Απο το λήμμα $\exists C \in \mathcal{C}$ τ.ω. $\mu(A \triangle C) < \varepsilon$.
Εστω οτι $C = \{ \underset{\sim}{x} \in X / x_1 \in A_1, \dots, x_n \in A_n \}$

$$\mu(C \cap T^{-n}(C)) = \mu(\{ \underset{\sim}{x} \in X / x_1 \in A_1, \dots, x_n \in A_n, x_{n+1} \in A_1, \dots, x_{2n} \in A_n \})$$

$$= \sum_{s_1 \in A_1} \sum_{s_2 \in A_2} \cdots \sum_{s_n \in A_n} \sum_{s_{n+1} \in A_1} \cdots \sum_{s_{2n} \in A_n} p_{s_1} p_{s_2} \cdots p_{s_n} p_{s_1} \cdots p_{s_n}$$

$$= \underbrace{\sum_{s_1 \in A_1} p_{s_1} \sum_{s_2 \in A_2} p_{s_2} \cdots \sum_{s_n \in A_n} p_{s_n}}_{\mu(C)} \underbrace{\sum_{s_{n+1} \in A_1} p_{s_{n+1}} \cdots \sum_{s_{2n} \in A_n} p_{s_{2n}}}_{\mu(T^{-n}(C)) = \mu(C)} = (\mu(C))^2$$

Επισης $A \triangle (C \cap T^{-n}(C)) \subseteq A \triangle C \cup A \triangle T^{-n}(C) =$
$= A \triangle C \cup T^{-n}(A) \triangle T^{-n}(C)$. Άρα $\mu(A \triangle (C \cap T^{-n}(C))) \leq$
$\leq \mu(A \triangle C) + \mu(T^{-n}(A) \triangle T^{-n}(C)) = \mu(A \triangle C) + \mu(T^{-n}(A \triangle C)) =$
$= 2\mu(A \triangle C) < 2\varepsilon$.

Τοτε $|\mu(A) - \mu(A)^2| \leq |\mu(A) - \mu(C)^2| + |\mu(C)^2 - \mu(A)^2| =$
$= |\mu(A) - \mu(C \cap T^{-n}(C))| + |\mu(C) - \mu(A)| \cdot |\mu(C) + \mu(A)| \leq$
$\leq \mu(A \triangle (C \cap T^{-n}(C))) + 2\mu(A \triangle C) \leq 2\varepsilon + 2\varepsilon = 4\varepsilon$

Αφού αυτο ισχυει $\forall \varepsilon > 0$ επεται οτι $\mu(A) = \mu(A)^2$ και άρα $\mu(A) \in \{0, 1\}$. Άρα το σύστημα είναι εργοδικό.

4) Απειρονιον Gauss

$T: [0,1] \setminus \mathbb{Q} \to [0,1] \setminus \mathbb{Q}$, $T(x) = \frac{1}{x} - [\frac{1}{x}]$, $\mathcal{A} = \{ A \setminus \mathbb{Q} \,/\, A \in \mathcal{B}([0,1]) \}$

μ = ο περιορισμός του μετρου $A \mapsto \int_A \frac{dx}{x+1} \frac{1}{\ln 2}$ στο X.

Το $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ είναι εργοδικό σύστημα που διατηρεί το μέτρο.

$\boxed{\text{μάθημα } 7^o \quad 24/10/18}$

Τελεστης Koopman

$(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ σ.δ.μ.

Για $f: X \to \mathbb{C}$ (ή $f: X \to \mathbb{R}$) ορίζουμε $U_T f = f \circ T$

Ο U_T στέλνει μετρήσιμες συναρτήσεις σε μετρήσιμες, λέγεται Τελεστής Koopman

Λήμμα Για οποιοδήποτε $p \in [1, +\infty]$ $U_T(L^p(X, \mathcal{A}, \mu)) \subseteq L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ και ο U_T είναι ισομετρία

αποδειξη Για $1 \leq p < +\infty$ $\|U_T f\|_p = \left(\int |U_T f|^p d\mu\right)^{1/p} =$

$$= \left(\int |f\circ T|^p d\mu\right)^{1/p} = \left(\int |f|^p \circ T d\mu\right)^{1/p} = \left(\int |f|^p d T_*\mu\right)^{1/p} =$$

$$= \left(\int |f|^p d\mu\right)^{1/p} = \|f\|_p$$

Αν $f \in L^p$ τοτε $U_T f \in L^p$ και $\|U_T f\|_p = \|f\|_p$

Για $p = +\infty$ $\mu(\{x \in X / |U_T f(x)| > t\}) = \mu(\{x \in X / |f\circ T(x)| > t\}) =$
$= \mu(T^{-1}\{x \in X / |f(x)| > t\}) = \mu(\{x \in X / |f(x)| > t\})$

Άρα $\|U_T f\|_\infty = \sup\{t > 0 / \mu\{x \in X / |U_T f(x)| > t\}) > 0\} =$
$= \sup\{t > 0 / \mu\{x \in X / |f(x)| > t\}) > 0\} = \|f\|_\infty$

Όταν $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ αντιστρέψιμο τοτε U_T αντιστρέψιμος.
$U_T^{-1} f = f \circ T^{-1}$ και ο U_T είναι ισομετρικος ισομορφισμός (unitary τελεστής) από L^2 στον L^2. Όταν ο T δεν είναι αντιστρέψιμος ο U_T δεν είναι επί.

<u>Παράδειγμα</u> $X = S^1$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(S)$, $\mu = \lambda_S$. $T(z) = z^2$.
Έστω $f = \mathbb{1}_A$ οπου $A = \{e^{2\pi i t} / t \in [0, 1/2)\}$ τοτε $f \in L^2$
Δεν υπάρχει $g \in L^2(\mathbb{T})$ τ.ω. $U_T g = f$
$g(z^2) = f(z)$
$g(z^2) = 1 \ \forall z \in A \Rightarrow g(z) = 1 \ \forall z \in S$ άτοπο.
$g(z^2) = 0 \ \forall z \in S \setminus A$ $g(z) = 0 \ \forall z \in S$

