αντίστροφα, έστω ότι η σύγκλιση ισχύει $\forall A, B \in \mathcal{A}$. Έστω $A \in \mathcal{A}$ με $A = T^{-1}(A)$. Εφαρμόζουμε τη σύγκλιση με A και B το A πάλι.

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mu(\underbrace{A \cap T^{-k}(A)}_{=A\ \forall k}) \to \mu(A)^2$$ Άρα $\mu(A) = \mu(A)^2$ άρα $\mu(A) \in \{0,1\}$

$2^{o)}$ τρόπος Έστω $A, B \in \mathcal{A}$ με $\mu(A)\mu(B) > 0$. Έχουμε:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mu(A \cap T^{-k}(B)) \to \mu(A)\mu(B) > 0.$$

Πρέπει $\mu(A \cap T^{-k}(B)) > 0$ για κάποιο $k \in \mathbb{N}$. Από χαρακτηρισμό εργοδικότητας το σύστημα είναι εργοδικό.

Θεώρημα (L^p εργοδικό Θεώρημα)

μάθημα 10°
5/11/18

Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ σ.δ.μ. και $f \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$, όπου $1 \leq p < +\infty$. Τότε υπάρχει $\tilde{f} \in L^p$ τ.ω.:

$$\left\| \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k - \tilde{f} \right\|_p \to 0$$, και η $\tilde{f}$ είναι αναλλοίωτη σ.π.

απόδειξη Έστω $p \in [1, +\infty)$ και έστω $f \in L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$. Τότε $f \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ άρα υπάρχει $\tilde{f} \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ τ.ω. $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k \to \tilde{f}$ μ-σ.π.

Έχουμε ότι $\|\tilde{f}\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ οπότε $\left|\frac{1}{n} S_n f - \tilde{f}\right|^p \leq 2^p \|f\|_\infty^p$ σ.π.

Άρα από Θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης $\int \left|\frac{1}{n} S_n f - \tilde{f}\right|^p d\mu \to 0$

δηλ. $\left\|\frac{1}{n} S_n f - \tilde{f}\right\|_p \to 0$.

Έστω $f \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$. Τότε $f_n = f \mathbb{1}_{[-n,n]} \circ f$, $n \in \mathbb{N}$ τείνουν στην f στον L^p. $\|f_n - f\|_p^p = \int_{\{x / |f(x)| > n\}} |f|^p d\mu \to 0$

από Θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης γιατί $|f|^p \mathbb{1}_{\{x \in X / |f(x)| > n\}} \to 0$ μ-σ.π. και κυριαρχείται από την $|f|^p$ που είναι ολοκληρώσιμη.

Δοθέντος $\varepsilon > 0$ $\exists g \in L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$ τ.ω. $\|f - g\|_p < \varepsilon/3$

Από το πρώτο μέρος έχουμε ότι $\left\|\frac{1}{n} S_n g - \tilde{g}\right\|_p \to 0$.

Άρα $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\left\|\frac{1}{n} S_n g - \tilde{g}\right\|_p < \frac{\varepsilon}{3}$ $\forall n \geq n_0$

$$\frac{1}{n}\|S_n g - S_n f\|_p = \frac{1}{n}\|S_n(f-g)\|_p = \frac{1}{n}\left\|\sum_{k=0}^{n-1}(f-g)\circ T^k\right\|_p \leq$$

$\leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \| (f-g) \circ T^k \|_p \overset{\text{διατήρηση μέτρου}}{=\!=\!=} \frac{1}{n} n \|f-g\|_p < \|f-g\|_p < \varepsilon/3$

Τότε $\| \frac{1}{n} S_n f - \frac{1}{m} S_m f \|_p \leq \frac{1}{n} \| S_n f - S_n g \|_p + \frac{1}{m} \| S_m g - S_m f \|_p +$

$+ \| \frac{1}{n} S_n g - \frac{1}{m} S_m g \|_p \leq \|f-g\|_p + \|f-g\|_p + \frac{1}{n} \| S_n g - \tilde{g} \|_p + \frac{1}{m} \| S_m g - \tilde{g} \|_p$
$< \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \frac{4\varepsilon}{3}$, $\forall n, m$ 7ιπο.

Επεται ότι η $\left(\frac{1}{n} S_n f\right)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι βασική ακολουθία στον L^p και αφού ο L^p είναι πλήρης συγκλίνει, και έστω $\tilde{f} \in L^p$ το όριο
$\| \frac{1}{n} S_n f \circ T - \tilde{f} \circ T \|_p = \| \frac{1}{n} S_n f - \tilde{f} \|_p \to 0$

$S_n f \circ T = \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^{k+1} = S_n f - f + f \circ T^n$

$\| \frac{1}{n} S_n f \circ T - \frac{1}{n} S_n f \|_p \leq \frac{1}{n} \|f\|_p + \frac{1}{n} \| f \circ T^n \|_p = \frac{2}{n} \|f\|_p \to 0$
Άρα $\tilde{f} \circ T \overset{L^p}{=} \lim \frac{1}{n} S_n f \circ T \overset{L^p}{=} \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} S_n f = \tilde{f}$, δηλ. $\tilde{f} \circ T = \tilde{f}$ σ.π.

Άλλη απόδειξη του αναλλοίωτου: Σύγκλιση στον $L^p \Rightarrow$ σύγκλιση κατά μέτρο
Σχεδόν παντού σύγκλιση $\Rightarrow$ σύγκλιση κατά μέτρο
Τα όρια κατά μέτρο είναι μοναδικά.
Επεται από αυτά ότι το κατά σημείο όριο της $\frac{1}{n} S_n f$ για $f \in L^p$ είναι ίσο με το L^p όριο $\tilde{f}$. Άρα αφού το κατά σημείο όριο του θεωρήματος Birkhoff είναι αναλλοίωτο και το L^p όριο είναι αναλλοίωτο

Πόρισμα Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ σ.δ.μ. Αν $f \in L^p$ για κάποιο $1 \leq p < +\infty$ τότε $\exists \tilde{f} \in L^p$ αναλλοίωτη σ.π. τ.ω. $\frac{1}{n} S_n f \to \tilde{f}$ σ.π. και στον L^p

Θεώρημα Κανονικών αριθμών Borel
Αν $x \in [0,1)$ τότε $\exists i_n(x) \in \{0,1\}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ τ.ω. $x = \sum_{n=1}^{\infty} i_n(x) 2^{-n}$ και η αναπαράσταση αυτή είναι μοναδική αν απαιτήσουμε η ακολουθία $i_n(x)$ να μην τελειώνει σε όλο 1.
απόδειξη Έστω $T_2(x) = 2x - [2x]$ για $x \in [0,1)$. Τότε
$x = \frac{1}{2} T_2(x) + \frac{1}{2} [2x]$ και $[2x] \in \{0,1\}$. Επίσης $T_2(x) \in [0,1)$

Άρα $x = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} T_2^2(x) + \frac{1}{2}[2T_2(x)]\right) + \frac{1}{2}[2x] = \frac{1}{4} T_2^2(x) + \frac{1}{4}[2T_2(x)] +$

