$$\Rightarrow \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mu(A\cap T^{-k}(B))\,\nu((Y\cap S^{-k}(Y)) \xrightarrow{n} \mu(A)\mu(B).$$

Έπεται ότι $(X,\mathcal{A},\mu,T)$ είναι εργοδικό.

2) ⇒ 5) Έστω $f: X\to\mathbb{C}$ μετρήσιμη τ.ω. $U_T f = f\circ T = \lambda f$ για κάποιο λ.
Πρέπει $|\lambda|=1$. Θέτουμε $g(x,y)=f(x)\overline{f(y)}$, $(x,y)\in X\times X$

$$g\circ(T\times T)(x,y) = g(Tx,Ty) = f(Tx)\overline{f(Ty)} = \lambda f(x)\bar{\lambda}\overline{f(y)} =$$
$$= |\lambda|^2 f(x)\overline{f(y)} = f(x)\overline{f(y)}$$

Η $g: X\times X\to\mathbb{C}$ είναι αναλλοίωτη για τον $T\times T$ άρα πρέπει να είναι σταθερή σ.π. Έπεται ότι η f είναι σταθερή σ.π.

$\boxed{\text{μάθημα } 13^o \quad 19/11/18}$

Ορισμός Μια ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ στο $\mathbb{C}$ καλείται θετικά ορισμένη αν για κάθε $n\in\mathbb{N}$ και $\forall z_1,\dots,z_n\in\mathbb{C}$ ισχύει
$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} a_{k-m} z_k \bar{z}_m \geq 0$$

Ισοδύναμα: $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall z_1,\dots,z_n\in\mathbb{C}$

$$[\bar{z}_1,\dots,\bar{z}_n]\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1}\\ a_{-1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_1 \\ a_{-n+1} & \cdots & a_{-1} & a_0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1\\ \vdots \\ z_n\end{bmatrix} \geq 0$$

Θεώρημα (Herglotz)
Μια ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ είναι θετικά ορισμένη ανν υπάρχει θετικό πεπερασμένο μέτρο μ στον μετρήσιμο χώρο $(\mathbb{T},\mathcal{B}(\mathbb{T}))$ τ.ω. $\hat{\mu}(n)=a_n$ $\forall n\in\mathbb{Z}$

Έστω $(X,\mathcal{A},\mu,T)$ σ.δ.μ. Έστω $f\in L^2(X,\mathcal{A},\mu)$
Έστω $a_n = \begin{cases} \langle U_T^n f, f\rangle, & n\in\mathbb{N}\cup\{0\} \\ \langle f, U_T^{-n} f\rangle, & -n\in\mathbb{N}\end{cases}$

Τότε η a_n είναι θετικά ορισμένη

απόδειξη Έστω $n\in\mathbb{N}$, $z_1,\dots,z_n\in\mathbb{C}$

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} a_{k-m} z_k\bar{z}_m = \sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{k}\langle U_T^{k-m} f, f\rangle z_k\bar{z}_m + \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{m=k+1}^{n}\langle f, U_T^{m-k} f\rangle z_k\bar{z}_m$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{k}\int f\circ T^{k-m}\bar{f}\,d\mu\, z_k\bar{z}_m + \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{m=k+1}^{n}\int f\cdot\overline{f\circ T^{m-k}}\,d\mu\, z_k\bar{z}_m =$$

$\overset{\sigma\delta\mu}{=} \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=1}^{k} \int f\circ T^k \, \overline{f\circ T^m} \, d\mu \, z_k \overline{z_m} + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{m=k+1}^{n} \int f\circ T^k \, \overline{f\circ T^m} \, d\mu \, z_k \overline{z_m}$

$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} \langle f\circ T^k, f\circ T^m \rangle z_k \overline{z_m} =$

$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} \langle z_k U_T^k f, z_m U_T^m f \rangle = \langle \sum_{k=1}^{n} z_k U_T^k f, \sum_{m=1}^{n} z_m U_T^m f \rangle =$

$= \| \sum_{k=1}^{n} z_k U_T^k f \|_2^2 \geq 0.$

Από Θεώρημα Herglotz $\exists \mu_f$ θετικό μέτρο στον $(\mathbb{T}, \mathcal{B}(\mathbb{T}))$ τ.ω.

$$\hat{\mu}_f(n) = \begin{cases} \langle U_T^n f, f \rangle & , n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ \langle f, U_T^{-n} f \rangle & -n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Το μ_f λέγεται φασματικό μέτρο της f.