<u>Παρατήρηση</u> Εχουμε πάντα οτι $U_T \underbrace{\mathbb{1}_X}_{\text{συνάρτηση ταυτοτικά } = 1} = \mathbb{1}_X$ αρα ο U_T εχει ιδιοτιμή το 1 πάντα. Δείξαμε οτι (α) Όταν $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ είναι εργοδικό κάθε συνάρτηση f με $U_T f = f$ πρεπει να είναι $f = c\mathbb{1}_X$ (σταθερή) οποτε η ιδιοτιμή 1 είναι απλή, δηλαδή ο ιδιοχωρος εχει διάσταση 1.
(β) Όταν η ιδιοτιμή 1 του τελεστή U_T $L^p \to L^p$ είναι απλή για κάποιο $p \in [1, +\infty]$ τοτε το σύστημα είναι εργοδικό.
↝ Έπεται από πρόταση σελ 21

<u>Μέσο Εργοδικό Θεώρημα von Neumann</u>

<u>Ορισμός</u> Αν $T : H \to H$ είναι γραμμικός τελεστής σε χώρο Hilbert H τότε ο T λέγεται <u>συστολή</u> αν $\|T\| \leq 1$

Hilbert ↝ χώρος με εσωτερικό γινόμενο, <u>Πλήρης</u> ως προς τη νόρμα που επάγεται από το εσωτερικό μέτρο.
↳ κάθε βασική ακολουθία συγκλίνει

Ορισμός Αν $A \subseteq H$, H χώρος Hilbert τότε $A^{\perp} = \{u \in H \mid \langle u, a \rangle = 0 \ \forall a \in A\}$
ο $A^{\perp}$ είναι γραμμικός χώρος και κλειστός.
Επίσης: Αν M γραμμικός υπόχωρος του H τότε $M^{\perp} = (\overline{M})^{\perp}$

Πρόταση Αν H χώρος Hilbert και M κλειστός υπόχωρος του H τότε
$\forall h \in H$ υπάρχουν μοναδικά u, v τ.ω. $u \in M$, $v \in M^{\perp}$ και $h = u + v$
Το u καλείται ορθογώνια προβολή του h στον M (Δηλ. $H = M \oplus M^{\perp}$)

Πρόταση Αν H χώρος Hilbert και M κλειστός υπόχωρος τότε $(M^{\perp})^{\perp} = M$
απόδειξη Για $u \in M$ και $v \in M^{\perp}$ έχουμε $\langle u, v \rangle = 0$. Έπεται ότι
$u \in (M^{\perp})^{\perp}$ $\forall u \in M$ άρα $M \subseteq (M^{\perp})^{\perp}$.
Επίσης αν $h \in (M^{\perp})^{\perp}$ τότε υπάρχουν μοναδικά $u \in M$ και $v \in M^{\perp}$
τ.ω. $h = u + v$. Πρέπει $\langle h, v \rangle = 0$ επειδή $h \in (M^{\perp})^{\perp}$.
δηλ $\langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle = 0$. Όμως $\langle u, v \rangle = 0$ γιατί $u \in M$, $v \in M^{\perp}$
άρα $\langle v, v \rangle = 0$ άρα $v = 0$. Άρα $h = u \in M$ άρα $(M^{\perp})^{\perp} \subseteq M$

Θεώρημα Μέσο Εργοδικό Θεώρημα von Newman για συστολές σε χώρους Hilbert.
Αν $U : H \to H$ είναι μια συστολή στον χώρο Hilbert H τότε $\forall h \in H$
έχουμε $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} U^k h \to Ph$ στον H, όπου P η ορθογώνια προβολή
στον υπόχωρο $F = \{f \in H \mid Uf = f\}$

Λήμμα 1 Αν H χώρος Hilbert και $U : H \to H$ συστολή τότε:
$Uh = h \Leftrightarrow U^*h = h$
απόδειξη αρκεί να δείξουμε μια κατεύθυνση μόνο. Έστω $Uh = h$.
$\|U^*h - h\|^2 = \langle U^*h - h, U^*h - h \rangle = \|U^*h\|^2 + \|h\|^2 - \langle U^*h, h \rangle$
$- \langle h, U^*h \rangle \leq \|h\|^2 + \|h\|^2 - \langle h, Uh \rangle - \langle Uh, h \rangle =$
$= 2\|h\|^2 - \langle h, h \rangle - \langle h, h \rangle = 0$

Λήμμα 2 Αν $U : H \to H$ συστολή στο χώρο Hilbert H και
$F = \{f \in U \mid Uf = f\}$ και $N = \{Uh - h \mid h \in H\}$. Τότε $N^{\perp} = F$.
Απόδειξη Έστω $f \in H$. $\langle Uh - h, f \rangle = 0$ $\forall h \in H$ $\Leftrightarrow$

$\Rightarrow \langle (U-I)h, f\rangle = 0 \ \forall h\in H \Rightarrow \langle h, (U-I)^* f\rangle = 0 \ \forall h\in H \Rightarrow$

$\Rightarrow (U-I)^* f = 0 \Leftrightarrow U^* f = f \overset{\text{λημμα 1}}{\Longleftrightarrow} Uf = f \Leftrightarrow f\in F$

Πορισμα Με τους ιδιους συμβολισμους, $F^\perp = \bar{N}$

αποδειξη Εχουμε $F = N^\perp = (\bar{N})^\perp$. $F^\perp = ((\bar{N})^\perp)^\perp \overset{\text{απο την προηγουμενη προταση}}{=} \bar{N}$

Επομενως $H = F \oplus \bar{N}$ → αρα F κλειστος $\Rightarrow H = F\oplus F^\perp$

αποδειξη Θεωρηματος

Οριζουμε $N = \{Uh - h \ / \ h\in H\}$. Απο πορισμα εχουμε οτι $F^\perp = \bar{N}$.

Εχουμε οτι $H = F\oplus F^\perp = F\oplus \bar{N}$. Για $f\in F$ $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} U^k f = f = Pf$.

Για $g\in N$ εχουμε οτι $g = Uh - h$ για καποιο $h\in H$.

τοτε $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} U^k g = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} U^{k+1}h - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} U^k h = \frac{1}{n}(U^n h - h)$

$\left\| \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} U^k g\right\| = \frac{1}{n}\| U^n h - h\| \le \frac{1}{n}(\|U^n h\| + \|h\|) \overset{U \text{ ισομετρια}}{\le} \frac{2\|h\|}{n} \to 0$

Αν $g\in\bar{N}$ τοτε υπαρχουν $g_n\in N$, $n\in\mathbb{N}$ τ.ω. $g_n\to g$. Εστω $\varepsilon>0$.

