\mathbb{Z},\mathbb{Z})<\varepsilon/2$

$\lambda_{\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}}(\{x+\mathbb{Z} \,/\, (x,y)+\mathbb{Z}^2 \in B\}) = 1$

Επιλέγουμε ένα τέτοιο $y+\mathbb{Z}$. Για σχεδόν κάθε $x\in\mathbb{Z}$:
$\tau^n((x,y)+\mathbb{Z}^2) \in A$ για άπειρα n.
$(x+2na+\mathbb{Z},\ y+(x-a)n+n^2a+\mathbb{Z}) \in A$ για άπειρα n.
δηλ $\min_{m\in\mathbb{Z}} |y+(x-a)n+n^2a+m| < \varepsilon/2$ για άπειρα n.

Έπεται από τριγωνική ανισότητα ότι $\min|(x-a)n+n^2a+m| < \varepsilon$ για άπειρα n

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2°
ΕΡΓΟΔΙΚΟΤΗΤΑ

μάθημα 4°
10/10/18

Προέρχεται από τη Φυσική.
N σωματίδια, κάθε σωματίδιο περιγράφεται από διάνυσμα στον $\mathbb{R}^6 \sim \underbrace{\text{θέση}}_{\mathbb{R}^3} + \underbrace{\text{ορμή}}_{\mathbb{R}^3}$

Μια κατάσταση του συστήματος είναι ένα σημείο x στον $\mathbb{R}^{6N}$ $X \subseteq \mathbb{R}^{N}$ χώρος καταστάσεων. Το σύστημα αν βρίσκεται στην αρχική κατάσταση x σε χρόνο 1, βρίσκεται στην κατάσταση $T(x)$ σε χρόνο 2 στη θέση $T(T(x)) = T^2(x)$ κ.ο.κ

Αν μ μέτρο πιθανότητας: $\mu(A)$ είναι η πιθανότητα το σύστημα να βρίσκεται σε μια κατάσταση $x\in A$. Η διατήρηση του μέτρου μ από την T σημαίνει ότι θεωρούμε ότι το σύστημα είναι σε ισορροπία, δηλαδή αν το σύστημα έχει κάποια πιθανότητα $\mu(A)$ να βρίσκεται σε κατάσταση στο A την χρονική στιγμή n έχει την ίδια πιθανότητα να βρίσκεται σε κατάσταση στο A τη στιγμή $n+1$. Τα παρατηρήσιμα μεγέθη του συστήματος αντιστοιχούν σε συναρτήσεις $f: X \to \mathbb{R}$
π.χ. $f(x)$ = θερμοκρασία συστήματος στην κατάσταση x

Εργοδική Υπόθεση Boltzman

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(T^i(x)) \to \int_X f(x)\, d\mu(x)$$

A	
$T^{-1}(A) = A$	$T^{-1}(A^c) = A^c$

Έστω ότι $T^{-1}(A) = A$ για κάποιο σύνολο A θετικού μέτρου. Τότε αν ξεκινήσουμε από μια κατάσταση $x\in A$, το αριστερό μέλος θα εξαρτάται μόνο από τις τιμές της f στο A, ενώ το δεξί μέλος εξαρτάται από όλες τις τιμές της f και άρα δεν μπορώ εν γένει να έχω ισότητα. π.χ. $f = \mathbb{1}_A$

$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

Ορισμοί Εστω $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ σ.δ.μ.

(1) Ενα $A \in \mathcal{A}$ λέγεται <u>αναλλοίωτο</u> αν $A = T^{-1}(A)$ και λέγεται <u>μ-σχεδόν αναλλοίωτο</u> (αναλλοίωτο mod μ) αν $\mu(A \Delta T^{-1}(A)) = 0$

(2) Μια συνάρτηση $f : X \to \mathbb{C}$ λέγεται <u>αναλλοίωτη</u> αν $f = f \circ T$ και λέγεται <u>μ-σχεδόν αναλλοίωτη</u> αν $f = f \circ T$ μ - σ.π.

Ορισμός Ενα σ.δ.μ. $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ λέγεται <u>εργοδικό</u> αν καθε αναλλοίωτο σύνολο εχει μέτρο 0 ή 1, δηλ. $A \in \mathcal{A}$ και $A = T^{-1}(A) \Rightarrow \mu(A) \in \{0, 1\}$.

