$= \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \,/\, f(x) \leq c - \frac{1}{n}\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(-\infty, c-\frac{1}{n}]$

Αρα $\mu(\{x \in X \,/\, f(x) < c\}) = \lim_{n\to\infty} \mu(F_{c-\frac{1}{n}}) = \lim 0 = 0.$

Επεται οτι $f(x) = c$ μ-σ.π. Πρεπει να δειξουμε επισης οτι $c \in \mathbb{R}$

Πραγματι, $\mu(F_n) \to \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n) = \mu(\{x \in X \,/\, f(x) < \infty\}) \overset{\text{εφ. μετρησιμη}}{=} 1$

αρα $\mu(F_n) = 1 > 0$ για καποιο n και τοτε $c \leq n$.

Ομοια $\mu(F_{-n}) \to 0$. Αρα υπαρχει $n \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\mu(F_{-n}) < 1$ και αρα $\mu(F_{-n}) = 0$ και αρα $c \geq -n$.

Πορισμα Εστω $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ σ.δ.μ και $p \in [1, +\infty]$

$\boxed{\text{μαθημα } 5^o \quad 15/10/18}$

Αν καθε μ-σχεδον αναλλοιωτη $f \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ ειναι σταθερη μ-σχεδον παντου, τοτε το συστημα ειναι εργοδικο

αποδειξη Εστω $p \in [1, +\infty]$. Τοτε $L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu) \subseteq L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$

Επειδη $\mu(X) < \infty$, αν εχω $f \in L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$ που ειναι μ-σχεδον αναλλοιωτο τοτε $f \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ και απο υποθεση f = σταθερη μ-σχεδον παντου. Απο προηγουμενη προταση το συστημα ειναι εργοδικο.

Προταση $\forall f \in L^2(\mathbb{T})$ εχουμε οτι $f \overset{L^2}{=} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) e_n$,

οπου $\hat{f}(n) = \langle f, e_n \rangle = \int_{\mathbb{T}} f(t) e^{-2\pi i n t} dt$, $e_n(t) = e^{2\pi i n t}$, $n \in \mathbb{Z}$

Γενικα, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall f \in L^2(\mathbb{T}^n)$ $f \overset{L^2}{=} \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} \hat{f}(m) e_m$,

οπου $e_m(t) = \exp(2\pi i \langle m, t \rangle)$, $m \in \mathbb{Z}^n$, $t \in \mathbb{T}^n$

και $\hat{f}(m) = \langle f, e_m \rangle = \int_{\mathbb{T}^n} f(t) e^{-2\pi \langle m, t\rangle} dt$

Παραδειγματα

1) (α) στροφες του κυκλου

$X = \mathbb{T}$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{T})$, $\mu = \lambda_{\mathbb{T}}$, $T(x) = x + \alpha \pmod 1$ (ή $T(z) = e^{2\pi i \alpha} z$ για $z \in S$). Το συστημα $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ ειναι εργοδικο $\Leftrightarrow$ $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

αποδειξη Εστω πρωτα οτι $\alpha \in \mathbb{Q}$ και εστω $\alpha = \frac{m}{n}$, $(m,n)=1$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$

Τοτε T^n ειναι ο ταυτοτικος. (Αρα T αντιστρεψιμος)

Εστω $B \in \mathcal{A}$ τ.ω. $0 < \mu(B) < \frac{1}{n}$. Οριζουμε $A = B \cup T(B) \cup \dots \cup T^{n-1}(B)$.

$A \in \mathcal{A}$ επειδη η T ειναι αντιστρεψιμη. (Αρα $T^k(B) \in \mathcal{A}$ $\forall k$)

$T(A) = T(B) \cup T^2(B) \cup \dots \cup T^{n-1}(B) \cup T^n(B) = T(B) \cup T^2(B) \cup \dots \cup T^{n-1}(B) \cup B$

$= A \Rightarrow T(A) = A \Rightarrow T^{-1}(T(A)) = T^{-1}(A) \overset{\text{Ταυτοτικη}}{\Longrightarrow} A = T^{-1}(A)$

Αρα A αναλλοιωτο. Ομως $\mu(A) \geq \mu(B) > 0$ και

$\mu(A) \leq \mu(B) + \mu(T(B)) + \dots + \mu(T^{n-1}(B)) = n\mu(B) < 1$.

Επεται οτι ο T δεν ειναι εργοδικος.

<u>2ος τροπος</u> Αν $\alpha \in \mathbb{Q}$, οριζουμε $f(t) = e^{2\pi i (t + T(t) + T^2(t) + \dots + T^{n-1}(t))}$

$= e^{2\pi i (tn + \alpha \frac{n(n-1)}{2})}$

$f \circ T(t) = e^{2\pi i (T(t) + T^2(t) + \dots + T^{n-1}(t) + T^n(t))} = e^{2\pi i (T(t) + T^2(t) + \dots + T^{n-1}(t) + t)} =$

$= f(t)$ Αρα f αναλλοιωτη.