Λήμμα Έστω $f \in L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$

(i) $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \langle U_T^n f, f \rangle e^{int} \longrightarrow \mu_f(\{t\}) \quad , \forall t \in \mathbb{T}$

(ii) $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |\langle U_T^n f, f \rangle|^2 \longrightarrow \sum_{t\in\mathbb{T}} (\mu(\{t\}))^2$

απόδειξη (i) Έστω $t \in \mathbb{T}$. $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \langle U_T^n f, f \rangle e^{int} =$

$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \hat{\mu}_f(n) e^{int} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \int_{\mathbb{T}} e^{-ins} d\mu_f(s) e^{int} =$

$= \lim_{N\to\infty} \int_{\mathbb{T}} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-in(s-t)} d\mu_f(s) = \lim_{N\to\infty} \int_{\mathbb{T}\setminus\{t\}} \frac{1}{N} \frac{1-e^{-iN(s-t)}}{1-e^{-i(s-t)}} d\mu_f(s) +$

$+ \mu_f(\{t\})$

$\frac{1}{N} \left| \frac{1-e^{-iN(s-t)}}{1-e^{-i(s-t)}} \right| \leq \frac{2}{N} \frac{1}{|1-e^{-i(s-t)}|} \xrightarrow{N\to\infty} 0$

$\frac{1}{N} \left| \frac{1-e^{-iN(s-t)}}{1-e^{-i(s-t)}} \right| = \frac{1}{N} \left| \sum_{k=0}^{N-1} e^{-ik(s-t)} \right| \leq 1$

Από Θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης

$\lim_{N\to\infty} \int_{\mathbb{T}\setminus\{t\}} \frac{1}{N} \frac{1-e^{-iN(s-t)}}{1-e^{-i(s-t)}} d\mu(s) = 0$

$(\hat{\mu}_f(0) = \ldots \quad \hat{\mu}_f(0) = \mu_f(\mathbb{T}))$

(ii) $\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} |\langle U_T^n f, f\rangle|^2 = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \left|\int_{\mathbb{T}} e^{-ins} d\mu_f(s)\right|^2 =$

$= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \int_{\mathbb{T}} e^{-ins} d\mu_f(s) \int_{\mathbb{T}} e^{int} d\mu_f(t) =$

$= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \int_{\mathbb{T}}\int_{\mathbb{T}} e^{in(t-s)} d\mu_f(s)\, d\mu_f(t) =$

$= \iint_{\mathbb{T}^2\setminus\{s=t\}} \frac{1}{N}\frac{1-e^{iN(t-s)}}{1-e^{i(t-s)}} d\mu_f(s)\, d\mu_f(t) + \iint_{\{(s,t)/s=t\}} d\mu_f(s)\, d\mu_f(t)$

$\frac{1}{N}\frac{1-e^{iN(t-s)}}{1-e^{i(t-s)}} \longrightarrow 0$ για $t\neq s$ και $\frac{1}{N}\left|\frac{1-e^{in(t-s)}}{1-e^{i(t-s)}}\right| \leq 1$

άρα από θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης

$\iint_{\mathbb{T}^2\setminus\{(t,s)\in\mathbb{T}^2/t=s\}} \frac{1}{N}\frac{1-e^{iN(t-s)}}{1-e^{i(t-s)}} d\mu_f(s)\, d\mu_f(t) \longrightarrow 0$

Τέλος από Fubini $\mu_f\times\mu_f(\{(t,s)\in\mathbb{T}^2/t=s\}) = \int_{\mathbb{T}} \mu_f(\{t\})\, d\mu_f(t) =$

$= \sum_{t\in\mathbb{T}} (\mu_f\{t\})^2$

απόδειξη θεωρήματος - συνέχεια

5) ⇒ 1) Για να δείξουμε mixing αρκεί ν.δ.ο.

$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} |\langle U_T^n f, g\rangle - \langle f, 1_X\rangle\langle 1_X, g\rangle| \to 0 \quad \forall f, g\in L^2(X,\mathcal{A},\mu)$

Πράγματι, τότε για $f = 1_A$, $g = 1_B$, $A, B\in\mathcal{A}$:

$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} |\langle U_T^n f, g\rangle - \langle f, 1_X\rangle\langle 1_X, g\rangle| = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \Big| \int 1_A\circ T^n 1_B\, d\mu -$

$- \int 1_A 1_X\, d\mu \int 1_X 1_B\, d\mu \Big| = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} |\mu(T^{-n}(A)\cap B) - \mu(A)\mu(B)|$

αρκεί ν.δ.ο. (*) $\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} |\langle U_T^n f, f\rangle - \langle f, 1_X\rangle\langle 1_X, f\rangle| \to 0 \quad \forall f\in L^2(X,\mathcal{A},\mu)$

Πράγματι, αυτό αποδεικνύεται εύκολα από την ταυτότητα:

$4\langle f, g\rangle = \langle f+g, f+g\rangle - \langle f-g, f-g\rangle + i\langle f+ig, f+ig\rangle - i\langle f-ig, f-ig\rangle$

Τέλος αρκεί να δείξουμε την (*) για $f\in L^2(X,\mathcal{A},\mu)$ με $\int f\, d\mu = 0$.