$+ \frac{1}{2}[2x]$, και $[2T_2(x)] \in \{0,1\}$

Επαγωγικά $x = \sum_{k=1}^{n} 2^{-k}[2T_2^{k-1}(x)] + \frac{1}{2^n} T_2^n(x) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

Παίρνοντας όριο $x = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}[2T_2^{k-1}(x)]$, $i_k(x) = [2T^{k-1}(x)]$

Αυτό δείχνει ότι υπάρχει αναπαράσταση.
Για μοναδικότητα: Έστω $x = \sum_{k=1}^{\infty} i_k 2^{-k} = \sum_{n=1}^{\infty} j_n 2^{-n}$

Έστω $m = \min\{n \in \mathbb{N} / i_n \neq j_n\}$
$0 = \sum_{n=1}^{\infty}(i_n - j_n)2^{-n} = \pm 2^{-m} + \sum_{n=m+1}^{\infty}(i_n - j_n)2^{-n}$

Επειδή καμιά ακολουθία δεν τελειώνει σε όλο 1 έχουμε ότι $|i_n - j_n| < 1$ για κάποιο $n > m$. Τότε $\left|\sum_{n=m+1}^{\infty}(i_n - j_n)2^{-n}\right| < \sum_{n=m+1}^{\infty} 2^{-n} = 2^{-m}$

Άρα έχουμε $\pm 2^{-m} + \sum_{n=m+1}^{\infty}(i_n - j_n)2^{-n} = 0$ που είναι άτοπο.

Έπεται ότι $i_n = j_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

Ορισμός Ένας αριθμός $x \in [0,1)$ λέγεται <u>κανονικός</u> αν:
$\frac{1}{n}|\{k \in [1,n] / i_k(x) = 0\}| \to \frac{1}{2}$
όπου $|\cdot|$ συμβολίζει πληθάριθμο.

Θεώρημα Borel-Lebesgue
Σχεδόν κάθε $x \in [0,1)$ είναι κανονικός αριθμός.
<u>απόδειξη</u> Έστω $x \in [0,1)$. $i_1(x) = 0 \Leftrightarrow x \in [0,1/2)$, $x = \sum_{n=1}^{\infty} i_n(x) 2^{-n}$
$T_2(x) = 2x = 2\sum_{n=2}^{\infty} i_n(x) 2^{-n} = \sum_{n=2}^{\infty} i_n(x) 2^{-(n-1)} =$

$= \sum_{n=1}^{\infty} i_{n+1}(x) 2^{-n}$. Από $i_1(T_2(x)) = i_2(x)$ (για $x \in [0,1/2)$)

Αν $x \in [1/2, 1)$: $T_2(x) = 2x - 1 = \dots = \sum_{n=1}^{\infty} i_{n+1}(x) \cdot 2^{-n}$

Γενικά δηλαδή $i_1(T(x)) = i_2(x)$. Επαγωγικά $i_1(T^k(x)) = i_{k+1}(x)$.

$\frac{1}{n}\left|\{k\in[1,n] / i_k(x)=0\}\right| = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{\{0\}}(i_k(x)) =$

$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{\{0\}}(i_1(T^{k-1}(x))) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}_{(0,1/2)}(T^{k-1}(x)) \to \int \mathbb{1}_{(0,1/2)}(x)\,dx = \frac{1}{2}$

Εφαρμογή σε συνεχή κλάσματα

Κάθε $x\in[0,1]\setminus\mathbb{Q}$ έχει μοναδική αναπαράσταση:

$x = \cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{\ddots}}}$, όπου $a_i\in\mathbb{N}$ $\forall i\in\mathbb{N}$.

Αν $T:[0,1]\setminus\mathbb{Q}\to[0,1]\setminus\mathbb{Q}$, $T(x)=\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]$ τότε $x = \frac{1}{\left[\frac{1}{x}\right]+T(x)}$

και $a_1 = \left[\frac{1}{x}\right]$. Επαγωγικά $a_2 = \left[\frac{1}{T(x)}\right], \dots, a_k(x) = \left[\frac{1}{T^{k-1}(x)}\right]$

Πρόταση Για σχεδόν κάθε $x\in[0,1]\setminus\mathbb{Q}$ $\frac{1}{n}\left|\{k\in[1,n] / a_k(x)=j\}\right| \to$
$\to \frac{1}{\ln 2}\ln\frac{(j+1)^2}{j(j+2)}$

απόδειξη Η T διατηρεί το μέτρο $d\mu(x) = \frac{1}{\ln 2}\frac{dx}{1+x}$, $x\in[0,1]\setminus\mathbb{Q}$

Δηλ. $(X,\mathcal{A},\mu,T)$ σδ.μ. ($X=[0,1]\setminus\mathbb{Q}$, $\mathcal{A}=\mathcal{B}(X)$)

Έχουμε ότι $a_k(x) = a_1(T^{k-1}(x))$. Άρα $\frac{1}{n}\left|\{k\in[1,n] / a_k(x)=j\}\right| =$

$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{1}_{\{j\}}(a_k(x)) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{1}_{\{j\}}(a_1(T^{k-1}(x))) =$

$\left[a_1(x)=j \Leftrightarrow \left[\frac{1}{x}\right]=j \Leftrightarrow \frac{1}{j+1} < x \le \frac{1}{j}\right]$

$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{1}_{\left(\frac{1}{j+1},\frac{1}{j}\right]}(T^{k-1}(x)) \xrightarrow[\text{Birkhoff}]{\mu\text{-σ.π.}} \int \mathbb{1}_{\left(\frac{1}{j+1},\frac{1}{j}\right]}(x)\,d\mu(x)$

$= \int_{\frac{1}{j+1}}^{\frac{1}{j}} \frac{1}{\ln 2}\frac{dx}{x+1} = \frac{1}{\ln 2}\ln\frac{\frac{1}{j}+1}{\frac{1}{j+1}+1} = \frac{1}{\ln 2}\ln\frac{(j+1)^2}{j(j+2)}$

Παίρνουμε το αποτέλεσμα για Lebesgue σχεδόν κάθε x γιατί τα μ και το μέτρο Lebesgue έχουν τα ίδια σύνολα μέτρου μηδέν.

Εφαρμογή 2 $[a_1(x), \dots a_n(x)]^{1/n} \longrightarrow \frac{1}{\ln 2} \prod_{j=1}^{\infty} \left[\left(\frac{(j+1)^2}{j(j+2)} \right)^{\ln j} \right]$

απόδειξη

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln(a_k(x)) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln(a_1(T^{k-1}(x))) \xrightarrow{\mu - \sigma.\pi.} \int \ln a_1(x)\, d\mu(x) =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \ln j \int_{\frac{1}{j+1}}^{\frac{1}{j}} d\mu(x) = \frac{1}{\ln 2} \sum_{j=1}^{\infty} \ln j \ln \left(\frac{\frac{1}{j}+1}{\frac{1}{j+1}+1} \right) =$$

$$= \frac{1}{\ln 2} \sum_{j=1}^{\infty} \ln j \left(\ln \frac{(j+1)^2}{j(j+2)} \right) = \frac{1}{\ln 2} \sum_{j=1}^{\infty} \ln \left[\frac{(j+1)^2}{j(j+2)} \right]^{\ln j} = \frac{1}{\ln 2} \ln \prod_{j=1}^{\infty} \left[\left(\frac{(j+1)^2}{j(j+2)} \right)^{\ln j} \right]$$

Ισχυρός νόμος των μεγάλων αριθμών

Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ χώρος πιθανότητας και $\xi_1, \xi_2, \dots : \Omega \to \mathbb{R}$ Borel μετρήσιμες συναρτήσεις. (Θα μπορούσαμε να έχουμε $\xi_i : \Omega \to S$ όπου $(S, \mathcal{S})$ αυθαίρετος μετρήσιμος χώρος). Η ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $\xi_1, \xi_2, \dots$ λέγεται στοχαστική διαδικασία.