Η f δεν ειναι σταθερη. Πραγματι, $f(0) = e^{2\pi i \frac{m}{n} \frac{n(n-1)}{2}} = \pm 1$ και $f(\frac{1}{2n}) = -f(0)$

Επειδη ειναι και συνεχης, δεν ειναι σταθερη σχεδον παντου. Αρα το συστημα δεν ειναι εργοδικο.

Εστω τωρα $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Εστω $f \in L^2(\mathbb{T})$ με $f = f \circ T$ μ-σ.π.

Τοτε $f \overset{L^2}{=} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e_n$, $e_n(t) = e^{2\pi i n t}$, $n \in \mathbb{Z}$

Τοτε $f \circ T \in L^2(\mathbb{T})$ και $f \circ T \overset{L^2}{=} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f \circ T}(n) e_n$

$f \overset{L^2}{=} f \circ T \Rightarrow \hat{f}(n) = \widehat{f \circ T}(n)$ $\forall n \in \mathbb{Z}$

$\widehat{f \circ T}(n) = \int_{\mathbb{T}} f(T(t)) e^{-2\pi i n t} dt = \int_0^1 \tilde{f}(x+\alpha) e^{-2\pi i n x} dx =$

$= e^{2\pi i n \alpha} \int_0^1 \tilde{f}(x+\alpha) e^{-2\pi i n (x+\alpha)} dx = e^{2\pi i n \alpha} \int_\alpha^{1+\alpha} \tilde{f}(x) e^{-2\pi i n x} dx$

$\overset{\text{εσω α το}}{=} e^{2\pi i n \alpha} \left(\int_\alpha^1 \tilde{f}(x) e^{-2\pi i n x} dx + \int_1^{1+\alpha} \tilde{f}(x) e^{-2\pi i n x} dx \right) \overset{\tilde{f}e_n \text{ περιοδικη με περιοδο } 1}{=}$

$= e^{2\pi i n \alpha} \left(\int_\alpha^1 \tilde{f}(x) e^{-2\pi i n x} dx + \int_0^\alpha \tilde{f}(x) e^{-2\pi i n x} dx \right) = e^{2\pi i n \alpha} \int_0^1 \tilde{f}(x) e^{-2\pi i n x} dx$

$= e^{2\pi i n \alpha} \hat{f}(n)$

Πρεπει $\hat{f}(n) = e^{2\pi i \alpha n} \hat{f}(n)$ $\forall n \in \mathbb{Z} \Rightarrow \hat{f}(n)(1 - e^{2\pi i \alpha n}) = 0$ $\forall n \in \mathbb{Z}$

Επειδη $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $e^{2\pi i \alpha n} \neq 1$ $\forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Αρα πρεπει

$\hat{f}(n)=0 \ \forall n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$. Άρα $f \overset{L^2}{=} \hat{f}(0)$ εο δηλ. η f είναι σταθερή σχεδόν παντού. Από το πόρισμα, το σύστημα είναι εργοδικό.

Εφαρμογή Θεώρημα Kronecker
Έστω $a\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Τότε η ακολουθία $na \pmod 1 = na-[na]$, $n\in\mathbb{N}$ είναι πυκνή στο $[0,1)$. (Ισοδύναμα: $\overline{\{e^{2\pi i na} / n\in\mathbb{N}\cup\{0\}\}} = S^1$)

απόδειξη Θεωρούμε το σ.δ.μ. $(S, \mathcal{B}(S), \lambda_S, T)$, όπου $T(z)=e^{2\pi i a} z$, $z\in S$.

Γνωρίζουμε ότι $a\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \Rightarrow$ το σύστημα είναι εργοδικό.

Έστω $I=U(z_0,\varepsilon)\cap S^1 = \{z\in\mathbb{C} \ / \ |z-z_0|<\varepsilon\}\cap S^1$, όπου $z_0\in S$

Θέτω $U=\{z\in S \ / \ |z-1|<\varepsilon/2\}$, $V=z_0U=\{z\in S \ / \ |z-z_0|<\varepsilon/2\}$

$\lambda_S(U)=\lambda_S(V)=\varepsilon>0$ Άρα υπάρχει $n\in\mathbb{N}$ τ.ω. $\lambda_S(T^{-n}V\cap U)>0$

Άρα υπάρχει $z\in T^{-n}V\cap U$. Τότε $z\in U$ δηλαδή $|z-1|<\varepsilon/2$ και $|e^{2\pi i na}z-z_0|<\varepsilon/2$. Όμως $|e^{2\pi i na}-e^{2\pi i na}z| = |z-1|<\varepsilon/2$. Τότε $|e^{2\pi i na}-z_0| \le |e^{2\pi i na}-e^{2\pi i na}z| + |e^{2\pi i na}z-z_0|<\varepsilon$ άρα $e^{2\pi i na}\in I$.