Πράγματι $\langle U_T^n f, f\rangle - \langle f, 1_X\rangle\langle 1_X, f\rangle =$

$= \langle U_T^n f - \langle f, 1_X\rangle 1_X , f \rangle \overset{(1)}{=} \langle U_T^n f - \langle f, 1_X \rangle 1_X , f - \langle f, 1_X\rangle 1_X \rangle$

(1) $\langle U_T^n f - \langle f, 1_X\rangle 1_X , \langle f, 1_X\rangle 1_X \rangle = \overline{\langle f, 1_X\rangle} \int [U_T^n f - \langle f, 1_X\rangle 1_X]\, d\mu$

$= \overline{\langle f, 1_X\rangle} \left(\int U_T^n f\, d\mu - \langle f, 1_X\rangle \right) = \overline{\langle f, 1_X\rangle} \left(\int f\, d\mu - \int f\, d\mu \right) = 0$

και $\int (U_T^n f - \langle f, 1_X\rangle 1_X)\, d\mu = 0$

Απόδειξη Θέλουμε να δείξουμε ότι για $f \in L^2(X, A, \mu)$ με $\int f\, d\mu = 0$

$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |\langle U_T^n f, f\rangle| \to 0 \iff \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |\langle U_T^n f, f\rangle|^2 \to 0$

Έστω $f \in L^2(X, A, \mu)$ με $\int f\, d\mu = 0$. Έστω μ_f το φασματικό μέτρο της f. Από το Λήμμα (i) για $t = 0$. Έστω $F = \{h \in L^2(X, A, \mu) / U_T h = h\}$ $\overset{\text{ii}}{F_0}$

v Newmann $\| \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} U_T^n f - P_F(f) \|_2 \to 0$

άρα

$\left| \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \langle U_T^n f, f\rangle - \langle P_F(f), f\rangle \right| = \left| \langle \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} U_T^n f - P_F(f), f \rangle \right|$

$\leq \| \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} U_T^n f - P_F(f) \|_2 \|f\|_2 \to 0$

$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \langle U_T^n f, f \rangle \to \langle P_F(f), f\rangle = \langle P_F(f), P_F(f)\rangle + \cancel{\langle P_F(f), f - P_F(f)\rangle}^{\,0}$

$= \|P_F(f)\|_2^2$. Από το Λήμμα (i): $\mu_f(\{0\}) = \|P_{F_0}(f)\|_2^2$

Γράφουμε $V_t h = e^{it} U_T h$, $t \in \mathbb{T}$. Τότε $\langle U_T^n f, f\rangle = \langle V_T^n f, f\rangle$

Ο V_t είναι ισομετρία άρα συστολή

v Newmann: $\| \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} V_t^n f - P_{F_t}(f) \|_2 \to 0$

όπου $F_t := \{h \in L^2(X, A, \mu) / V_t h = h\} = \{h \in L^2(X, A, \mu) / e^{it} U_T h = h\} =$

$= \{h \in L^2(X, A, \mu) / U_T h = e^{-it} h\}$

Όπως πριν $\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \langle U_T^n f, f\rangle e^{itn} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \langle V_t^n f, f\rangle \to \langle P_{F_t}(f), f\rangle =$

$= \|P_{F_t}(f)\|_2^2$. Άρα από το (1) του Λήμματος: $\mu_f(\{t\}) = \|P_{F_t}(f)\|_2^2$

Αν οι μόνες ιδιοσυναρτήσεις του U_T είναι οι σχεδόν παντού σταθερές

τότε $F_t = \{0\}$ $\forall t \in \mathbb{T} \setminus \{0\}$. $P_{F_t}(f) = 0$ $\forall t \in \mathbb{T} \setminus \{0\}$

Για $t = 0$: $F_0 = \{$σταθερές στον $L^2\}$ $P_{F_0}(f) = \int f\, d\mu = 0$

Άρα $\sum_{t \in \mathbb{T}} |\mu_f(\{t\})|^2 = \sum_{t \in \mathbb{T}} \|P_{F_t}(f)\|_2^4 = \sum_{t \in \mathbb{T}} 0 = 0$

Από το (ii) του Λήμματος έχουμε ότι $\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \langle U_T^n f, f\rangle \to 0$.