Έστω $X = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{ \underset{\sim}{x} = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} / x_n \in \mathbb{R} \ \forall n \in \mathbb{N} \}$

$\mathcal{A} = \sigma\left(\{ \{ \underset{\sim}{x} \in X / x_1 \in B_1, \dots, x_n \in B_n \} / n \in \mathbb{N}, B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \} \right) =$

$= \sigma(\{ \Pi_n / n \in \mathbb{N} \})$ όπου $\Pi_n(x_1, x_2, \dots) = x_n \ \forall n$, η προβολή στην n συντεταγμένη. Θεωρούμε $\underset{\sim}{\xi} : \Omega \to X$ όπου $\underset{\sim}{\xi}(\omega) = (\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \dots)$

Η $\underset{\sim}{\xi}$ είναι μετρήσιμη ως προς τις σ-άλγεβρες $\mathcal{F}$ και $\mathcal{A}$. Πράγματι,

$\underset{\sim}{\xi}^{-1}(\{ \underset{\sim}{x} \in X / x_1 \in B_1, \dots, x_n \in B_n \}) = \{ \omega \in \Omega / \xi_1(\omega) \in B_1, \dots, \xi_n(\omega) \in B_n \}$

$= \bigcap_{k=1}^{n} \{ \omega \in \Omega / \xi_k(\omega) \in B_k \} \in \mathcal{F}$ και επειδή τα σύνολα αυτά

παράγουν την σ-άλγεβρα $\mathcal{A}$ αυτό αποδεικνύει μετρησιμότητα της $\underset{\sim}{\xi}$.

Ορίζουμε μ στον $(X, \mathcal{A})$ από την $\mu := \underset{\sim}{\xi}_* P$, δηλαδή:

$\mu(A) = P(\{ \omega \in \Omega / \underset{\sim}{\xi}(\omega) \in A \})$

$T : X \to X$ είναι το shift. $(T\underset{\sim}{x})_n = x_{n+1} \ \forall n \in \mathbb{N} \ \forall \underset{\sim}{x} \in X$.

Όταν έχουμε στάσιμη διαδικασία τότε η T διατηρεί το μ.

Στάσιμη θα πει $P(\xi_1 \in A_1, \xi_2 \in A_2, \dots, \xi_n \in A_n) =$

$= P(\xi_{m+1} \in A_1, \xi_{m+2} \in A_2, \dots, \xi_{m+n} \in A_n) \ \forall m, n \in \mathbb{N}, A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

Για μια τέτοια η T διατηρεί το μ. Πράγματι:

$\mu(T^{-1}\{ \underset{\sim}{x} \in X / x_1 \in A_1, \dots, x_n \in A_n \}) = \mu(\{ \underset{\sim}{x} \in X / x_2 \in A_1, \dots, x_{n+1} \in A_n \}) =$

$= P(\{\omega\in\Omega \,/\, \xi_2(\omega)\in A_1,\dots,\xi_{n+1}(\omega)\in A_n\}) = P(\{\omega\in\Omega \,/\, \xi_1(\omega)\in A_1,\dots,\xi_n(\omega)\in A_n\})$
$= \mu(\{x\in X \,/\, x_1\in A_1,\dots,x_n\in A_n\})$. Από θεώρημα Birkhoff, για $f\in L^1(X,\mathcal{A},\mu)$ $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\circ T^k(\underset{\sim}{x}) \to \tilde{f}(\underset{\sim}{x})$ μ-σ.π. για κάποια

$\tilde{f}\in L^1(X,\mathcal{A},\mu)$ Δηλ. $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_{k+1}(\omega),\xi_{k+2}(\omega),\dots) \to \tilde{f}(\xi_1(\omega),\xi_2(\omega),\dots)$

για P-σχεδόν κάθε ω.
Αν το σύστημα είναι εργοδικό $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_{k+1}(\omega),\xi_{k+2}(\omega),\dots) \to \underbrace{\int f\circ\underset{\sim}{\xi}\, dP}_{=\int f\, d\mu}$

Ειδική περίπτωση $f(\underset{\sim}{x}) = x_1$. $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\xi_{k+1} \to \int \xi_1 dP = E(\xi_1)$

όταν $\xi_1\in L^1(\Omega,\mathcal{F},P)$. Αυτός είναι ο ισχυρός νόμος των μεγάλων αριθμών. Το θεώρημα Birkhoff είναι πιο γενικό.

άλλο παράδειγμα Αν $\xi_i\in L^\infty(\Omega,\mathcal{F},P)$ ορίζουμε $f(\underset{\sim}{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k\cdot 2^{-k}$

αν $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ φραγμένη. Αλλιώς $f(\underset{\sim}{x})=0$. Από θεώρημα Birkhoff
$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j\geq k} 2^{-j}\xi_j \to \int f\circ\xi\, dP = E\xi_1$

Αν επιπλέον $\xi_1,\xi_2,\dots$ ανεξάρτητες, δηλ. $P(\xi_1\in A_1,\xi_2\in A_2,\dots,\xi_n\in A_n) =$
$= P(\xi_1\in A_1)P(\xi_2\in A_2)\cdots P(\xi_n\in A_n)$ $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall A_1,A_2,\dots,A_n\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$
Τότε το σύστημα είναι εργοδικό. Πράγματι, ορίζουμε:
$\mathcal{T} = \bigcap_{n=1}^{\infty} T^{-n}\mathcal{A}$, όπου $T^{-n}\mathcal{A} = \{T^{-n}(A) \,/\, A\in\mathcal{A}\}$, και η $\mathcal{T}$ λέγεται

σ-άλγεβρα ουράς. Ο Νόμος 0-1 Kolmogorov: αν έχω $\xi_1,\xi_2,\dots$ ανεξάρτητες τ.μ. τότε $\mu(A)\in\{0,1\}$ $\forall A\in\mathcal{T}$
Αν $A = T^{-1}(A)$ τότε $A\in\mathcal{T}$ άρα $\mu(A)\in\{0,1\}$. Άρα μ εργοδικό.

Εργοδικότητα Markov Shifts

μάθημα 11
7/11/18

S πεπερασμένο σύνολο

P $|S|\times|S|$ πίνακας, στοχαστικός, δηλ $P_{ss'} \geq 0$ $\forall s,s' \in S$ και $\sum_{s'\in S} P_{ss'} = 1$ $\forall s\in S$.