Δείξαμε ότι $\{e^{2\pi i na} / n\in\mathbb{N}\cup\{0\}\}\cap I\neq\emptyset$ για κάθε ανοικτό διάστημα I άρα το σύνολο $\{e^{2\pi i na} / n\in\mathbb{N}\cup\{0\}\}$ είναι πυκνό.

(β) γενίκευση
Αν G συμπαγής ομάδα και $g\in G$, το σύστημα $(G, \mathcal{B}(G), \lambda_G, T)$ όπου $T(x)=gx$, $x\in G$ είναι εργοδικό ανν $\overline{\{g^n / n\in\mathbb{N}\cup\{0\}\}} = G$ ανν $\chi(g)\neq 1$ για κάθε χαρακτήρα της G εκτός του ταυτοτικά ίσου με ένα. Ειδικότερα για να υπάρχει εργοδική στροφή στην G, η G πρέπει να είναι αβελιανή.

(γ) στροφές του n-τόρου
Έστω $n=2$. $X=\mathbb{T}^2$, $\mathcal{A}=\mathcal{B}(\mathbb{T}^2)$, $\mu=\lambda_{\mathbb{T}^2}$, $T(t,s)=(t+a, s+b) \bmod 1$

Έστω $f\in L^2(\mathbb{T}^2)$ που είναι αναλλοίωτη. $f \overset{L^2}{=} \sum_{(k,m)\in\mathbb{Z}^2} \hat{f}(k,m)e_{k,m}$

όπου $e_{k,m}(t,s)=e^{2\pi i(kt+ms)}$

Θέτω $\tilde{f}(x,y)=f(x-[x], y-[y])$

$$\widehat{f\circ T}(k,m) = \int_{\mathbb{T}^2} f(T(t,s))e^{-2\pi i(kt+ms)}\,d(t,s) =$$

$$= \int_0^1\int_0^1 \tilde{f}(t+a, s+b)\, e^{-2\pi i(kt+ms)}\,dt\,ds =$$

$$= e^{2\pi i(k\alpha+m\beta)} \int_0^1\int_0^1 \tilde{f}(t+\alpha, s+\beta) e^{-2\pi i(k(t+\alpha)+m(s+\beta))} dt\, ds =$$

$$= e^{2\pi i(k\alpha+m\beta)} \hat{f}(k,m).$$

$f \overset{L^2}{=} f\circ T \Rightarrow \hat{f}(k,m) = \widehat{f\circ T}(k,m) \quad \forall (k,m)\in\mathbb{Z}^2 \iff$

$\iff (e^{2\pi i(k\alpha+m\beta)} - 1)\hat{f}(k,m) = 0 \quad \forall (k,m)\in\mathbb{Z}^2$

Αν $e^{2\pi i(k\alpha+m\beta)} \neq 1 \quad \forall (k,m)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}$ τοτε $\hat{f}(k,m)=0$ $\forall (k,m)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}$. Τοτε $f = \hat{f}(0,0)e_{0,0}$ = σταθερή σχεδόν παντού και το σύστημα είναι εργοδικό.

Ικανή συνθήκη για εργοδικότητα: $k\alpha+m\beta \notin \mathbb{Z} \quad \forall (k,m)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}$

$\iff k\alpha+m\beta\in\mathbb{Z}$ με $k,m\in\mathbb{Z} \Rightarrow k=m=0 \iff 1, \alpha, \beta$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα επί του $\mathbb{Q}$.

Για το αντίστροφο, έστω ότι $\exists (k,m)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}$ τ.ω. $e_{k,m}(\alpha,\beta)=1$

Τοτε η $f = e_{k,m}$ είναι αναλλοίωτη ($f\circ T(t,s) = e^{2\pi i(k(t+\alpha)+m(s+\alpha))} =$

$= e^{2\pi i(kt+ms)} e_{k,m}(\alpha,\beta) = e^{2\pi i(kt+ms)} = f(t,s)$)

και η f δεν είναι σταθερή. $f(0,0)=1$, Αν $(k,m)\neq(0,0)$ τοτε $k\neq 0$ ή $m\neq 0$. Εστω $k\neq 0$ $f(\frac{1}{2k}, 0) = -1$

f συνεχής $\Rightarrow f$ δεν είναι σταθερή σχεδόν παντού.