$\exists m\in\mathbb{N}$ τ.ω. $\|g_m - g\| < \frac{\varepsilon}{2}$. $\exists n_0\in\mathbb{N}$ τ.ω. $\left\|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} U^k g_m\right\| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\forall n\ge n_0$. Τοτε για $n\ge n_0$ $\left\|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} U^k g\right\| \le \left\|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} U^k g - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} U^k g_m\right\| +$

$+\left\|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} U^k g_m\right\| < \left\|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} U^k (g-g_m)\right\| + \frac{\varepsilon}{2} \le \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\|U^k(g-g_m)\| + \frac{\varepsilon}{2} \le$

$\overset{U \text{ ισομετρια}}{\le} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\|g-g_m\| + \frac{\varepsilon}{2} = \|g-g_m\| + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.

Επεται οτι $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} U^k g \to 0$ στον H.

Τελος αν $h\in H$ υπαρχουν μοναδικα $f\in F$ και $g\in\bar{N}$ τ.ω. $h = f+g$

Τοτε $\left\|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} U^k h - Ph\right\| = \left\|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} U^k f + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} U^k g - f\right\| =$

$= \left\|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} U^k g\right\| \to 0$

Πόρισμα Μέσο εργοδικό Θεώρημα Von Neumann

Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ ένα σ.δ.μ. Τότε $\forall f \in L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$ έχουμε:

$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\circ T^k \xrightarrow{L^2} Pf$, όπου P είναι η προβολή στον υπόχωρο του

$\hookrightarrow$ δηλ. $\|\frac{1}{n}\sum f\circ T^k - Pf\|_2 \to 0$

$L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$ που αποτελείται από τις μ-σχεδόν αναλλοίωτες συναρτήσεις.

Απόδειξη: Εφαρμόζουμε το προηγούμενο Θεώρημα για $H = L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$ και $U_T f = f\circ T$. Ο χώρος $F = \{f \in L^2 / U_T f \overset{L^2}{=} f\} = \{f \in L^2 / f\circ T \overset{L^2}{=} f\}$ είναι ο κλειστός υπόχωρος των μ-σχεδόν T-αναλλοίωτων συναρτήσεων.

Παρατήρηση Έχουμε ότι $Pf \in F$ δηλ. Pf είναι μ-σχεδόν αναλλοίωτο. Όταν το σύστημα είναι εργοδικό πρέπει Pf να είναι σταθερή μ-σχεδόν παντού. Άρα $Pf(x) = \int Pf\, d\mu$ για μ-σχεδόν κάθε $x \in X$.

Γνωρίζουμε ότι $f - Pf \perp F$ $\quad (f = Pf + (f - Pf))$

Όμως $\mathbb{1}_X \in F$ άρα $\langle f - Pf, \mathbb{1}_X \rangle = 0 \Leftrightarrow \int_X f - Pf\, d\mu = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \int f\, d\mu = \int Pf\, d\mu$.

Άρα στην εργοδική περίπτωση $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\circ T^k \to \int f\, d\mu$

στον $L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$, $\forall f \in L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$

Παρατήρηση (i) η $\mathcal{E} = \{A \in \mathcal{A} / T^{-1}(A) = A\}$ είναι σ-άλγεβρα και λέγεται σ-άλγεβρα των αναλλοίωτων υποσυνόλων. Επίσης $\mathcal{E}_\mu = \{A \in \mathcal{A} / \mu(A \triangle T^{-1}(A)) = 0\}$ είναι επίσης σ-άλγεβρα, η σ-άλγεβρα των μ-σχεδόν αναλλοίωτων υποσυνόλων. Πράγματι, $X \triangle T^{-1}(X) = \emptyset$ άρα $X \in \mathcal{E}_\mu$.

Αν $A \in \mathcal{E}_\mu$ τότε $\mu(A^c \triangle T^{-1}(A^c)) = \mu(A \triangle T^{-1}(A)^c) = \mu(A \triangle T^{-1}(A)) = 0$ άρα $A^c \in \mathcal{E}_\mu$.

Αν $A_i \in \mathcal{E}_\mu$ $\forall i \in \mathbb{N}$ τότε $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \triangle T^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) =$

$= \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \triangle \bigcup_{i=1}^{\infty} T^{-1}(A_i) \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \triangle T^{-1}(A_i))$

άρα $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \triangle T^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i \triangle T^{-1}(A_i)) = 0$

άρα $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{E}_\mu$.

(ii)
Μια $f \in L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$ είναι μ-σχεδόν αναλλοίωτη ανν είναι μετρήσιμη ως προς την σ-άλγεβρα $\mathcal{E}_\mu$.
Πράγματι, αν η f είναι μ-σχεδόν αναλλοίωτη τότε:
$\mu(\{x \in X / f(x) \leq a\} \triangle T^{-1}(\{x \in X / f(x) \leq a\})) = \mu(\{x \in X / f(x) \leq a\} \triangle \{x \in X / f(Tx) \leq a\}$
$= \mu(\{x \in X / f(x) \leq a\} \triangle \{x \in X / f(Tx) \leq a\}) \cap \{x \in X / f(x) = f(Tx)\}) =$
$= \mu(\emptyset) = 0$. Άρα $\{x \in X / f(x) \leq a\} \in \mathcal{E}_\mu$ άρα f είναι $\mathcal{E}_\mu$ - μετρήσιμη.
Αντιστρόφως, αν f $\mathcal{E}_\mu$-μετρήσιμη $\mu(\{x \in X / f(x) < f(T(x))\}) =$
$$= \mu\Big(\bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{x \in X / f(x) \leq q\} \cap \{x \in X / f(Tx) > q\}\Big) \leq$$
$$\leq \mu\Big(\bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{x \in X / f(x) \leq q\} \triangle \{x \in X / f(Tx) \leq q\}\Big) \leq$$
$$\leq \sum_{q \in \mathbb{Q}} \mu(\{x \in X / f(x) \leq q\} \triangle \{x \in X / f(T(x)) \leq q\}) =$$
$$= \sum_{q \in \mathbb{Q}} \mu(\{x \in X / f(x) \leq q\} \triangle T^{-1}(\{x \in X / f(x) \leq q\}) = \sum_{q \in \mathbb{Q}} 0 = 0$$
επειδή το $\{x \in X / f(x) \leq q\} \in \mathcal{E}_\mu$ $\forall q \in \mathbb{Q}$
Όμοια $\mu(\{x \in X / f(x) > f(T(x))\}) = 0$ άρα $f = f \circ T$ μ-σ.π.
Επομένως οι αναλλοίωτες συναρτήσεις στον $L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$ είναι οι συναρτήσεις στον $L^2(X, \mathcal{E}_\mu, \mu)$. Επομένως Pf είναι ορθογώνια προβολή της f στον υπόχωρο $L^2(X, \mathcal{E}_\mu, \mu)$.