$p=(p_s)_{s\in S}$, $p_s \geq 0$ $\forall s\in S$ $\sum_{s\in S} p_s = 1$ αριστερό ιδιοδιάνυσμα για τον P για την ιδιοτιμή 1: $\sum_{i\in S} p_i P_{ij} = p_j$ $\forall j\in S$

$X = S^{\mathbb{N}\cup\{0\}}$, $\mathcal{A} = \sigma(\{\underset{\sim}{x}\in X / x_0 = i_0, \dots, x_n = i_n\} / n\in\mathbb{N}\cup\{0\}, i_0,\dots,i_n\in S)$

$\mu(\{x\in X / x_0 = i_0,\dots, x_n = i_n\}) = p_{i_0} P_{i_0 i_1} P_{i_1 i_2} \cdots P_{i_{n-1} i_n}$

$T: X\to X$ shift, $(X,\mathcal{A},\mu,T)$ σ.δ.μ.

Παρατήρηση $\mu(\{\underset{\sim}{x}\in X / x_0 = i_0\}) = p_{i_0}$

$\mu(\{\underset{\sim}{x}\in X / x_0 = i_0, x_1 = i_1\}) = p_{i_0} P_{i_0 i_1}$

$\mu(\{\underset{\sim}{x}\in X / x_0 = i, x_2 = j\}) = \sum_{k\in S} \mu\{\underset{\sim}{x}\in X / x_0 = i, x_1 = k, x_2 = j\}) =$

$= \sum_{k\in S} p_i P_{ik} P_{kj} = p_i (P^2)_{ij}$

Επαγωγικά: $\mu(\{\underset{\sim}{x}\in X / x_0 = i, x_n = j\}) = p_i \cdot P_{ij}^{n}$

Υποθέτουμε ότι $p_s > 0$ $\forall s\in S$.

Λήμμα

1) $Q_{ij} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P_{ij}^{k}$ υπάρχει $\forall i,j\in S$.

2) $Q\cdot P = P\cdot Q = Q^2 = Q$

3) Κάθε ιδιοδιάνυσμα του P για την ιδιοτιμή 1 είναι ιδιοδιάνυσμα του Q

4) O Q είναι στοχαστικός πίνακας.

απόδειξη Συμβολισμός: $[i] = \{\underset{\sim}{x}\in X / x_0 = i\}$, $i\in S$

(1) Εργοδικό Θεώρημα: $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}_{[j]}\circ T^k \to \tilde{\mathbb{1}}_{[j]}$

άρα $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}_{[i]} \mathbb{1}_{[j]}\circ T^k \to \tilde{\mathbb{1}}_{[j]} \mathbb{1}_{[i]}$

Απο θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης έχουμε:

$\int \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}_{[i]} \mathbb{1}_{[j]}\circ T^k \to \int \tilde{\mathbb{1}}_{[j]} \mathbb{1}_{[i]}\, d\mu$. Δηλαδή:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\mu([i]\cap T^{-k}[j]) \to \int \widehat{1}_{[j]}\, 1_{[i]}\, d\mu \quad , \text{δηλαδή}$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\mu(\{\underset{\sim}{x}\in X / x_0 = i, x_k = j\}) \to \int \widetilde{1}_{[j]}\cdot 1_{[i]}\, d\mu \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} p_i \cdot P_{ij}^{k} \to \int 1_{[i]}\widetilde{1}_{[j]}\, d\mu$$

Ορίζουμε $Q_{ij} = \frac{1}{p_i}\int 1_{[i]}\widetilde{1}_{[j]}\, d\mu$

(2) $QP = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} P^k \cdot P = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} P^{k+1} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} P^k + \frac{1}{n}P^n - \frac{1}{n}P^0 \overset{*}{=} \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} P^k + 0 + 0 = Q$

(*) Παρατήρηση: Ο P^n είναι επίσης στοχαστικός.

Για $n=1$ το έχουμε από υπόθεση, και αν ισχύει για κάποιο n:

$\sum\limits_j P_{ij}^{n+1} = \sum\limits_j \underbrace{\sum\limits_{k\in S} P_{ik}^{n}}_{=1 \text{ γιατί } P^n \text{ στοχαστικός από υπόθεση}} P_{kj} = \sum\limits_j P_{kj} = 1$

Επίσης $P_{ij}^{n+1} = \sum\limits_k P_{ik}^n P_{kj} > 0 \quad \forall i,j$

Όμοια $PQ = Q$

$Q^2 = Q\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} P^k = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} QP^k = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} Q = Q$

(3) Έστω V ένα αριστερό ιδιοδιάνυσμα για τον P για την ιδιοτιμή 1.

$VQ = V\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} P^k = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} VP^k = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} V = V$

Ίδια για δεξιά ιδιοδιανύσματα.

(4) Q στοχαστικός αν $Q\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$ δηλ. αν το $\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$ είναι (δεξιό) ιδιοδιάνυσμα του Q για την ιδιοτιμή 1. Από το (3), αφού $\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$ είναι ιδιοδιάνυσμα για τον P είναι και για τον Q.

Θεώρημα Τα εξής είναι ισοδύναμα: (υπό την προϋπόθεση $p_s > 0 \ \forall s \in S$)

1) $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ εργοδικό
2) Όλες οι γραμμές του Q είναι ίδιες
3) $Q_{ij} > 0 \quad \forall i,j \in S$
4) Ο P είναι <u>ανάγωγος</u> (δηλ. $\forall i,j \in S \ \exists n := n(i,j) \in \mathbb{N}$ τ.ω. $P_{ij}^{n} > 0$)
5) Η ιδιοτιμή 1 για τον P είναι απλή, δηλ. ο ιδιόχωρος της έχει διάσταση 1.

<u>απόδειξη</u> 1) ⇒ 2) από το εργοδικό Θεώρημα όταν το σύστημα είναι εργοδικό $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int 1_{[i]} 1_{[j]} \circ T^k d\mu = \int 1_{[i]} \mu([j]) d\mu = \mu[i]\mu[j]$

Επομένως $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P_{ij}^{k} = \frac{1}{p_i} \underbrace{\mu[i]}_{p_i} \cdot \underbrace{\mu[j]}_{p_j} = p_j$

Στην εργοδική περίπτωση $Q_{ij} = p_j \quad \forall i,j \in S$

2) ⇒ 3) Έστω λοιπόν ότι $q_j = Q_{ij} \quad \forall i,j \in S$ για κάποιο q_j.

Το p είναι αριστερό ιδιοδιάνυσμα για τον P για την ιδιοτιμή 1 άρα και για τον Q, δηλ. $p_j = \sum_{i \in S} p_i Q_{ij} \quad \forall j \in S \Leftrightarrow p_j = \underbrace{\sum_{i\in S} p_i}_{1} q_j = q_j \ \forall j \in S$

Επομένως $Q_{ij} = q_j = p_j > 0 \quad \forall j \in S$

3) ⇒ 4) Έστω ότι $Q_{ij} > 0 \quad \forall i,j \in S$.

Έστω $i,j \in S$. $0 < Q_{ij} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P_{ij}^{k}$. Έπεται ότι $\exists k \in \mathbb{N}$ τ.ω.

$P_{ij}^{k} > 0$.