<u>Για γενικό n</u> Η $T(t) = (t_1+\alpha_1, t_2+\alpha_2, \dots, t_n+\alpha_n)(\text{mod } 1)$ $t=(t_1,\dots,t_n)$ είναι εργοδική ανν $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\dots+k_m\alpha_n\in\mathbb{Z}$ με $k_1,\dots,k_n\in\mathbb{Z} \Rightarrow k_1=k_2=\dots=k_m=0$

ή ισοδύναμα $1, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ γραμμικά ανεξάρτητα επί του σώματος $\mathbb{Q}$

2) <u>(α)</u> $X=\mathbb{T}$, $\mathcal{A}=\mathcal{B}(\mathbb{T})$, $\mu=\lambda_{\mathbb{T}}$, $T(x)=2x \text{ mod } 1$.

Το σύστημα $(X,\mathcal{A},\mu,T)$ είναι εργοδικό.

Εστω $f\in L^2(\mathbb{T})$ με $f\overset{L^2}{=} f\circ T$. Γράφουμε $f \overset{L^2}{=} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)e_n$

Πρέπει $\widehat{f\circ T}(n) = \hat{f}(n) \quad \forall n\in\mathbb{Z}$.

$$\widehat{f\circ T}(n) = \int_{\mathbb{T}} f(T(t))e^{-2\pi int}dt = \int_0^1 \tilde{f}(2t)e^{-2\pi int}dt =$$

$$= \int_0^1 \tilde{f}(2t)e^{-2\pi i\frac{n}{2}2t}dt = \frac{1}{2}\int_0^2 \tilde{f}(x)e^{-2\pi i\frac{n}{2}x}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_0^1 \tilde{f}(x)e^{-2\pi i\frac{n}{2}x}dx + \int_1^2 \tilde{f}(x)e^{-2\pi i\frac{n}{2}x}dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_0^1 \tilde{f}(x) e^{-2\pi i \frac{n}{2}x} dx + \int_1^2 \tilde{f}(x-1) e^{-2\pi i \frac{n}{2}(x-1)} \cdot e^{-2\pi i \frac{n}{2}} dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \tilde{f}(x) e^{-2\pi i \frac{n}{2}x} dx \left(1 + e^{-2\pi i \frac{n}{2}}\right) = \begin{cases} \hat{f}\left(\frac{n}{2}\right) &, n \text{ αρτιος} \\ 0 &, n \text{ περιττός} \end{cases} \xRightarrow{f\circ T(n) = f(n)}$$

$$\hat{f}(n) = \begin{cases} \hat{f}\left(\frac{n}{2}\right) &, n \text{ αρτιος} \\ 0, & n \text{ περιττός} \end{cases}$$

Εστω $k \in \mathbb{N}$. Τοτε $\hat{f}(2^m k) = \hat{f}(k)$ $\forall m \in \mathbb{N}\cup\{0\}$.

Τοτε $\sum_{l\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(l)|^2 \geq \sum_{l\in\{2^m k / m\in\mathbb{N}\cup\{0\}\}} |\hat{f}(l)|^2 = \sum_{l\in\{2^m k / m\in\mathbb{N}\cup\{0\}\}} |\hat{f}(k)|^2 = |\hat{f}(k)|^2 \cdot \#\{2^m k / m\in\mathbb{N}\cup\{0\}\}$

Αν $\hat{f}(k) \neq 0$, επειδη $\{2^m k / m\in\mathbb{N}\cup\{0\}\}$ είναι άπειρο, τοτε:

$\|f\|_{L^2}^2 = \sum_{l\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(l)|^2 = +\infty$ ατοπο γιατί $f \in L^2(\mathbb{T})$

Αρα πρεπει $\hat{f}(k) = 0$ οταν $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$. Τοτε η $f = \hat{f}(0)$ μ-σ.π.

(B) Γενίκευση στις πολλες διαστάσεις

$X = \mathbb{T}^n$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{T}^n)$, $\mu = \lambda_{\mathbb{T}^n} = \lambda_{\mathbb{T}} \times \dots \times \lambda_{\mathbb{T}}$

A: $n\times n$ πινακας με $A_{ij} \in \mathbb{Z}$ $\forall i,j$. Τοτε $T(x) = Ax \pmod 1$

είναι καλά ορισμένος ομομορφισμος $T: \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$

Αν $\det(A) \neq 0$ ο T είναι επιμορφισμος και απο γνωστη προταση διατηρεί το μέτρο Haar $\lambda_{\mathbb{T}^n}$. Αρα το $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ ειναι σ.δ.μ.

Προταση $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ εργοδικό ανν ο A δεν εχει για ιδιοτιμη των καποια ρίζα της μονάδας.