Παραδείγματα

1) $X = \mathbb{T}$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{T})$, $\mu = \lambda_{\mathbb{T}}$, $T(x) = x + a \pmod 1$ δεν είναι ασθενώς mixing για κανένα a. Διότι το $(X \times X, \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}, \mu \times \mu, T \times T)$ δεν είναι εργοδικό. Διότι $f(x,y) = e^{2\pi i(x-y)}$ είναι αναλλοίωτη αλλά όχι σταθερή.
Γενικά, αν $X = G$ συμπαγής ομάδα, $\mu = \lambda_G$ και $T(x) = ax$, όπου $a \in G$ τότε το $(X, \mathcal{B}(X), \mu, T)$ δεν είναι ποτέ ασθενώς mixing.
Αποδεικνύεται παρόμοια με χρήση χαρακτήρων αντί για το εκθετικό

2) Επιμορφισμοί του d-τόρου $\mathbb{T}^d$. Αν A είναι $d \times d$ πίνακας με $A_{ij} \in \mathbb{Z}$ τότε η $T(x) = Ax \pmod 1$ $x \in \mathbb{T}^d$ ορίζει μετασχηματισμό του $\mathbb{T}^d$ και όταν $\det(A) \neq 0$ ο T διατηρεί το μέτρο Lebesgue $\lambda_{\mathbb{T}^d}$. Το σύστημα $(\mathbb{T}^d, \mathcal{B}(\mathbb{T}^d), \lambda_{\mathbb{T}^d}, T)$ είναι ισχυρά mixing ανν είναι ασθενώς mixing ανν είναι εργοδικό ανν καμία ιδιοτιμή του A δεν είναι ρίζα της μονάδας.

3) Bernoulli shift είναι πάντα ισχυρά mixing.

4) Markov shift είναι ισχυρά mixing ανν είναι ασθενώς mixing ανν ο πίνακας P είναι ανάγωγος και μη-περιοδικός, δηλαδή $\exists n \in \mathbb{N}$ τ.ω. $P^n_{ij} > 0$ $\forall (i,j) \in S$

<u>απόδειξη παραδείγματος 2</u>

μάθημα 14°
21/11/18

Αν το σύστημα είναι mixing, τότε είναι εργοδικό και άρα καμία ιδιοτιμή του A δεν μπορεί να είναι ρίζα του 1.
Αντιστρόφως, έστω ότι καμία ιδιοτιμή του A δεν είναι ρίζα της μονάδας.
Θα δείξουμε ότι $\langle U_T^n f, g \rangle \to \langle f, 1_X \rangle \langle 1_X, g \rangle$ $\forall f, g \in L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$
Τότε για $f = 1_A$ και $g = 1_B$ $\langle U_T^n f, g \rangle = \mu(T^{-n}(A) \cap B)$
$\langle f, 1_X \rangle = \mu(A)$, $\langle 1_X, g \rangle = \mu(B)$
Ορίζουμε $H_m = \{ f \in L^2(X, \mathcal{A}, \mu) \,/\, \langle U_T^n f, e_m \rangle \to \langle f, 1_X \rangle \langle 1_X, e_m \rangle \}$
όπου $e_m(x) = e^{2\pi i \langle m, x \rangle}$ για $m \in \mathbb{Z}^d$, $x \in \mathbb{T}^d$
Όταν $m = (0, 0, \dots, 0)$ $\langle U_T^n f, e_m \rangle = \int U_T^n f \, d\mu = \int f \, d\mu$
$\langle f, 1_X \rangle = \int f \, d\mu$, $\langle 1_X, e_m \rangle = \langle 1_X, 1_X \rangle = 1$
Άρα για $m = 0$ έχουμε ότι $H_m = L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$
Έστω $m \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$. <u>Ισχυρισμός</u>: H_m είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος του $L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$. <u>Απόδειξη</u>: Ότι είναι γραμμικός υπόχωρος είναι προφανές από την γραμμικότητα του U_T και του εσωτερικού

γραμμένου ως προς την μετασχηματιστή. Για το ότι είναι κλειστός, έχουμε:

Έστω $f_j \in H_m$ $\forall j \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\|f_j - f\|_2 \to 0$ για κάποια $f \in L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$.