4) ⇒ 3) $\forall i \in S$ ορίζουμε $S_i = \{ j \in S / Q_{ij} > 0 \}$. $S_i \neq \emptyset$ επειδή ο Q είναι στοχαστικός. Έστω $k \in S_i$ δηλ. $Q_{ik} > 0$. Έστω $j \in S$.

$\exists n \in \mathbb{N}$ τ.ω. $P_{kj}^{n} > 0$. Επειδή $Q \cdot P = Q \Rightarrow \dots QP^n = Q$

Άρα $Q_{ij} = (QP^n)_{ij} = \sum_{m \in S} Q_{im} P_{mj}^{n} \geq Q_{ik} P_{kj}^{n} > 0$

Δείξαμε ότι $\forall i \in S \ S_i = S$. Δηλ. $Q_{ij} > 0 \quad \forall i,j \in S$

3) ⇒ 2) Ορίζουμε $q_j^* = \max_{i \in S} Q_{ij}$. Έστω ότι για κάποιο $j \in S \ \exists i \in S$ τ.ω. $Q_{ij} < q_j^*$. Γνωρίζουμε ότι $Q^2 = Q$. Έστω $k \in S$. $Q_{kj} = (Q^2)_{kj} =$

$= \sum_{m \in S} Q_{km} Q_{mj} < \underbrace{\sum_{m\in S} Q_{km}}_{=1, \text{ διότι } Q \text{ στοχαστικός}} q_j^* = q_j^*$ άτοπο γιατί $q_j^* = \max_{k \in S} Q_{kj}$

2) ⇒ 1) Αρκεί ν.δ.ο. $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\mu(A\cap T^{-k}(B)) \to \mu(A)\mu(B)$

για $A=\{\underset{\sim}{x}\in X / x_0=i_0,\dots,x_n=i_n\}$, $B=\{\underset{\sim}{x}\in X / x_0=j_0,\dots,x_m=j_m\}$

για $n,m\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ και $i_0,i_1,\dots,i_n,j_0,j_1,\dots,j_m\in S$ επειδή αυτά τα σύνολα είναι ημιάλγεβρα που παράγει την $\mathcal{A}$. (Από άσκηση 2, φυλλάδιο 2, το σύστημα θα είναι εργοδικό)

Συμβολισμός: $[i_0,i_1,\dots,i_n]=\{\underset{\sim}{x}\in X / x_0=i_0, x_1=i_1,\dots,x_n=i_n\}$)

Για $k>n$: $\mu([i_0,i_1,\dots,i_n]\cap T^{-k}[j_0,j_1,\dots,j_m])=$

$=\mu(\underset{\sim}{x}\in X / x_0=i_0,\dots,x_n=i_n, x_k=j_0,\dots,x_{k+m}=j_m\})$

$=\sum_{s_1,\dots,s_{k-n-1}\in S}\mu(\{\underset{\sim}{x}\in X / x_0=i_0,\dots,x_n=i_n, x_{n+1}=s_1,\dots,x_{k-1}=s_{k-n-1}, x_k=j_0,\dots,x_{k+m}=j_m\}$

$=\sum_{s_1,\dots,s_{k-n-1}\in S} p_{i_0}P_{i_0i_1}\cdots P_{i_{n-1}i_n}P_{i_ns_1}P_{s_1s_2}\cdots P_{s_{k-n-2}s_{k-n-1}}P_{s_{k-n-1}j_0}P_{j_0j_1}\cdots P_{j_{m-1}j_m}$

$=p_{i_0}P_{i_0i_1}\cdots P_{i_{n-1}i_n}\left(\sum_{s_1,\dots,s_{k-n-1}\in S}P_{i_ns_1}\cdot P_{s_1s_2}\cdots P_{s_{k-n-1}j_0}\right)P_{j_0j_1}\cdots P_{j_{m-1}j_m} =$

$=P_{i_0}P_{i_0i_1}\cdots P_{i_{n-1}i_n}P^{k-n-1}_{i_nj_0}P_{j_0j_1}\cdots P_{j_{m-1}j_m}$

$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\mu([i_0,i_1,\dots,i_n]\cap T^{-k}[j_0,j_1,\dots,j_m])=$

$=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{n}\mu([i_0,i_1,\dots,i_n]\cap T^{-k}[j_0,j_1,\dots,j_m])$ +

$+\frac{1}{N}\sum_{k=n+1}^{N-1}p_{i_0}P_{i_0i_1}\cdots P_{i_{n-1}i_n}P^{k-n-1}_{i_nj_0}P_{j_0j_1}\cdots P_{j_{m-1}j_m} \longrightarrow$

$\longrightarrow 0+p_{i_0}P_{i_0i_1}\cdots P_{i_{n-1}i_n}Q_{i_nj_0}P_{j_0j_1}\cdots P_{j_{m-1}j_m}$ (*)

Επειδή όλες οι γραμμές του Q είναι ίδιες, έστω $Q_{ij}=q_j$ $\forall i,j\in S$

πρέπει $p_j=\sum_{i\in S}p_iQ_{ij}=\underbrace{\sum_{i\in S}p_i}_{1}q_j=q_j=Q_{ij}$ $\forall i,j$

άρα $Q_{i_nj_0}=p_{j_0}$ και επομένως έχω:

(*) $=p_{i_0}P_{i_0i_1}\cdots P_{i_{n-1}i_n}p_{j_0}P_{j_0j_1}\cdots P_{j_{m-1}j_m}=\mu([i_0,i_1,\dots,i_n])\mu([j_0,j_1,\dots,j_m])$

Έπεται ότι το σύστημα είναι εργοδικό.

2) ⇒ 5) Έστω ότι $Q_{ij}=q_j$ $\forall i,j\in S$. Έστω u ένα ιδιοδιάνυσμα του P για την ιδιοτιμή 1. Τότε το u είναι ιδιοδιάνυσμα του Q για την ιδιοτιμή 1 άρα $u=Qu\overset{\text{ισες γραμμές}}{=}\begin{pmatrix}\sum_j q_ju_j\\ \sum_j q_ju_j\\ \vdots\\ \sum_j q_ju_j\end{pmatrix}=\sum_{j\in S}q_ju_j\begin{pmatrix}1\\1\\ \vdots\\1\end{pmatrix}$

Άρα οποιοδήποτε ιδιοδιάνυσμα είναι πολλαπλάσιο του $\begin{pmatrix}1\\1\\ \vdots\\1\end{pmatrix}$ άρα ο ιδιόχωρος της ιδιοτιμής 1 έχει διάσταση 1, δηλαδή η ιδιοτιμή 1 είναι απλή.

5) ⇒ 2). Επειδή $Q^2 = Q$, όλες οι γραμμές του Q είναι αριστερά ιδιοδιανύσματα του Q για την ιδιοτιμή 1.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} \cdots a_{1|S|} \\ \\ \end{pmatrix}}_{Q} \underbrace{\begin{pmatrix} Q \end{pmatrix}}_{Q} = \underbrace{\begin{pmatrix} Q_{11}\ a_{12} \cdots a_{1|S|} \\ \\ \end{pmatrix}}_{Q}$$

άρα όλες είναι πολλαπλάσια ενός διανύσματος και συγκεκριμένα του p.
Άρα όλες οι γραμμές είναι πολλαπλάσια μιας και αφού όλες έχουν άθροισμα 1 γιατί ο Q είναι στοχαστικός, πρέπει να είναι όλες ίσες.