Παρατηρήσεις (1) $T^{-1}(A \Delta B) = T^{-1}(A) \Delta T^{-1}(B)$

πράγματι, $T^{-1}(A \Delta B) = T^{-1}(A \cap B^c) \cup T^{-1}(A^c \cap B) =$

$= (T^{-1}(A) \cap T^{-1}(B^c)) \cup (T^{-1}(A^c) \cap T^{-1}(B)) = (T^{-1}(A) \cap (T^{-1}(B))^c) \cup ((T^{-1}(A))^c \cap T^{-1}(B))$

$= T^{-1}(A) \Delta T^{-1}(B)$

(2) $|\mu(A) - \mu(B)| \leq \mu(A \Delta B)$, $\forall A, B \in \mathcal{A}$.

πράγματι, $A \Delta B = A \cup B \setminus A \cap B. \Rightarrow \mu(A \Delta B) = \mu(A \cup B) - \mu(A \cap B)$

$|\mu(A) - \mu(B)| = \max\{\mu(A), \mu(B)\} - \min\{\mu(A), \mu(B)\} \leq$

$\leq \mu(A \cup B) - \mu(A \cap B) = \mu(A \Delta B)$

Πρόταση Εστω $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ ενα σ.δ.μ. Τα εξής ειναι ισοδύναμα:

(1) Το σύστημα είναι εργοδικό

(2) Αν $A \in \mathcal{A}$ μ-σχεδόν αναλλοίωτο, τοτε $\mu(A) \in \{0, 1\}$

(3) Αν $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) > 0$ εχουμε $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(A)\right) = 1$

(4) Αν $A, B \in \mathcal{A}$ είναι τ.μ. $\mu(A)\mu(B) > 0$ τοτε υπαρχει $n \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\mu(A \cap T^{-n}(B)) > 0$

<u>απόδειξη</u>

(1) $\Rightarrow$ (2). Εστω $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A \Delta T^{-1}(A)) = 0$ Θα βρουμε συνολο A_∞ τ.ω. $\mu(A \Delta A_\infty) = 0$ και $T^{-1}(A_\infty) = A_\infty$

Ορίζουμε $A_m = \bigcup_{n \geq m} T^{-n}(A)$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ και θέτουμε $A_\infty = \bigcap_{m=1}^{\infty} A_m =$

$= \limsup_n T^{-n}(A)$. Δηλαδή A_∞ είναι τα $x \in X$ που επισκεπτονται το A απειρες φορές

$x \in A_\infty \Leftrightarrow T^n(x) \in A$ για απειρα $n \Leftrightarrow \exists n_1 < n_2 < \dots$ τ.ω. $T^{n_k}(x) \in A$

$\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists\, m_1 < m_2 < \dots$ τ.ω. $T^{m_n}(T(x)) \in A \quad \forall n \in \mathbb{N}$

άλλος τρόπος: $T^{-1}(A_m) = A_{m+1} \quad \forall m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$T^{-1}(A_\infty) = \bigcap_{m=1}^{\infty} A_m \subseteq A_\infty$

Επειδή $A_m \supseteq A_{m+1} \;\forall m$ έχουμε τελικά ότι $\bigcap_{m=1}^{\infty} A_m = \bigcap_{m=0} A_m = A_\infty$

Τώρα αποδεικνύουμε ότι $\mu(A_\infty \Delta A) = 0$.

<u>Ισχυρισμός 1</u>: $A \Delta T^{-n}(A) \subseteq \bigcup_{k=0}^{n-1} T^{-k}(A) \Delta T^{-(k+1)}(A)$.

<u>απόδειξη</u>: Αν $x \in A \Delta T^{-n}(A)$ τότε $\underbrace{(x \in A \text{ και } x \notin T^{-n}(A))}_{1^{\eta} \text{ περίπτωση}}$ ή $\underbrace{(x \in A^c \text{ και } x \in T^{-n}(A))}_{2^{\eta} \text{ περίπτωση}}$

Στην 1^{η} περίπτωση: ορίζουμε k να είναι ο μικρότερος μη αρνητικός ακέραιος τ.ω. $T^k(x) \in A$ και $T^{k+1}(x) \notin A$. Τέτοιο k υπάρχει και $0 \le k \le n$ και τότε $x \in T^{-k}(A) \cap T^{-(k+1)}(A^c) \subseteq T^{-k}(A) \Delta T^{-(k+1)}(A)$.