αποδειξη ($\Leftarrow$) Εστω $f \in L^2(\mathbb{T}^n)$ τ.ω. $f = f\circ T$ μ-σ.π.

Τοτε $f \stackrel{L^2}{=} \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} \hat{f}(m) e_m$, $e_m(t) = e^{2\pi i \langle m, t\rangle}$, $m \in \mathbb{Z}^n$, $t \in [0,1)^n$

μαθημα 6 17/10/18

και $\hat{f}(m) = \langle f, e_m\rangle = \int_{\mathbb{T}^n} f(t) e^{-2\pi i \langle m, t\rangle} d\lambda_{\mathbb{T}^n}(t)$

Επισης $f\circ T \stackrel{L^2}{=} \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} \widehat{f\circ T}(m) e_m$

Εχουμε $f\circ T \stackrel{L^2}{=} \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} \hat{f}(m) e_m \circ T$

Ομως $e_m \circ T(t) = e^{2\pi i \langle m, At\rangle} = e^{2\pi i \langle A^* m, t\rangle} = e_{A^* m}(t)$

Δηλαδή $e_m \circ T = e_{A^* m}$

$$\widehat{f\circ T}(m) = \begin{cases} \hat{f}((A^*)^{-1}m), & \text{αν } m\in A^*\mathbb{Z}^n \\ 0, & \text{αν } m\notin A^*\mathbb{Z}^n \end{cases}$$

Άρα αν $k\in\mathbb{Z}^n$ τότε $\hat{f}(k) = \hat{f}((A^*)^{\ell}k)$. Επειδή $\hat{f}(j) = \widehat{f\circ T}(j)\ \forall j\in\mathbb{Z}^n$.

Επομένως $\sum\limits_{j\in\mathbb{Z}^n} |\hat{f}(j)|^2 \geq \sum\limits_{j\in\{(A^*)^{\ell}k \,/\, \ell\in\mathbb{N}\}} |\hat{f}(j)|^2 = |\hat{f}(k)|^2\cdot \#\{(A^*)^{\ell}k \,/\, \ell\in\mathbb{N}\}$

Αυτό ισχύει $\forall k\in\mathbb{Z}^n$. Αν για κάποιο $k\in\mathbb{Z}^n$ το σύνολο $\{(A^*)^{\ell}k \,/\, \ell\in\mathbb{N}\}$ είναι άπειρο, έχουμε ότι $\|f\|^2_{L^2} = \sum\limits_{j\in\mathbb{Z}^n} |\hat{f}(j)|^2 \geq |\hat{f}(k)|^2\cdot \#\{(A^*)^{\ell}k \,/\, \ell\in\mathbb{N}\}$

και άρα αν $|\hat{f}(k)|>0$ έχουμε άτοπο.

Άρα για να μην έχουμε άτοπο, πρέπει αν $\{(A^*)^{\ell}k \,/\, \ell\in\mathbb{N}\}$ είναι άπειρο, να έχουμε ότι $\hat{f}(k)=0$. Υποθέτουμε τώρα ότι $\{(A^*)^{\ell}k \,/\, \ell\in\mathbb{N}\}$ πεπερασμένο για $k\in\mathbb{Z}^n\setminus\{\underset{\sim}{0}\}$. Έχουμε ότι $(A^*)^{\ell_1}k = (A^*)^{\ell_2}k$ με $\ell_1\neq\ell_2$.

Τότε $(A^*)^{|\ell_1-\ell_2|}k = k$. Αφού $k\neq 0$, ο $(A^*)^{|\ell_1-\ell_2|}$ έχει ιδιοτιμή το 1 με ιδιοδιάνυσμα το k.

Αφού ο $(A^*)^{|\ell_1-\ell_2|}$ έχει ιδιοτιμή το 1, ο A^* έχει ιδιοτιμή κάποια
↗ βλέπε παρατήρηση επόμενη σελίδα
$|\ell_1-\ell_2|$ ρίζα της μονάδας. Αφού ο A^* έχει ιδιοτιμή ρίζα της μονάδας, και ο A έχει ιδιοτιμή ρίζα της μονάδας.

Επειδή αυτό έχει αποκλειστεί, πρέπει $(A^*)^{\ell_1}k \neq (A^*)^{\ell_2}k$ αν $\ell_1\neq\ell_2$ και άρα το σύνολο $\{(A^*)^{\ell}k \,/\, \ell\in\mathbb{N}\}$ είναι άπειρο όταν $k\in\mathbb{Z}^n\setminus\{\underset{\sim}{0}\}$

Επομένως πρέπει $\hat{f}(k)=0\ \forall k\in\mathbb{Z}^n\setminus\{\underset{\sim}{0}\}$.

Έπεται ότι $f \overset{L^2}{=} \hat{f}(k)e_0$ = σταθερά.