Ορισμός Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος πιθανότητας. Έστω $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ μια σ-υποάλγεβρα της $\mathcal{A}$. Τότε $\forall f \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ $\exists g \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ και g μετρήσιμη ως προς την $\mathcal{B}$ δηλ $g \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ τ.ω.
$$\int_B f \, d\mu = \int_B g \, d\mu \quad \forall B \in \mathcal{B}$$

Η g λέγεται <u>δεσμευμένη μέση τιμή</u> της f ως προς την σ-άλγεβρα $\mathcal{B}$. Συμβολισμός $g = \underline{E(f \mid \mathcal{B})}$

Το όριο Pf στο Θεώρημα Von Neumann είναι $Pf = E(f / \mathcal{E}_\mu)$
Πράγματι: Pf είναι μετρήσιμη ως προς την $\mathcal{E}_\mu$ και
$$\int_E (f - Pf) \, d\mu = \langle f - Pf, \underbrace{\mathbb{1}_E}_{\in F} \rangle = 0 \quad \forall E \in \mathcal{E}_\mu$$

Δεδομένου ότι $Pf \in L^2 \subseteq L^1$ έχουμε ότι $Pf = E(f|\Sigma_\mu)$

Άσκηση X πεπερασμένο σύνολο $X = \{1, 2, \ldots, n\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$, μ ένα μέτρο πιθανότητας στο $(X, \mathcal{A})$. $\mathcal{B} = \sigma(B_1, B_2, \ldots, B_m)$ όπου $B_1, B_2, \ldots, B_m$ μια διαμέριση του $X = \{1, \ldots, n\}$. Τότε:

$$\underbrace{E(\mathbb{1}_A|\mathcal{B})(x)}_{\mu(A|\mathcal{B})} = \frac{\mu(A \cap B_i)}{\mu(B_i)} \quad \text{για } x \in B_i$$

Παρατήρηση Το μέσο εργοδικό θεώρημα von Neumann ισχύει και σε τετράδες $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ με $\mu(X) = +\infty$

$\boxed{\text{μάθημα 8° } 29/10/18}$

Θεώρημα Επαναφοράς Khinchine

Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ σ.δ.μ. και $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) > 0$. Τότε $\forall \varepsilon > 0$ το σύνολο $R_\varepsilon = \{n \in \mathbb{N} / \mu(A \cap T^{-n}(A)) \geq \mu(A)^2 - \varepsilon\}$ έχει φραγμένα κενά.

απόδειξη Έστω $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) > 0$ και $\varepsilon > 0$. Εφαρμόζουμε το von Neumann για $f = \mathbb{1}_A \in L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$

$$\left\| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}_A \circ T^k - P\mathbb{1}_A \right\|_2 \xrightarrow{n \to \infty} 0. \text{ Άρα } \exists N \in \mathbb{N} \text{ τ.ω.}$$

$$\left\| \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{1}_A \circ T^k - P\mathbb{1}_A \right\|_2 < \varepsilon$$

$$\forall j \in \mathbb{N} \quad \left\| \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{1}_A \circ T^{k+j} - P\mathbb{1}_A \circ T^j \right\|_2 = \left\| \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{1}_A \circ T^k - P\mathbb{1}_A \right\|_2 < \varepsilon$$

και επίσης $\left\| \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{1}_A \circ T^{k+j} - P\mathbb{1}_A \right\|_2 \overset{P\mathbb{1}_A \in F}{=\!=} \left\| \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{1}_A \circ T^{k+j} - P\mathbb{1}_A \circ T^j \right\|_2 < \varepsilon$

άρα

$$\left\| \frac{1}{N} \sum_{k=j}^{j+N-1} \mathbb{1}_A \circ T^k - P\mathbb{1}_A \right\|_2 < \varepsilon \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

Από ανισότητα Cauchy - Schwartz:

$$\left| \left\langle \frac{1}{N} \sum_{k=j}^{j+N-1} \mathbb{1}_A \circ T^k - P\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_A \right\rangle \right| \leq \left\| \frac{1}{N} \sum_{k=j}^{j+N-1} \mathbb{1}_A \circ T^k - P\mathbb{1}_A \right\|_2 \sqrt{\mu(A)} < \varepsilon$$

$\forall j \in \mathbb{N}$. Άρα $\left\langle \frac{1}{N} \sum_{k=j}^{j+N-1} \mathbb{1}_A \circ T^k, \mathbb{1}_A \right\rangle \geq \langle P\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_A \rangle - \varepsilon \quad \forall j \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{N}\sum_{k=j}^{j+N-1}\int_A \mathbb{1}_A\circ T^k d\mu \geq \langle P\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_A\rangle - \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{N}\sum_{k=j}^{j+N-1}\mu(A\cap T^{-k}(A)) \geq \langle P\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_A\rangle - \varepsilon \quad \forall j. \quad (1)$$

Επειδή $\mathbb{1}_A - P\mathbb{1}_A \perp F$ και $\mathbb{1}_X \in F$ έπεται ότι: $\langle \mathbb{1}_A - P\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_X\rangle = 0$.
Δηλ $\mu(A) = \int P\mathbb{1}_A d\mu$. Άρα $\mu^2(A) = \langle \mathbb{1}_A, \mathbb{1}_X\rangle^2 = \langle P\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_X\rangle^2$

$\overset{\text{cauchy-schwartz}}{\leq} \|P\mathbb{1}_A\|_2^2$ (2) Επίσης επειδή $\mathbb{1}_A - P\mathbb{1}_A \perp P\mathbb{1}_A \in F$ έχουμε ότι
$\langle \mathbb{1}_A - P\mathbb{1}_A, P\mathbb{1}_A\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle \mathbb{1}_A, P\mathbb{1}_A\rangle = \|P\mathbb{1}_A\|_2^2$ (3)
Έπεται ότι $\forall j \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι:

$$\frac{1}{N}\sum_{k=j}^{j+N-1}\mu(A\cap T^{-k}(A)) \geq \mu(A)^2 - \varepsilon \quad , \text{από } (1), (2), (3).$$

Έπεται ότι $\forall j \in \mathbb{N}$ $\exists k \in [j, j+N-1)$ τ.ω. $\mu(A\cap T^{-k}(A)) > \mu(A)^2 - \varepsilon$
δηλ $k \in R_\varepsilon$. Αποδείξαμε ότι $R_\varepsilon \cap [j, j+N-1) \neq \emptyset$ $\forall j \in \mathbb{N}$.
Άρα τα κενά του R_ε φράσσονται από το N.