Στην 2^{η} περίπτωση: ορίζουμε k να είναι ο μικρότερος μη αρνητικός ακέραιος τ.ω. $T^k(x) \notin A$ και $T^{(k+1)}(x) \in A$. Τέτοιο k υπάρχει και είναι $0 \le k \le n$ και τότε $x \in T^{-k}(A^c) \cap T^{-(k+1)}(A) \subseteq$
$\subseteq T^{-k}(A) \Delta T^{-(k+1)}(A)$.

<u>πόρισμα ισχυρισμού 1</u>: $\mu(A \Delta T^{-n}(A)) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

πράγματι, $\mu(A \Delta T^{-n}(A)) \le \sum_{k=0}^{n-1} \mu(T^{-k}(A) \Delta T^{-(k+1)}(A)) =$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \mu(T^{-k}(A \Delta T^{-1}(A))) = n \cdot \mu(A \Delta T^{-1}(A)) \overset{A\ \mu\text{-σχεδόν αναλλοίωτο}}{=} n \cdot 0 = 0$$

Άρα $\mu(A \Delta T^{-n}(A)) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

<u>Ισχυρισμός 2</u>: $A \Delta A_m \subseteq \bigcup_{n \ge m} (A \Delta T^{-n}(A))$

<u>απόδειξη</u>: $A \Delta A_m = (A^c \cap A_m) \cup (A \cap A_m^c)$

$A^c \cap A_m = A^c \cap \bigcup_{n \ge m} T^{-n}(A) = \bigcup_{n \ge m} A^c \cap T^{-n}(A) \subseteq \bigcup_{n \ge m} (A \Delta T^{-n}(A))$

$A \cap A_m^c = A \cap \bigcap_{n \ge m} T^{-n}(A^c) \subseteq A \cap T^{-n}(A^c) \quad \forall n \ge m \subseteq A \Delta T^{-n}(A^c) \quad \forall n \ge m$

$\subseteq \bigcup_{n \geq m} A \triangle T^{-n}(A^c)$

Πορισμα ισχυρισμού 2

$\mu(A \triangle A_m) \leq \sum_{n \geq m} \mu(A \triangle T^{-n}(A)) = 0 \Rightarrow \mu(A \triangle A_m) = 0$

$A_m \downarrow A_\infty \Rightarrow A_m \cap A^c \downarrow A_\infty \cap A^c \Rightarrow \mu(A_m \cap A^c) \to \mu(A_\infty \cap A^c)$

$A_m \downarrow A_\infty \Rightarrow A_m^c \uparrow A_\infty^c \Rightarrow A_m^c \cap A \uparrow A_\infty^c \cap A \Rightarrow \mu(A_m^c \cap A) \to \mu(A_\infty^c \cap A)$

$\mu(A \triangle A_m) = \mu(A_m \cap A^c) + \mu(A_m^c \cap A) \to \mu(A_\infty \cap A^c) + \mu(A_\infty^c \cap A) =$
$= \mu(A \triangle A_\infty)$ Επεται οτι $\mu(A \triangle A_\infty) = 0$

Εχουμε $A_\infty = T^{-1}(A_\infty)$ και αρα $\mu(A_\infty) \in \{0,1\}$. Επισης $\mu(A \triangle A_\infty) = 0$
αρα $\mu(A) \in \{0,1\}$

(2) ⇒ (3). Εστω $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) > 0$. Οριζουμε $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(A)$
Εχουμε οτι $T^{-1}(B) = \bigcup_{n=2}^{\infty} T^{-n}(B) \subseteq B$.

Επισης $\mu(T^{-1}(B) \triangle B) = \mu(B \setminus T^{-1}(B)) = \mu(B) - \mu(T^{-1}(B)) = 0$
Επομενως απο (2) $\mu(B) \in \{0,1\}$. Ομως $\mu(B) \geq \mu(T^{-1}(A)) = \mu(A) > 0$.
Αρα $\mu(B) = 1$.