Έπεται ότι το σύστημα είναι εργοδικό.

<u>Αντίστροφα</u> $(\Rightarrow)$ Έστω ότι ο A έχει ιδιοτιμή κάποια ρίζα της μονάδας.

Τότε και ο A^* έχει ιδιοτιμή ρίζα της μονάδας (την συζυγή) και άρα ο $(A^*)^{\ell}$ έχει ιδιοτιμή το 1 για κάποιο ℓ. Δηλαδή $\exists u\in\mathbb{Z}^n\setminus\{\underset{\sim}{0}\}$ τ.ω. $(A^*)^{\ell}u = u$.

Επειδή ο A^* έχει ακέραια στοιχεία A^*_{ij} έπεται ότι μπορούμε να επιλέξουμε ιδιοδιάνυσμα $\underset{\sim}{k}$ με $\underset{\sim}{k}\in\mathbb{Z}^n$. Παίρνουμε το ελάχιστο $\ell\in\mathbb{N}$ για το οποίο υπάρχει $k\in\mathbb{Z}^n\setminus\{\underset{\sim}{0}\}$ τ.ω. $(A^*)^{\ell}k = k$.

Ορίζουμε $f(t) = \sum\limits_{j=0}^{\ell-1} e^{2\pi i\langle k, A^j t\rangle}$

Έχουμε ότι $f\circ T(t) = \sum\limits_{j=0}^{\ell-1} e^{2\pi i\langle k, A^{j+1}t\rangle} = \sum\limits_{j=1}^{\ell-1} e^{2\pi i\langle k, A^j t\rangle} + e^{2\pi i\langle k, A^{\ell}t\rangle} =$

$$= \sum_{j=1}^{\ell-1} e^{2\pi i \langle k, A^j t\rangle} + e^{2\pi i \langle (A^*)^\ell k, t\rangle} = \sum_{j=1}^{\ell-1} \cdots + e^{2\pi i \langle k, t\rangle} =$$

$$= \sum_{j=0}^{\ell-1} e^{2\pi i \langle k, A^j t\rangle} = f(t) \qquad \text{Αρα } f \text{ αναλλοίωτη.}$$

Εχουμε οτι $f(t) = \sum_{j=0}^{\ell-1} e_k\, T^j(t) = \sum_{j=0}^{\ell-1} e_{(A^*)^j k}(t)$

Αν η f ήταν σταθερή,

δηλ $f(t) = c\mathbb{1}_X = c \cdot e_0$ στον L^2 οι συναρτήσεις:

$e_0, e_{A^*k}, e_{(A^*)^2k}, \dots, e_{(A^*)^{\ell-1}k}$ θα ήταν γραμμικά εξαρτημένες.

Ομως αυτό είναι άτοπο διοτι ① για δύο εκθετικά έχουμε $e_m \perp e_{m'}$ αν $m \neq m'$ αρα για οποιοδήποτε σύνολο με διαφορετικούς δείκτες $e_{m_1}, e_{m_2}, \dots, e_{m_p}$ τα $e_{m_1}, \dots, e_{m_p}$ πρέπει να είναι γραμμικά ανεξάρτητα, και ② Τα $0, A^*k, (A^*)^2k, \dots, (A^*)^{\ell-1}k$ είναι όλα διαφορετικά επειδή ο ℓ είναι ο ελάχιστος φυσικός j για τον οποίο $(A^*)^j k = k$. Επεται οτι η f δεν είναι σταθερή σχεδόν παντου.

Αρα το σύστημα δεν είναι εργοδικό.

Παρένθεση Εστω A πίνακας τ.ω. $A^p u = u$ για κάποιο $u \neq 0$, $p \in \mathbb{N}$.

Εστω $z_0, z_1, \dots, z_{p-1}$ οι p ρίζες του 1. $(z_0 = 1)$

Τοτε $x^p - 1 = (x - z_0)(x - z_1)\cdots(x - z_{p-1})$. Αρα $A^p - 1 = (A - z_0 I)(A - z_1 I)\cdots(A - z_{p-1} I)$

Γνωρίζαμε οτι $(A^p - I)u = 0$. Αρα $(A - z_0 I)(A - z_1 I)\cdots(A - z_{p-1} I)u = 0$

Εστω j ο μεγαλύτερος φυσικός στο $\{1, \dots, p-1\}$ για τον οποίο ισχυει $(A - z_j I)\cdots(A - z_{p-1} I)u \neq 0$. αν υπάρχει τέτοιος. Αν όχι, εχουμε οτι $(A - z_{p-1} I)u = 0$ οποτε το z_{p-1} είναι ιδιοτιμή του A.