Κατά σημείο εργοδικό θεώρημα Birkhoff

Θεώρημα Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ σ.δ.μ. Τότε $\forall f \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ τα
όρια $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\circ T^k(x) := \tilde{f}(x)$ υπάρχουν για μ-σ.κ. $x \in X$

και η $\tilde{f}$ είναι αναλλοίωτη, σχεδόν παντού, $\tilde{f} \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ και
$\forall A \in \mathcal{A}$ με $A = T^{-1}(A)$ έχουμε $\int_A \tilde{f} d\mu = \int_A f d\mu$

Ειδικότερα, αν το σύστημα είναι εργοδικό, $\tilde{f}(x) = \int f d\mu$ για
μ-σ.κ. $x \in X$

Συμβολισμοί: Για $f : X \to \mathbb{C}$ ή $f : X \to \mathbb{R}$
$S_n f(x) = f(x) + f(T(x)) + \dots + f(T^{n-1}(x))$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in X$
δηλ $S_n f = \sum_{k=0}^{n-1} f\circ T^k$, $n \in \mathbb{N}$.

Επίσης $S_0 f(x) = 0$ $\forall x \in X$
$S_n^* f(x) = \max\{S_0 f(x), S_1 f(x), \dots, S_n f(x)\}$, $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$

Επίσης $A_n f = \frac{1}{n} S_n f = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k$ $n \in \mathbb{N}$

$S^* f(x) = \sup_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} S_n f(x)$

$A^* f(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} A_n f(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n} S_n f(x)$

$B_\alpha^f = \{x \in X \,/\, A^* f(x) > \alpha\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Λήμμα (Μεγιστικό Εργοδικό Θεώρημα)
Εστω $(X, \mathbb{A}, \mu, T)$ σ.δ.μ και $f \in L^1(X, \mathbb{A}, \mu)$. Τότε $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\int_{\{x \in X / S_n^* f(x) > 0\}} f \, d\mu \geq 0$$

απόδειξη Παρατηρούμε ότι $(S_n f) \circ T = S_n(f \circ T) = S_{n+1} f - f$
$\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.
Επίσης $[(S_n^* f) \circ T](x) = S_n^* f(T(x)) = \max\{S_0 f(T(x)), S_1 f(T(x)), \dots, S_n f(T(x))\}$
$= \max\{S_1 f(x) - f(x), S_2 f(x) - f(x), \dots, S_{n+1} f(x) - f(x)\} =$
$= \max\{S_1 f(x), S_2 f(x), \dots, S_{n+1} f(x)\} - f(x) \geq$
$\geq \max\{S_1 f(x), S_2 f(x), \dots, S_n f(x)\} - f(x) = S_n^* f(x) - f(x)$, για τα
$x \in \{y \in X \,/\, S_n^* f(y) > 0\}$. Αρα $f(x) \geq S_n^* f(x) - S_n^* f(T(x))$

$$\int_{\{x \in X / S_n^* f(x) > 0\}} f \, d\mu \geq \int_{\{x \in X / S_n^* f(x) > 0\}} S_n^* f \, d\mu - \int_{\{x \in X / S_n^* f(x) > 0\}} (S_n^* f) \circ T \, d\mu =$$

$$\overset{*}{=} \int S_n^* f \, d\mu - \int_{\{x \in X / S_n^* f(x) > 0\}} (S_n^* f) \circ T \, d\mu \geq \int S_n^* f \, d\mu - \int (S_n^* f) \circ T \, d\mu$$

$= 0$.
(*) επειδή $S_n^* f \geq 0$ πάντα.

Πόρισμα Μεγιστική Ανισότητα
Εστω $(X, \mathbb{A}, \mu, T)$ σ.δ.μ. και $f \in L^1(X, \mathbb{A}, \mu)$ τότε για $\alpha \in \mathbb{R}$
$$\alpha \mu(B_\alpha^f) \leq \int_{B_\alpha^f} f \, d\mu$$

Επιπλέον, $\forall A \in \mathbb{A}$ με $A = T^{-1}(A)$ έχουμε:
$$\alpha \mu(B_\alpha^f \cap A) \leq \int_{B_\alpha^f \cap A} f \, d\mu$$

<u>απόδειξη</u> Για δοσμένα $f \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ και $\alpha \in \mathbb{R}$ θέτουμε $g = f - \alpha \mathbb{1}_X \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$

Παρατηρούμε ότι $S_n g = \sum_{k=0}^{n-1} g \circ T^k = S_n f - n\alpha \mathbb{1}_X$

Έχουμε ότι, για $x \in X$ $A^* f(x) > \alpha \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ τ.ω. $A_n f(x) > \alpha \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ $\frac{1}{n} S_n f(x) > \alpha \Leftrightarrow S_n g(x) > 0$ για κάποιο $n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow S^* g(x) > 0$. Από το μεγιστικό εργοδικό θεώρημα έχουμε ότι $\int_{\{x \in X / S_n^* g(x) > 0\}} g \, d\mu \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Έχουμε ότι $\{x \in X / S^* g(x) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X / S_n^* g(x) > 0\}$. Επομένως $g \mathbb{1}_{\{x \in X / S_n^* g(x) > 0\}} \longrightarrow g \mathbb{1}_{\{x \in X / S^* g(x) > 0\}}$

Επειδή $g \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$, από θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης
$$\int_{\{x \in X / S^* g(x) > 0\}} g \, d\mu = \lim_{n \to \infty} \int_{\{x \in X / S_n^* g(x) > 0\}} g \, d\mu \geq 0.$$

Επομένως $\int_{B_\alpha^f} g \, d\mu = \int_{\{x \in X / S^* g(x) > 0\}} g \, d\mu \geq 0$

Δηλ $\int_{B_\alpha^f} (f - \alpha \mathbb{1}_X) \, d\mu \geq 0$. Άρα $\int_{B_\alpha^f} f \, d\mu \geq \alpha \int_{B_\alpha^f} d\mu = \alpha \mu(B_\alpha^f)$

Έστω τώρα $A \in \mathcal{A}$ με $A = T^{-1}(A)$. Εφαρμόζουμε τα παραπάνω στο σύστημα $(A, \mathcal{A}_A, \mu_A, T_A)$ όπου $\mathcal{A}_A = \{B \cap A / B \in \mathcal{A}\}$, $\mu_A(B) = \frac{\mu(B)}{\mu(A)}$, για $B \in \mathcal{A}$ και $T_A = T|_A \ A \to A$. Έχουμε υποθέσει $\mu(A) > 0$ χωρίς βλάβη. Από το προηγούμενο:
$$\int_{B_\alpha^{f|A}} f|_A \, d\mu_A \geq \alpha \cdot \mu_A(B_\alpha^{f|A}) \Rightarrow \frac{\int_{B_\alpha^f \cap A} f \, d\mu}{\mu(A)} \geq \frac{\alpha \mu(B_\alpha^f \cap A)}{\mu(A)} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \int_{B_\alpha^f \cap A} f \, d\mu \geq \alpha \mu(B_\alpha^f \cap A)$$