(3) ⇒ (4): Εστω $A, B \in \mathcal{A}$ με $\mu(A)\mu(B) > 0$. Απο (3) $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(B)\right) = 1$
Επεται οτι $\mu\left(A \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(B)\right) = \mu(A)$

$\mu\left(A \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(B)\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap T^{-n}(B))\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A \cap T^{-n}(B))$

Δηλ. $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A \cap T^{-n}(B)) \geq \mu(A) > 0$. Αρα $\exists n$ τ.ω. $\mu(A \cap T^{-n}(B)) > 0$.

(4) → (1). Εστω $A \in \mathcal{A}$ τ.ω. $A = T^{-1}(A)$. Τότε $A = T^{-n}(A)$ $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$
Απο το (4) $\left(\begin{matrix}\text{βαζω οπου } A \text{ το } A^c \\ \text{και οπου } B \text{ το } A\end{matrix}\right)$ Εχουμε οτι $\mu(T^{-n}(A) \cap A^c) > 0$ για καποιο n
$\Leftrightarrow \mu(A)\mu(A^c) > 0$. Αν υποθεσουμε οτι $\mu(A) > 0$ και $\mu(A^c) > 0$ δηλ $\mu(A) < 1$
τοτε εχουμε ατοπο. Επεται οτι $\mu(A) \in \{0,1\}$.

Παρατηρήσεις

1) Δείξαμε ότι αν $T^{-1}(A) \subseteq A$ τότε $\mu(A \triangle T^{-1}(A)) = 0$ δηλ A είναι μ-σχεδόν αναλλοίωτο. Ισχύει επίσης ότι αν $A \subseteq T^{-1}(A)$ τότε πάλι $\mu(A \triangle T^{-1}(A)) = 0$.

2) Το (3) της πρότασης μπορεί να γίνει πιο ισχυρό. Αν το σύστημα είναι εργοδικό και $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) > 0$ τότε $\mu\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n \geq m} T^{-n}(A)\right) = 1$

απόδειξη

$A_m = \bigcup_{n=m}^{\infty} T^{-n}(A)$, $m \in \mathbb{N}$. Τότε $T^{-1}(A_m) = A_{m+1} \subseteq A_m$.

από την προηγούμενη παρατήρηση το A_m είναι σχεδόν αναλλοίωτο και από εργοδικότητα έχει μέτρο 0 ή 1. Όμως $\mu(A_m) \geq \mu(T^{-m}(A)) = \mu(A) > 0$ άρα $\mu(A_m) = 1$ $\forall m$. Άρα $\mu\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} A_m\right) = 1$

πρόταση

Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ σδμ

(1) Αν το σύστημα είναι εργοδικό, τότε κάθε μ-σχεδόν αναλλοίωτη συνάρτηση είναι σταθερή σχεδόν παντού.

(2) Αν ισχύει ότι κάθε μ-σχεδόν αναλλοίωτη $f \in L^{\infty}(X, \mathcal{A}, \mu)$ είναι σταθερή σχεδόν παντού τότε το σύστημα είναι εργοδικό.

απόδειξη (2) Παίρνουμε $f = \mathbb{1}_A$ για $A \in \mathcal{A}$ αναλλοίωτο. Τότε:

$f \circ T = \mathbb{1}_A \circ T = \mathbb{1}_{T^{-1}(A)} = \mathbb{1}_A = f$ Άρα η f σταθερή σπ άρα $f = 1$ σ.π. ή $f = 0$ σ.π. Άρα $\mu(A) = 1$ ή $\mu(A) = 0$. Άρα κάθε αναλλοίωτο σύνολο έχει μέτρο 0 ή 1 και άρα το σύστημα είναι εργοδικό.

(1) Έστω ότι το σύστημα είναι εργοδικό και έστω f μια μετρήσιμη μ-σχεδόν αναλλοίωτη συνάρτηση. Θεωρώντας πραγματικά και φανταστικά μέρη βλέπουμε ότι αρκεί να θεωρήσουμε μόνο πραγματικές συναρτήσεις.