Αλλιως $(A - z_{j-1} I)\underbrace{(A - z_j I)\cdots(A - z_{p-1} I)u}_{\neq 0} = 0$.

Τοτε το z_{j-1} είναι ιδιοτιμή του A με ιδιοδιάνυσμα: $(A - z_j I)\cdots(A - z_{p-1} I)u \neq 0$

3) Bernoulli Shift

Εστω S πεπερασμένο σύνολο (αλφάβητο)

$X = S^{\mathbb{N}} = \{\underset{\sim}{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \,/\, x_n \in S \ \forall n \in \mathbb{N}\}$

$\mathcal{A} = \sigma(\{\{\underset{\sim}{x} \in X \,/\, x_1 = s_1, \dots, s_n = s_n\} \,/\, n \in \mathbb{N}, s_1, \dots, s_n \in S\})$

$T: X \to X$ το shift $T(\underset{\sim}{x}) = T((x_n)_n) = (x_{n+1})_n$

$p = (p_s)_{s\in S}$, $p_s \geq 0$, $\sum_{s\in S} p_s = 1$.

Τοτε υπαρχει μοναδικο μέτρο πιθανοτητας $\mu(\{x \in X / x_1 = s_1, \dots, x_n = s_n\}) =$
$= p_{s_1} \cdot p_{s_2} \cdots p_{s_n}$. $\forall n \in \mathbb{N}$, $s_1, \dots, s_n \in S$.

Προταση Το $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ είναι εργοδικό

Λήμμα Εστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χωρος πιθανοτητας και εστω $\mathcal{B}$ μια αλγεβρα τ.ω. $\sigma(\mathcal{B}) = \mathcal{A}$. Τοτε $\forall A \in \mathcal{A}$ και $\forall \varepsilon > 0$ $\exists B \in \mathcal{B}$ τ.ω. $\mu(A \triangle B) < \varepsilon$

<u>αποδειξη</u> Ορίζουμε $\mathcal{C} = \{A \in \mathcal{A} / \forall \varepsilon > 0 \ \exists B \in \mathcal{B}$ τ.ω. $\mu(A \triangle B) < \varepsilon\}$.
Η $\mathcal{C}$ είναι σ-αλγεβρα και αφού περιέχει την $\mathcal{B}$ θα περιέχει και την $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{B})$. Πρώτα δείχνουμε οτι η $\mathcal{C}$ είναι αλγεβρα και μετά οτι είναι κλειστη στις αριθμήσιμες ξενες ενωσεις.

- $X \in \mathcal{B}$ και αρα $X \in \mathcal{C}$
- Αν $A \in \mathcal{C}$ και $\varepsilon > 0$ τοτε $\exists B \in \mathcal{B}$ τ.ω. $\mu(A \triangle B) < \varepsilon$. Τοτε $B^c \in \mathcal{B}$ και $\mu(A^c \triangle B^c) = \mu(A \triangle B) < \varepsilon$ Αρα $A^c \in \mathcal{C}$
- Εστω $A_1, A_2 \in \mathcal{C}$. Εστω $\varepsilon > 0$. $\exists B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ τ.ω. $\mu(A_1 \triangle B_1) < \varepsilon/2$ και $\mu(A_2 \triangle B_2) < \varepsilon/2$. Τοτε $B_1 \cup B_2 \in \mathcal{C}$
$\mu((A_1 \cup A_2) \triangle (B_1 \cup B_2)) \leq \mu(A_1 \triangle B_1 \cup A_2 \triangle B_2) \leq \mu(A_1 \triangle B_1) + \mu(A_2 \triangle B_2) < \varepsilon$
αρα $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{C}$.
- Εστω $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{C}$ ξενα ανά δύο. Εστω $\varepsilon > 0$. $\exists n \in \mathbb{N}$ τ.ω.
$\sum_{j=n+1}^{\infty} \mu(A_j) < \frac{\varepsilon}{2}$. Επειδη $\sum_{j \in \mathbb{N}} \mu(A_j) = \mu(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j) \leq 1$,

Εστω $B_1, B_2, \dots, B_n \in \mathcal{B}$ τ.ω. $\mu(A_i \triangle B_i) < \varepsilon/n$
$B_1 \cup \dots \cup B_n \in \mathcal{B}$ αφού $\mathcal{B}$ αλγεβρα.