<u>Παρατήρηση</u> Αν έχουμε $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ με $\mu(X) = +\infty$, το συμπέρασμα $\int_{B_\alpha^f \cap A} f \, d\mu \geq \alpha \mu(B_\alpha^f \cap A)$ ισχύει $\forall f \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ και $A \in \mathcal{A}$ με $A = T^{-1}(A)$ και $\mu(A) < \infty$

απόδειξη θεωρήματος Birkhoff

Εστω $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$. Ορίζουμε $f^*(x) = \limsup_{n\to\infty} A_n f(x) =$

$= \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k(x)$, $f_*(x) = \liminf_{n\to\infty} A_n(x)$

Θ.δ.ο. $f_* = f^*$ μ-σ.π.

Ισχυρισμός: Οι f^*, f_* είναι αναλλοίωτες.

απόδειξη ισχυρισμού: Παρατηρούμε ότι $\frac{1}{n} S_n f(T(x)) =$

$= \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{n+1} S_{n+1} f(x) - \frac{1}{n} f(x)$. Εστω $n_1 < n_2 < \dots$ τ.ω.

$\frac{1}{n_k} S_{n_k} f(T(x)) \to f^*(T(x))$. Εστω $m_k = n_k + 1$. Τότε:

$\frac{1}{m_k} S_{m_k} f(x) = \frac{n_k}{n_k+1} \Big(\underbrace{\frac{1}{n_k} S_{n_k} f(T(x))}_{\downarrow\, f^*(T(x))} + \underbrace{\frac{1}{n_k} f(x)}_{\downarrow\, 0} \Big)$, άρα

$\frac{1}{m_k} S_{m_k} f(x) \to f^*(T(x))$.

Επεται ότι, $f^*(x) = \limsup \frac{1}{n} S_n f(x) \geq \underbrace{f^*(T(x))}_{= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{m_k} S_{m_k} f(x)}$.

Αντίστροφα, αν $n_1 < n_2 < \dots$ τ.ω. $n_k^{-1} S_{n_k} f(x) \to f^*(x)$

Εστω $m_k = n_{k+1} - 1$. Τότε: $\frac{1}{m_k} S_{m_k} f(T(x)) =$

$= \frac{n_{k+1}}{n_{k+1} - 1} \cdot \frac{1}{n_{k+1}} S_{n_{k+1}} f(x) - \frac{1}{n_{k+1} - 1} f(x)$, άρα:

$\frac{1}{m_k} S_{m_k} f(T(x)) \to f^*(x)$. Επεται ότι $f^*(T(x)) \geq f^*(x)$.

Ορίζουμε $B = \{x \in X / f_*(x) < f^*(x)\} =$

$= \bigcup_{\substack{a,b \in \mathbb{Q} \\ a<b}} \underbrace{\{x \in X / f_*(x) < a\} \cap \{x \in X / f^*(x) > b\}}_{E^f_{a,b}}$

Θ.δ.ο. για $a, b \in \mathbb{Q}$ με $a < b$ έχουμε $\mu(E^f_{a,b}) = 0$

Από αυτό θα έπεται ότι $\mu(B) = 0$.

Παρατηρούμε ότι:

(1) $E^f_{a,b} = T^{-1}(E^f_{a,b})$ επειδή f_*, f^* είναι αναλλοίωτες.

(2) $E^{-f}_{-b,-a} = E^{f}_{a,b}$, επειδή $(-f)^* = -f_*$, $(-f)_* = -f^*$

και $E^{-f}_{-b,-a} = \{x \in X \,/\, (-f)_* < -b,\ (-f)^* > -a\} =$

$= \{x \in X \,/\, -f^* < -b,\ -f_* > -a\} = E^{f}_{a,b}$

(3) $E^{f}_{a,b} \subseteq B^{f}_{b}$, επειδή αν $x \in E^{f}_{a,b}$ τότε $f^*(x) > b \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \limsup\limits_{n\to\infty} A_n f(x) > b \Rightarrow \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n f(x) > b \Leftrightarrow x \in B^*_b$

Από τη μεγιστική ανισότητα (πόρισμα σελ 38) έχουμε:

$b\,\mu(E^f_{a,b}) = b\,\mu(E^f_{a,b} \cap B^f_b) \leq \int_{E^f_{a,b} \cap B^f_b} f\, d\mu = \int_{E^f_{a,b}} f\, d\mu$

$\boxed{\text{μάθημα } 9^\circ \quad 31/10/18}$

Όμοια για την $-f$:

$-a\,\mu(E^{-f}_{-b,-a}) \leq \int_{E^{f}_{-b,-a}} (-f)\, d\mu$, δηλαδή:

$-a\mu(E^f_{a,b}) \leq -\int_{E^f_{a,b}} f\, d\mu$

άρα τελικά $b\,\mu(E^f_{a,b}) \leq \int_{E^f_{a,b}} f\, d\mu \leq a\,\mu(E^f_{a,b})$

Αν $a < b$ τότε πρέπει $\mu(E^f_{a,b}) = 0$. Άρα $\mu(B) = \mu\Big(\bigcup\limits_{\substack{a<b \\ a,b \in \mathbb{Q}}} E^f_{a,b}\Big) \leq$

$\leq \sum\limits_{\substack{a,b \in \mathbb{Q} \\ a<b}} \mu(E^f_{a,b}) = 0$

Άρα το $\lim\limits_n n^{-1} S_n f(x)$ υπάρχει μ-σ.π.

Ορίζουμε $\tilde{f} = f_*$. Τότε $n^{-1} S_n f \to \tilde{f}$ μ-σ.π. και η $\tilde{f}$ είναι αναλλοίωτη.