Συνέπεια Όταν $p_s > 0$ $\forall s \in S$ και P είναι ανάγωγος, τότε:
$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, x_{k+1}, \ldots) \to \int f\, d\mu$ από το Θεώρημα Birkhoff.

Παρατήρηση $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = P$, $S = \{1, 2, 3, 4\}$.

Αριστερά ιδιοδιανύσματα: $p = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0)$, $p' = (0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$,
$p'' = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$

Το σύστημα $\mu_{p''}$ δεν είναι εργοδικό γιατί ο P δεν είναι ανάγωγος.
Για τα μ_p, $\mu_{p'}$ δεν εφαρμόζεται το Θεώρημα απ' ωθήσας (διότι θέλουμε $p_s > 0$ $\forall s$)
Το μέτρο μ_p είναι περιορισμένο στον υπόχωρο $X' = \{\underline{x} \in X \,/\, x_n \in \underbrace{\{1,2\}}_{S'}\}$
Το σύστημα μπορεί να μελετηθεί στον υπόχωρο X' με μέτρο που αντιστοιχεί στο ζευγάρι $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ και $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
Άρα καθε ένα από τα $\mu_p, \mu_{p'}$ ορίζουν εργοδικά συστήματα, επειδή ο $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ είναι ανάγωγος.

Mixing

Μάθημα 12°
12/11/18

Εστω $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ σ.δ.μ. Εχουμε δει ότι το σύστημα είναι εργοδικό ανν $\forall A, B \in \mathcal{A}$ $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mu(A \cap T^{-k}(B)) - \mu(A)\mu(B) \longrightarrow 0$ (E)

Ορισμός Το σύστημα είναι (ισχυρά) mixing αν ισχύει:
$\mu(A \cap T^{-n}(B)) \to \mu(A)\mu(B)$ $\forall A, B \in \mathcal{A}$ (M)
Το σύστημα είναι ασθενώς mixing αν ισχύει:
$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} |\mu(A \cap T^{-k}(B)) - \mu(A)\mu(B)| \to 0$ $\forall A, B \in \mathcal{A}$ (AM)

Παρατήρηση (M) $\Rightarrow$ (AM) $\Rightarrow$ (E)
Οι αντίστροφες συνεπαγωγές δεν ισχύουν.

Παράδειγμα Εστω $X = \mathbb{T}$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{T})$, $\mu = \lambda_{\mathbb{T}}$, $T(x) = (x + a \bmod 1)$
Εχουμε δει ότι αν $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ τότε $\exists$ ακολουθία $n_1 < n_2 < \dots$ τ.ω. $n_k a - [n_k a] \to 0$. Αν $a \in \mathbb{Q}$ τότε πάλι ισχύει αυτό γιατί το σύστημα είναι περιοδικό.
Εστω $A = [0, 1/2)$, $B = [0, 1/2)$ $A \cap T^{-n_k}(B) \longrightarrow A$
Επομένως $\mu(A \cap T^{n_k}(B)) \to \mu(A) = \frac{1}{2}$. Όμως $\mu(A)\mu(B) = \frac{1}{4}$.
Άρα το σύστημα δεν είναι mixing. Όμως όταν $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ το σύστημα είναι εργοδικό.

Λήμμα 1 Ενα σ.δ.μ. $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ είναι ασθενώς mixing ανν ικανοποιείται η (AM) $\forall A, B$ σε μια ημιάλγεβρα που παράγει την $\mathcal{A}$.
Όμοιως το σύστημα είναι mixing αν η (M) ισχύει $\forall A, B$ σε μια ημιάλγεβρα που παράγει την $\mathcal{A}$.

Ορισμός Εστω $J \subseteq \mathbb{N}$. Το J έχει πυκνότητα $d(J)$ αν το όριο
$d(J) = \lim_{n \to \infty} \frac{|J \cap [1, n]|}{n}$ υπάρχει. (Αλλιώς μιλάμε για άνω πυκνότητα
$\limsup_{n \to \infty} \frac{|J \cap [1, n]|}{n}$ ή κάτω πυκνότητα $\liminf \frac{|J \cap [1, n]|}{n}$

Λήμμα 2 Έστω $a_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$ φραγμένη ακολουθία. Τότε τα εξής είναι ισοδύναμα:

(1) $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k \to 0$

(2) $\exists\, J \subseteq \mathbb{N}$ με πυκνότητα 0 τ.ω. $\lim\limits_{\substack{n \to \infty \\ n \notin J}} a_n = 0$

(3) $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \to 0$

απόδειξη Την ισοδυναμία (2) $\Leftrightarrow$ (3) την παίρνουμε εφαρμόζοντας την (1) $\Leftrightarrow$ (2) στην a_n^2, $n \in \mathbb{N}$.

1) $\Rightarrow$ 2) $\forall k \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $J_k = \{ n \in \mathbb{N} \,/\, a_n > \frac{1}{k} \}$. Έχουμε ότι:

(i) $J_k \subseteq J_{k+1}$ $k \in \mathbb{N}$

(ii) $d(J_k) = 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$

από Markov

Πράγματι $|J_k \cap [1,n]| = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{1}_{(\frac{1}{k}, \infty)}(a_j) \leq k \sum_{j=1}^{n} a_j$

άρα $\frac{|J_k \cap [1,n]|}{n} \leq k \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_j \to 0$

Επομένως $\forall k \in \mathbb{N}$ υπάρχει $m_k \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\frac{|J_k \cap [1,n]|}{n} < \frac{1}{k}$ $\forall n \geq m_k$

και μπορούμε να επιλέξουμε $m_1 < m_2 < \dots$. Θέτουμε $J = \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k \cap [m_k, m_{k+1})$

Ισχυρισμός 1 $d(J) = 0$

απόδειξη Έστω $n \in \mathbb{N}$ τότε υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ τ.ω. $m_k \leq n < m_{k+1}$. Τότε

$J \cap [1,n] = \bigcup_{j=1}^{k} (J_j \cap [1,n]) \subseteq J_k \cap [1,n]$

άρα $\frac{1}{n} |J \cap [1,n]| \leq \frac{1}{n} |J_k \cap [1,n]| < \frac{1}{k}$

αν $\varepsilon > 0$ διαλέξουμε $k_\varepsilon^{-1} \leq \varepsilon$ και τότε για $n \geq m_{k_\varepsilon}$ θα έχουμε $n \in [m_k, m_{k+1})$ με $k \geq k_\varepsilon$ και τότε $\frac{1}{n} |J \cap [1,n]| < \frac{1}{k} \leq \varepsilon$

Έπεται ότι $\frac{1}{n} |J \cap [1,n]| \to 0$

Ισχυρισμός 2 $\lim\limits_{\substack{n \to \infty \\ n \notin J}} a_n = 0$

απόδειξη Έστω $\varepsilon > 0$ και $k_\varepsilon^{-1} \leq \varepsilon$. Αν $n \geq m_{k_\varepsilon}$ και $n \notin J$, έχουμε ότι

$n \in \bigcap_{k=1}^{\infty} J_k^c \cup [m_k, m_{k+1})^c$. Επεται ότι $n \in J_k^c$ για $k \geq k_\varepsilon$. δηλαδή

$a_n < \frac{1}{k} \leq \frac{1}{k_\varepsilon} < \varepsilon$. Αρα $a_n \xrightarrow[n \notin J]{n\to\infty} 0$

2) ⇒ 1) Εστω $J \subseteq \mathbb{N}$ με $d(J)=0$ τ.ω. $\lim_{\substack{n\to\infty \\ n\notin J}} a_n = 0$. Εστω $\varepsilon > 0$.