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \triangle \bigcup_{j=1}^{n} B_j \subseteq \left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j \setminus \bigcup_{j=1}^{n} B_j\right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{n} B_j \setminus \bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) \cup \left(\bigcup_{j>n} A_j\right)$$

οποτε
$$\mu\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \triangle \bigcup_{j=1}^{n} B_j\right) \leq \mu\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j \triangle \bigcup_{j=1}^{n} B_j\right) + \mu\left(\bigcup_{j>n} A_j\right) \leq$$

$$\leq \mu\left(\bigcup_{j=1}^{n} (A_j \triangle B_j)\right) + \mu\left(\bigcup_{j>n} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j \triangle B_j) + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

<u>Αποδειξη Προτασης</u>
Εστω $A \in \mathcal{A}$ τ.ω. $A = T^{-1}(A)$. Η $\mathcal{C} = \{\{x \in X / x_1 \in A_1, \dots, x_n \in A_n\} / n \in \mathbb{N}, A_1, \dots, A_n \in S\}$
Είναι αλγεβρα. (Ελεγχεται ευκολα) και προφανώς $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{A}$

Από το λήμμα $\exists C \in \mathcal{C}$ τ.ω. $\mu(A \triangle C) < \varepsilon$

Έστω ότι $C = \{ \underset{\sim}{x} \in X \,/\, x_1 \in A_1, \dots, x_n \in A_n \}$

$\mu(C \cap T^{-n}(C)) = \mu(\{ \underset{\sim}{x} \in X \,/\, x_1 \in A_1, \dots, x_n \in A_n, x_{n+1} \in A_1, \dots, x_{2n} \in A_n \})$

$$= \sum_{s_1 \in A_1} \sum_{s_2 \in A_2} \cdots \sum_{s_n \in A_n} \sum_{s_{n+1} \in A_1} \cdots \sum_{s_{2n} \in A_n} p_{s_1} p_{s_2} \cdots p_{s_n} p_{s_1} \cdots p_{s_n}$$

$$= \underbrace{\sum_{s_1 \in A_1} p_{s_1} \sum_{s_2 \in A_2} p_{s_2} \cdots \sum_{s_n \in A_n} p_{s_n}}_{\mu(C)} \underbrace{\sum_{s_{n+1} \in A_1} p_{s_{n+1}} \cdots \sum_{s_{2n} \in A_n} p_{s_{2n}}}_{\mu(T^{-n}(C)) = \mu(C)} = (\mu(C))^2$$

Επίσης $A \triangle (C \cap T^{-n}(C)) \subseteq A \triangle C \cup A \triangle T^{-n}(C) =$

$= A \triangle C \cup T^{-n}(A) \triangle T^{-n}(C)$. Άρα $\mu(A \triangle (C \cap T^{-n}(C))) \leq$

$\leq \mu(A \triangle C) + \mu(T^{-n}(A) \triangle T^{-n}(C)) = \mu(A \triangle C) + \mu(T^{-n}(A \triangle C)) =$

$= 2\mu(A \triangle C) < 2\varepsilon$.

Τότε $|\mu(A) - \mu(A)^2| \leq |\mu(A) - \mu(C)^2| + |\mu(C)^2 - \mu(A)^2| =$

$= |\mu(A) - \mu(C \cap T^{-n}(C))| + |\mu(C) - \mu(A)| \cdot |\mu(C) + \mu(A)| \leq$

$\leq \mu(A \triangle (C \cap T^{-n}(C))) + 2\mu(A \triangle C) \leq 2\varepsilon + 2\varepsilon = 4\varepsilon$

Αφού αυτό ισχύει $\forall \varepsilon > 0$ έπεται ότι $\mu(A) = \mu(A)^2$ και άρα $\mu(A) \in \{0, 1\}$. Άρα το σύστημα είναι εργοδικό.

4) Απεικόνιση Gauss

$T: [0,1] \setminus \mathbb{Q} \to [0,1] \setminus \mathbb{Q}$, $T(x) = \frac{1}{x} - [\frac{1}{x}]$, $\mathcal{A} = \{ A \setminus \mathbb{Q} \,/\, A \in \mathcal{B}([0,1]) \}$

μ = ο περιορισμός του μέτρου $A \mapsto \int_A \frac{dx}{x+1} \frac{1}{\ln 2}$ στο X.

Το $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ είναι εργοδικό σύστημα που διατηρεί το μέτρο.

Τελεστής Koopman

$\boxed{\text{μάθημα } 7^o \;\; 24/10/18}$

$(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ σ.δ.μ.

Για $f: X \to \mathbb{C}$ (ή $f: X \to \mathbb{R}$) ορίζουμε $U_T f = f \circ T$

Ο U_T στέλνει μετρήσιμες συναρτήσεις σε μετρήσιμες, λέγεται Τελεστής Koopman

Λήμμα Για οποιοδήποτε $p \in [1, +\infty]$ $U_T(L^p(X, \mathcal{A}, \mu)) \subseteq L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ και ο U_T είναι ισομετρία

απόδειξη Για $1 \leq p < +\infty$ $\|U_T f\|_p = \left(\int |U_T f|^p d\mu \right)^{1/p} =$