$\int |\tilde{f}|\, d\mu = \int \lim\limits_n |n^{-1} S_n f|\, d\mu \overset{\text{Fatou}}{\leq} \liminf\limits_{n\to\infty} \int \frac{1}{n} |S_n f|\, d\mu \leq$

$\leq \liminf\limits_{n\to\infty} \int \frac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} |f \circ T^k|\, d\mu = \liminf\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \int |f|\, d\mu =$

$= \int |f|\, d\mu = \|f\|_1 < +\infty$

Μένει: για $A \in \mathcal{A}$ με $A = T^{-1}(A)$ τότε $\int_A f\, d\mu = \int_A \tilde{f}\, d\mu$

Αρκεί να το δείξουμε αυτό για $A = X$. Γιατί τότε το εφαρμόζουμε αυτό στο σύστημα $(A, \mathcal{A}_A, \mu_A, T_A)$ και έχουμε το ζητούμενο για αυθαίρετο αναλλοίωτο A.

Ορίζουμε $D^f_{k,n} := \{x \in X / \frac{k}{n} \le f^*(x) < \frac{k+1}{n}\}$, $k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$

Έχουμε (1) $D^f_{k,n} = T^{-1}(D^f_{k,n})$

(2) $D^f_{k,n} \subseteq B^f_{\frac{k}{n}-\varepsilon}$ $\forall \varepsilon > 0$

άρα $\int_{D^f_{k,n}} f\,d\mu = \int_{D^f_{k,n} \cap B^f_{\frac{k}{n}-\varepsilon}} f\,d\mu \overset{\text{μεγιστική ανισότητα}}{\geq} \left(\frac{k}{n} - \varepsilon\right) \mu\left(D^f_{k,n} \cap B^f_{\frac{k}{n}-\varepsilon}\right) =$

$= \left(\frac{k}{n} - \varepsilon\right) \mu(D^f_{k,n})$ $\forall k, n, \varepsilon$. Επομένως $\int_{D^f_{k,n}} f\,d\mu \geq \frac{k}{n} \mu(D^f_{k,n})$

$\forall k \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}$

Έχουμε ότι $\int_{D^f_{k,n}} f\,d\mu \geq \frac{k}{n} \mu(D^f_{k,n}) \geq \int_{D^f_{k,n}} (f^* - \frac{1}{n})\,d\mu =$

$= \int_{D^f_{k,n}} f^*\,d\mu - \frac{1}{n} \mu(D^f_{k,n})$ $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Αθροίζουμε ως προς k : $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{D^f_{k,n}} f\,d\mu \geq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{D^f_{k,n}} f^*\,d\mu + \frac{1}{n} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mu(D^f_{n,k})$

Έχουμε ότι $D^f_{k,n}$ αποτελούν διαμέριση του X. άρα :

$\int_X f\,d\mu \geq \int_X f^*\,d\mu - \frac{1}{n} \mu(X)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Επομένως $\int_X f\,d\mu \geq \int_X f^*\,d\mu = \int_X \tilde{f}\,d\mu$

Όμοια για την $-f$: $\int_X -f\,d\mu \geq \int_X (-f)^*\,d\mu = -\int_X f_*\,d\mu =$

$= -\int_X \tilde{f}\,d\mu$. Επομένως $\int_X f\,d\mu = \int_X \tilde{f}\,d\mu$

Παρατηρήσεις

1) Αν $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ χώρος πιθανότητας και $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ σ-υποάλγεβρα και $f \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ τότε $\exists\, g \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ και g $\mathcal{G}$-μετρήσιμη τ.ω. $\int_G g\,d\mu = \int_G f\,d\mu$ $\forall G \in \mathcal{G}$

απόδειξη Θεωρούμε το μέτρο $V(G) = \int_G f\,d\mu$. Επίσης $V << \mu|_{\mathcal{G}}$.

άρα από το Θεώρημα Radon Nikodym στον χώρο $(\Omega, \mathcal{Z})$ υπάρχει g που να είναι $\mathcal{Z}$-μετρήσιμη τ.ω. $v(G) = \int_G g \, d\mu \quad \forall G \in \mathcal{Z}$

και επιπλέον επειδή τα $\mu|\mathcal{Z}$ και v είναι πεπερασμένα η g είναι μ-ολοκληρώσιμη. Η g λέγεται δεσμευμένη μέση τιμή της f ως προς την σ-άλγεβρα $\mathcal{Z}$ και συμβολίζεται $g = E(f|\mathcal{Z})$

Η σχέση $\int_A f \, d\mu = \int_A \tilde{f} \, d\mu \quad \forall A \in \mathcal{A}$ με $A = T^{-1}(A)$ δείχνει ότι

$\tilde{f} = E(f|\mathcal{E}_\mu)$ όπου $\mathcal{E}_\mu = \{A \in \mathcal{A} \mid \mu(A \triangle T^{-1}(A)) = 0\}$

Η σχέση $\int_A f \, d\mu = \int_A \tilde{f} \, d\mu$ ισχύει $\forall A \in \mathcal{E}_\mu$.

απόδειξη: Αν $A \in \mathcal{E}_\mu$ το $\limsup_n T^{-n}(A) = A_\infty$ είναι T-αναλλοίωτο και $\mu(A \triangle A_\infty) = 0$. Οπότε για $A \in \mathcal{E}_\mu$ $\int_A f \, d\mu = \int_{A_\infty} f \, d\mu \overset{\text{Birkoff}}{=} \int_{A_\infty} \tilde{f} \, d\mu = \int_A \tilde{f} \, d\mu$

2) Το Θεώρημα Birkhoff ισχύει και για χώρους $(X, \mathcal{A}, \mu)$ σ-πεπερασμένους με τον τελευταίο ισχυρισμό να ισχύει ως εξής:

$\forall A \in \mathcal{A}$ με $T^{-1}(A) = A$ και $\mu(A) < \infty$ έχουμε ότι $\int_A f \, d\mu = \int_A \tilde{f} \, d\mu$

Η απόδειξη του Θεωρήματος για μ σ-πεπερασμένο είναι ακριβώς ίδια με την περίπτωση $\mu(X) < +\infty$ αρκεί ν.δ.ο. $\mu(E^f_{\alpha,\beta}) < +\infty$ για να μπορούμε να εφαρμόσουμε μετά την μεγιστική ανισότητα.