$\exists n_1 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $a_n < \frac{\varepsilon}{3}$ $\forall n \geq n_1$ και $n \notin J$

Γράφουμε $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_1} a_k + \frac{1}{n}\sum_{\substack{k=n_1+1 \\ k\in J}}^{n} a_k + \frac{1}{n}\sum_{\substack{k=n_1+1 \\ k\notin J}}^{n} a_k \leq$

$\leq \frac{n_1}{n}\sup_{j\in\mathbb{N}} a_j + \frac{1}{n}\sup_{j\in\mathbb{N}} a_j \, |J\cap[1,n]| + \frac{1}{n}\frac{\varepsilon}{3}(n-n_1)$

Επιλέγουμε $n_2 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\frac{n_1 \cdot \sup_{j\in\mathbb{N}} a_j}{n} < \frac{\varepsilon}{3}$ $\forall n \geq n_2$

Υπαρχει και $n_3 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\frac{|J\cap[1,n]|}{n} < \frac{\varepsilon}{3\sup_{j\in\mathbb{N}} a_j}$ $\forall n \geq n_3$

αν $n_0 = \max\{n_1, n_2, n_3\}$ εχουμε οτι για $n \geq n_0$: $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k < \varepsilon$

Θεώρημα Εστω $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ σ.δ.μ. Τα εξης ειναι ισοδύναμα:

1) Το σύστημα είναι ασθενώς mixing

2) Το σύστημα $(X\times X, \mathcal{A}\otimes\mathcal{A}, \mu\times\mu, T\times T)$ ειναι εργοδικό

3) Το σύστημα $(X\times X, \mathcal{A}\otimes\mathcal{A}, \mu\times\mu, T\times T)$ είναι ασθενώς mixing

4) Για καθε εργοδικο σύστημα $(Y, \mathcal{B}, \nu, S)$ το $(X\times Y, \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}, \mu\times\nu, T\times S)$ είναι εργοδικό.

5) Οι μόνες ιδιοσυναρτήσεις του τελεστή Koopman U_T σαν τελεστής απο τις μετρήσιμες συναρτήσεις στις μετρήσιμες συναρτήσεις είναι οι σταθερές σ.π.

6) $\forall A, B \in \mathcal{A}$ $\exists J_{A,B} \subseteq \mathbb{N}$ με $d(J_{A,B}) = 0$ τ.ω.:

$\lim_{\substack{n\to\infty \\ n\notin J_{A,B}}} \mu(A\cap T^{-n}(B)) \to \mu(A)\mu(B)$

7) $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} |\mu(A\cap T^{-k}(B)) - \mu(A)\mu(B)|^2 \to 0$

Εφαρμογή: Έστω $X = \mathbb{T}$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{T})$, $\mu = \lambda_{\mathbb{T}}$, $T(x) = x + a \pmod 1$

Το σύστημα δεν είναι ασθενώς mixing. Αν ήταν ασθενώς mixing θα έπρεπε το $(X\times X, \mathcal{A}\otimes\mathcal{A}, \mu\times\mu, T\times T)$ να είναι εργοδικό.

Έχουμε ότι $X\times X = \mathbb{T}^2$, $(T\times T)(t,s) = (T(t), T(s)) = (t+a, s+a) \pmod 1$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(t,s) = e^{2\pi i (t-s)}$. Τότε

$f\circ(T\times T)(t,s) = e^{2\pi i (T(t)-T(s))} = e^{2\pi i (t-s)} = f(t,s)$

Επομένως η f είναι $T\times T$ αναλλοίωτη αλλά δεν είναι σταθερή. Άρα το γινόμενο δεν είναι εργοδικό άρα το αρχικό σύστημα δεν είναι mixing.

απόδειξη Θεωρήματος

(1) $\Leftrightarrow$ (6) $\Leftrightarrow$ (7) είναι προφανές από το λήμμα 2

6) $\Rightarrow$ (3) Για να δείξουμε ότι το $(X\times X, \mathcal{A}\otimes\mathcal{A}, \mu\times\mu, T\times T)$ είναι ασθενώς mixing αρκεί ν.δ.ο.

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} |\mu\times\mu(A_1\times A_2 \cap (T\times T)^{-k}(B_1\times B_2)) - \mu\times\mu(A_1\times A_2)\cdot\mu\times\mu(B_1\times B_2)| \to 0 \quad (**)$$

επειδή τα γινόμενα $A\times B$ αποτελούν ημι-άλγεβρα που παράγει την $\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}$. Έστω $A_1, A_2, B_1, B_2 \in \mathcal{A}$. Από υπόθεση $\exists\, J_{A_1,B_1}, J_{A_2,B_2} \subseteq \mathbb{N}$ με πυκνότητα 0 το καθένα τ.ω. $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ n\notin J_{A_i,B_i}}} \mu(A_i \cap T^{-n}(B_i)) = \mu(A_i)\mu(B_i)$, $i=1,2$ $(*)$

Τότε $J = J_{A_1,B_1}\cup J_{A_2,B_2}$ έχει πυκνότητα 0 και για $n\in\mathbb{N}\setminus J$ έχουμε ότι ισχύει η $(*)$ για $i=1,2$. Έπεται ότι $\mu\times\mu(A_1\times A_2 \cap \underbrace{(T\times T)^{-n}(B_1\times B_2)}_{T^{-n}(B_1)\times T^{-n}(B_2)}) =$

$= \mu\times\mu((A_1\cap T^{-n}(B_1)) \times (A_2\cap T^{-n}(B_2))) =$

$= \mu(A_1\cap T^{-n}(B_1))\,\mu(A_2\cap T^{-n}(B_2)) \xrightarrow[n\notin J]{n\to\infty} \mu(A_1)\mu(B_1)\mu(A_2)\mu(B_2) =$

$= \mu\times\mu(A_1\times A_2)\,\mu\times\mu(B_1\times B_2)$

Από το λήμμα 1 έπεται ότι ισχύει η $(**)$

3) $\Rightarrow$ 1) Υποθέτουμε την (3) δηλ. $(X\times X, \mathcal{A}\otimes\mathcal{A}, \mu\times\mu, T\times T)$ είναι ασθενώς mixing. Έστω $A, B\in\mathcal{A}$. Θέλουμε:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} |\mu(A\cap T^{-k}(B)) - \mu(A)\mu(B)| \to 0$$

Εφαρμόζουμε την (3) για τα σύνολα $A\times X$, $B\times X$. Από την (3) έχουμε ότι