Έστω $f: X \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη τ.ω. $f = f \circ T$ μ-σ.π. Ορίζουμε το

$F_t = \{x \in X \mid f(x) \leq t\} = f^{-1}((-\infty, t])$ για $t \in \mathbb{R}$

τότε $\mu(F_t \triangle T^{-1}(F_t)) = 0$. Άρα F_t μ-σχεδόν αναλλοίωτο $\xRightarrow{\text{Προηγούμενη πρόταση}} \mu(F_t) \in \{0, 1\}$ $\forall t$

Πράγματι, $F_t \triangle T^{-1}(F_t) \subseteq \{x \in X \mid f(x) \neq f(Tx)\}$

Η $t \mapsto \mu(F_t)$ είναι αύξουσα και συνεχής από δεξιά.

Ορίζουμε $c = \sup\{t \in \mathbb{R} \mid \mu(F_t) = 0\}$. Τότε $f(x) \leq c$ μ-σχεδόν παντού

Επειδή $\mu(F_c) = 1$

Επίσης: $\mu(\{x \mid f(x) < c\}) = 0$. Πράγματι $\{x \mid f(x) < c\} = f^{-1}(-\infty, c) =$

$= \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \,/\, f(x) \le c - \frac{1}{n}\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(-\infty, c-\frac{1}{n}]$.

Άρα $\mu(\{x \in X \,/\, f(x) < c\}) = \lim_{n\to\infty} \mu(F_{c-\frac{1}{n}}) = \lim 0 = 0$.

Έπεται ότι $f(x) = c$ μ-σ.π. Πρέπει να δείξουμε επίσης ότι $c \in \mathbb{R}$.
Πράγματι, $\mu(F_n) \to \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n) = \mu(\{x \in X \,/\, f(x) < \infty\}) \overset{\text{εφαρμογή}}{=} 1$

άρα $\mu(F_n) = 1 > 0$ για κάποιο n και τότε $c \le n$.
Όμοια $\mu(F_{-n}) \to 0$. Άρα υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\mu(F_{-n}) < 1$ και
άρα $\mu(F_{-n}) = 0$ και άρα $c \ge -n$.

$\boxed{\text{μάθημα } 5^o \quad 15/10/18}$

<u>Πόρισμα</u> Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ σ.δ.μ και $p \in [1, +\infty]$
Αν κάθε μ-σχεδόν αναλλοίωτη $f \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ είναι
σταθερή μ-σχεδόν παντού, τότε το σύστημα είναι εργοδικό.
<u>απόδειξη</u> Έστω $p \in [1, +\infty]$. Τότε $L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu) \subseteq L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$
επειδή $\mu(X) < \infty$. Έστω $f \in L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$ που είναι μ-σχεδόν αναλλοίωτη.
Τότε $f \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ και από υπόθεση $f =$ σταθερή μ-σχεδόν παντού.
Από προηγούμενη πρόταση το σύστημα είναι εργοδικό.

<u>Πρόταση</u> $\forall f \in L^2(\mathbb{T})$ έχουμε ότι $f \overset{L^2}{=} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) e_n$,

όπου $\hat{f}(n) = \langle f, e_n \rangle = \int_{\mathbb{T}} f(t) e^{-2\pi i n t} dt$, $e_n(t) = e^{2\pi i n t}$, $n \in \mathbb{Z}$

Γενικά, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall f \in L^2(\mathbb{T}^n)$ $f \overset{L^2}{=} \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} \hat{f}(m) e_m$,

όπου $e_m(t) = \exp(2\pi i \langle m, t \rangle)$, $m \in \mathbb{Z}^n$, $t \in \mathbb{T}^n$
και $\hat{f}(m) = \langle f, e_m \rangle = \int_{\mathbb{T}^n} f(t) e^{-2\pi i \langle m, t \rangle} dt$

<u>Παραδείγματα</u>
1) <u>(a) στροφές του κύκλου</u>
$X = \mathbb{T}$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{T})$, $\mu = \lambda_{\mathbb{T}}$, $T(x) = x + a \pmod 1$ (ή $T(z) = e^{2\pi i a} z$
για $z \in S$). Το σύστημα $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ είναι εργοδικό $\Leftrightarrow a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$