Θεωρούμε ένα $E^f_{\alpha,\beta}$. Έστω $C \subseteq E^f_{\alpha,\beta}$ με $\mu(C) < +\infty$. Θεωρούμε την $g = f - \beta \mathbb{1}_C \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$. Παρατηρούμε ότι αν $x \in C$ τότε $x \in E^f_{\alpha,\beta}$ τότε $x \in B^f_\beta$ και υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\frac{1}{n} S_n f(x) > \beta$ και τότε γι αυτό το n έχουμε ότι $S_n f(x) > n\beta \geq \beta \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}_C \circ T^k$

και επομένως $S_n g(x) > 0$. Επομένως $C \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X \mid S_n g(x) > 0\}$

$\int_{\{x \in X \mid S^* g(x) > 0\}} g \, d\mu \geq 0$ από το μεγιστικό εργοδικό Θεώρημα.

$$\int_{\{x\in X / S^*g(x)>0\}} f \, d\mu \geq b\,\mu(C\cap\{S^*g(x)>0\}) = b\,\mu(C)$$

$$\int |f|\,d\mu \geq \int_{\{x\in X/S^*g(x)>0\}} |f| \, d\mu \geq \int_{\{x\in X/S^*g(x)>0\}} f \, d\mu \geq b\,\mu(C).$$

• Αν $b>0$ έχουμε ότι $\mu(C) \leq \frac{1}{b}\|f\|_1$. Επειδή ο χώρος είναι σ-πεπερασμένος $\exists\, X_1 \subseteq X_2 \subseteq \dots$ τ.ω. $\mu(X_n)<+\infty$ $\forall n$ και $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$. Οπότε $\mu(E^f_{a,b}) = \lim_{n\to\infty}\mu(E^f_{a,b}\cap X_n) \leq \frac{1}{b}\|f\|_1 < +\infty$

• Αν $b\leq 0$, $a<b\leq 0$ άρα $-a>0$. $\mu(E^f_{a,b}) = \mu(E^{-f}_{-b,-a}) \leq$
$\leq -\frac{1}{a}\|-f\|_1 < +\infty$.

3) Όταν $\mu(X)=+\infty$ και το σύστημα είναι εργοδικό (δηλ. $A=T^{-1}(A) \Rightarrow$ $\Rightarrow \mu(A)=0$ ή $\mu(X\setminus A)=0$) τότε για $f\in L^1(X,\mathcal{A},\mu)$ $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\circ T^k \to \tilde{f}$

και πρέπει $\tilde{f}=0$ μ-σ.π. επειδή $\tilde{f}$ είναι σταθερή μ-σ.π. και στον L^1.

Εφαρμογές Θεωρήματος Birkhoff

Πρόταση Έστω $(X,\mathcal{A},\mu,T)$ σ.δ.μ. Τότε το σύστημα είναι εργοδικό ανν $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\mu(A\cap T^{-k}(B)) \to \mu(A)\cdot\mu(B)$, $\forall A,B\in\mathcal{A}$

απόδειξη Έστω ότι το σύστημα είναι εργοδικό, και έστω $A,B\in\mathcal{A}$.
Από το Θ. Birkhoff $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}_B\circ T^k \to \mu(B)$ μ-σ.π.

Έπεται ότι $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{1}_A\cdot \mathbb{1}_B\circ T^k \to \mu(B)\mathbb{1}_A$ μ-σ.π.

$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{1}_A\cdot\mathbb{1}_B\circ T^k\right| \leq 1$ παντού.

Από Θ. κυριαρχημένης σύγκλισης $\int \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{1}_A \mathbb{1}_B\circ T^k d\mu \to \int \mu(B)\mathbb{1}_A\, d\mu$

δηλ. $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\mu(A\cap T^{-k}(B)) \to \mu(B)\mu(A)$.

αντίστροφα, έστω ότι η σύγκλιση ισχύει $\forall A, B \in \mathcal{A}$. Έστω $A \in \mathcal{A}$ με $A = T^{-1}(A)$. Εφαρμόζουμε τη σύγκλιση με A και B το A πάλι.

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mu(\underbrace{A \cap T^{-k}(A)}_{=A\ \forall k}) \to \mu(A)^2$$ Άρα $\mu(A) = \mu(A)^2$ άρα $\mu(A) \in \{0,1\}$

2^{o} τρόπος: Έστω $A, B \in \mathcal{A}$ με $\mu(A)\mu(B) > 0$. Έχουμε:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mu(A \cap T^{-k}(B)) \to \mu(A)\mu(B) > 0.$$

Πρέπει $\mu(A \cap T^{-k}(B)) > 0$ για κάποιο $k \in \mathbb{N}$. Από χαρακτηρισμό εργοδικότητας το σύστημα είναι εργοδικό.

Θεώρημα (L^p εργοδικό Θεώρημα) μάθημα 10° 5/11/18

Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ σ.δ.μ. και $f \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$, όπου $1 \leq p < +\infty$. Τότε υπάρχει $\tilde{f} \in L^p$ τ.ω.:

$$\left\| \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k - \tilde{f} \right\|_p \to 0$$, και η $\tilde{f}$ είναι αναλλοίωτη σ.π.

απόδειξη: Έστω $p \in [1, +\infty)$ και έστω $f \in L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$. Τότε $f \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ άρα υπάρχει $\tilde{f} \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ τ.ω. $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k \to \tilde{f}$ μ-σ.π.

Έχουμε ότι $\|\tilde{f}\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ οπότε $\left|\frac{1}{n} S_n f - \tilde{f}\right|^p \leq 2^p \|f\|_\infty^p$ σ.π.

Άρα από Θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης $\int \left|\frac{1}{n} S_n f - \tilde{f}\right|^p d\mu \to 0$

δηλ. $\left\|\frac{1}{n} S_n f - \tilde{f}\right\|_p \to 0$.

Έστω $f \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$. Τότε $f_n = \mathbb{1}_{[-n,n]} \circ f$, $n \in \mathbb{N}$ τείνουν στην f στον L^p. $\|f_n - f\|_p^p = \int_{\{x / |f(x)| > n\}} |f|^p d\mu \to 0$

από Θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης γιατί $|f|^p \mathbb{1}_{\{x \in X / |f(x)| > n\}} \to 0$ μ-σ.π. και κυριαρχείται από την $|f|^p$ που είναι ολοκληρώσιμη.

Δοθέντος $\varepsilon > 0$ $\exists g \in L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$ τ.ω. $\|f - g\|_p < \varepsilon/3$

Από το πρώτο μέρος έχουμε ότι $\left\|\frac{1}{n} S_n g - \tilde{g}\right\|_p \to 0$.

Άρα $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\left\|\frac{1}{n} S_n g - \tilde{g}\right\|_p < \frac{\varepsilon}{3}$ $\forall n \geq n_0$

$$\frac{1}{n}\|S_n g - S_n f\|_p = \frac{1}{n}\|S_n(f-g)\|_p = \frac{1}{n}\left\|\sum_{k=0}^{n-1}(f-g)\circ T^k\right\|_p \leq$$