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} |\mu\times\mu(A\times X \cap (T\times T)^{-k}(B\times X)) - \mu\times\mu(A\times X)\,\mu\times\mu(B\times X)| \to 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} |\mu\times\mu(A\cap T^{-k}B \times X\cap T^{-k}(X)) - \mu(A)\mu(X)\mu(B)\mu(X)| \to 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} |\mu(A\cap T^{-k}(B))\overset{1}{\mu(X)} - \mu(A)\mu(B)| \to 0$$

1) $\Rightarrow$ 4) Έστω $(Y, \mathcal{B}, \nu, S)$ ένα αυθαίρετο εργοδικό σύστημα. Θέλουμε το $(X\times Y, \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}, \mu\times\nu, T\times S)$ να είναι εργοδικό. Αρκεί ν.δ.ο:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mu\times\nu(A_1\times A_2 \cap (T\times S)^{-k}(B_1\times B_2)) \to \mu(A_1)\nu(A_2)\mu(B_1)\nu(B_2)$$

επειδή τα $A\times B$ είναι ημιάλγεβρα που παράγει την $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mu\times\nu(A_1\times A_2\cap (T\times S)^{-k}(B_1\times B_2)) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mu\times\nu(A_1\cap T^{-k}(B_1)\times A_2\cap S^{-k}(B_2))$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mu(A_1\cap T^{-k}(B_1))\,\nu(A_2\cap S^{-k}(B_2)).$$

Άρα $\left| \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mu\times\nu(A_1\times A_2\cap(T\times S)^{-k}(B_1\times B_2)) - \mu(A_1)\nu(A_2)\mu(B_1)\nu(B_2)\right| =$

$$= \Big|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mu(A_1\cap T^{-k}(B_1))\,\nu(A_2\cap S^{-k}(B_2)) - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(\nu(A_2\cap S^{-k}(B_2))\,\mu(A_1)\mu(B_1) +$$

$$+ \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \nu(A_2\cap S^{-k}(B_2))\,\mu(A_1)\nu(B_1) - \mu(A_1)\nu(A_1)\mu(B_2)\nu(B_2)\Big| \leq$$

$$\leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{\nu(A_2\cap S^{-k}(B_2))}_{\leq 1}\,|\mu(A_1\cap T^{-k}(B_1)) - \mu(A_1)\mu(B_1)| +$$

$$+ \frac{1}{n}\mu(A_1)\nu(A_1)\cdot\Big|\sum_{k=0}^{n-1} \nu(A_2\cap S^{-k}(B_2)) - \nu(A_2)\nu(B_2)\Big| \longrightarrow 0 + 0$$

Το πρώτο επειδή το $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ είναι ασθενώς mixing και το δεύτερο επειδή το $(Y, \mathcal{B}, \nu, S)$ είναι εργοδικό.

4) $\Rightarrow$ 2) Υποθέτουμε ότι το $X\times Y$ είναι εργοδικό για κάθε Y εργοδικό και θέλουμε να δείξουμε ότι $X\times X$ είναι εργοδικό. Αρκεί να δείξουμε ότι το $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ είναι εργοδικό μετά εφαρμόζουμε το 4) με $Y = X$.
Για να δείξουμε ότι το $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ είναι εργοδικό παίρνουμε $Y = \{y\}$, $\mathcal{B} = \{\emptyset, Y\}$, $\nu(\emptyset) = 0$, $\nu(Y) = 1$, $S(y) = y$.
Αυτό το σύστημα είναι τετριμμένα εργοδικό. Αν $A, B \in \mathcal{A}$:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mu\times\nu(A\times Y\cap (T\times S)^{-k}(B\times Y)) \to \mu\times\nu(A\times Y)\,\mu\times\nu(B\times Y) =$$

$$= \mu(A)\overset{1}{\nu(Y)}\mu(B)\overset{1}{\nu(Y)} \Leftrightarrow \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mu\times\nu(A\cap T^{-k}(B)\times Y\cap S^{-k}(Y)) \to \mu(A)\mu(B)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mu(A\cap T^{-k}(B))\,\nu(\overset{1}{(Y\cap S^{-k}(Y))}) \to \mu(A)\mu(B).$$

Έπεται ότι $(X,\mathcal{A},\mu,T)$ είναι εργοδικό.

2) $\Rightarrow$ 5) Έστω $f: X\to\mathbb{C}$ μετρήσιμη τω. $U_T f = f\circ T = \lambda f$ για κάποιο λ

Πρέπει $|\lambda|=1$. Θέτουμε $g(x,y)=f(x)\overline{f(y)}$, $(x,y)\in X\times X$

$$g\circ(T\times T)(x,y) = g(Tx,Ty) = f(Tx)\overline{f(Ty)} = \lambda f(x)\bar{\lambda}\overline{f(y)} =$$
$$= |\lambda|^2 f(x)\overline{f(y)} = f(x)\overline{f(y)}$$

Η $g: X\times X\to\mathbb{C}$ είναι αναλλοίωτη για τον $T\times T$ άρα πρέπει να είναι σταθερή σ.π. Έπεται ότι η f είναι σταθερή σ.π.

μάθημα 13ο
19/11/18

<u>Ορισμός</u> Μια ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ στο $\mathbb{C}$ καλείται θετικά ορισμένη αν για κάθε $n\in\mathbb{N}$ και $\forall z_1,\dots,z_n\in\mathbb{C}$ ισχύει $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} a_{k-m} z_k \bar{z}_m \geq 0$

Ισοδύναμα $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall z_1,\dots,z_n\in\mathbb{C}$

$$[\bar{z}_1,\dots,\bar{z}_n]\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1}\\ a_{-1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_1 \\ a_{-n+1} & \cdots & a_{-1} & a_0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1\\ \vdots \\ z_n\end{bmatrix} \geq 0$$

<u>Θεώρημα</u> (Herglotz)
Μια ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ είναι θετικά ορισμένη ανν υπάρχει θετικό πεπερασμένο μέτρο μ στον μετρήσιμο χώρο $(\mathbb{T},\mathcal{B}(\mathbb{T}))$ τω. $\hat{\mu}(n)=a_n$ $\forall n\in\mathbb{Z}$

Έστω $(X,\mathcal{A},\mu,T)$ σ.δ.μ. Έστω $f\in L^2(X,\mathcal{A},\mu)$.
Έστω $a_n = \begin{cases}\langle U_T^n f, f\rangle, & n\in\mathbb{N}\cup\{0\}\\ \langle f, U_T^{-n} f\rangle, & -n\in\mathbb{N}\end{cases}$

Τότε η a_n είναι θετικά ορισμένη

<u>απόδειξη</u> Έστω $n\in\mathbb{N}$, $z_1,\dots,z_n\in\mathbb{C}$

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} a_{k-m} z_k\bar{z}_m = \sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{k}\langle U_T^{k-m} f, f\rangle z_k\bar{z}_m + \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{m=k+1}^{n}\langle f, U_T^{m-k} f\rangle$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{k}\int f\circ T^{k-m}\,\bar{f}\,d\mu\, z_k\bar{z}_m + \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{m=k+1}^{n}\int f\cdot\overline{f\circ T^{m-k}}\,d\mu\, z_k\bar{z}_m =$$