Γνωρίζουμε ότι $\forall j \in \mathbb{N}$ $\langle U_T^n f_j, e_m \rangle \to 0$ καθώς $n \to \infty$, επειδή $\langle 1_X, e_m \rangle = \int \bar{e}_m \, d\lambda_{\mathbb{T}^d} = 0$ αφού $m \neq 0$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Έστω $j \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\|f_j - f\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}$. $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $|\langle U_T^n f_j, e_m \rangle| < \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall n > n_0$. Τότε για $n > n_0$:

$$|\langle U_T^n f, e_m \rangle| \le |\langle U_T^n f - U_T^n f_j, e_m \rangle| + |\langle U_T^n f_j, e_m \rangle| <$$
$$< |\langle U_T^n (f - f_j), e_m \rangle| + \frac{\varepsilon}{2} \le \|U_T^n (f - f_j)\|_2 \, \|e_m\|_2 + \frac{\varepsilon}{2} =$$
$$= \|f - f_j\|_2 \cdot 1 + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

<u>Ισχυρισμός 2</u> $e_k \in H_m$ $\forall k \in \mathbb{Z}^d$. <u>Απόδειξη</u>: Θέλουμε ν.δ.ο $\langle U_T^n e_k, e_m \rangle \to 0$.

$$\langle U_T^n e_k, e_m \rangle = \int e_k \circ T^n \, \bar{e}_m \, d\lambda_{\mathbb{T}^d} = \int e^{2\pi i \langle k, A^n x \rangle - 2\pi i \langle m, x \rangle} dx$$

$$= \int_{\mathbb{T}^d} e^{2\pi i \langle (A^*)^n k - m, x \rangle} dx = \begin{cases} 1, & (A^*)^n k = m \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Η ισότητα $(A^*)^n k = m$ μπορεί να ισχύει για το πολύ ένα $n \in \mathbb{N}$. Διότι αν $(A^*)^{n_1} k = m = (A^*)^{n_2} k \Rightarrow (A^*)^{|n_1 - n_2|} k = k$.

Αν $n_1 \neq n_2$ τότε το k (που είναι $k \neq 0$ γιατί $m \neq 0$) είναι ιδιοδιάνυσμα του $(A^*)^{|n_1 - n_2|}$ για την ιδιοτιμή 1. Άρα και ο $A^{|n_1 - n_2|}$ έχει ιδιοτιμή το 1 και άρα ο A έχει ιδιοτιμή κάποια ρίζα της μονάδας. Άτοπο. Άρα $(A^*)^{n_1} k = m = (A^*)^{n_2} k \Rightarrow n_1 = n_2$. Άρα η $\langle U_T^n e_k, e_m \rangle \neq 0$ για το πολύ ένα $n \in \mathbb{N}$. Επομένως $\langle U_T^n e_k, e_m \rangle \to 0$ καθώς $n \to \infty$.

Άρα $e_k \in H_m$. Αφού $e_k, k \in \mathbb{Z}^d$ είναι ορθοκανονική βάση του $L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$ από ισχυρισμό 1 και ισχυρισμό 2 έπεται ότι $H_m = L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$ $\forall m \in \mathbb{Z}$. Δηλ. $\langle U_T^n f, e_m \rangle \to \langle f, 1_X \rangle \langle 1_X, e_m \rangle$ $\forall f \in L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$ $\forall m \in \mathbb{Z}^d$. Έστω $f \in L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$. $H_f = \{ g \in L^2(X, \mathcal{A}, \mu) : \langle U_T^n f, g \rangle \to \langle f, 1_X \rangle \langle 1_X, g \rangle \}$

Τότε $e_m \in H_f$. Ο H_f είναι επίσης κλειστός γραμμικός υπόχωρος του $L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$ οπότε $H_f = L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$. Αυτό ισχύει $\forall f \in L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$ άρα δείξαμε ότι $\langle U_T^n f, g \rangle \to \langle f, 1_X \rangle \langle 1_X, g \rangle$ $\forall f, g \in L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$

<u>Πόρισμα</u> $\forall k \in \mathbb{N}$, $k \neq 1$ η απεικόνιση $T_k(x) = kx \pmod 1$ είναι ισχυρά mixing (με μέτρο Lebesgue ($d = 1$))

απόδειξη παραδείγματος 3

Έστω S πεπερασμένο σύνολο, $p=(p_s)_{s\in S}$, διάνυσμα πιθανότητας, δηλ. $p_s>0$ $\forall s\in S$, $\sum_{s\in S} p_s=1$. Έστω $X=S^{\mathbb{N}}$, $\mathcal{A}=\sigma\left(\{\underline{x}\in X / x_1=i_1,\dots,x_n=i_n\} / n\in\mathbb{N}, i_1,\dots,i_n\in S\right)$

$T: X\to X$ το shift, δηλ. $(T(x))_n=x_{n+1}$ και μ το μέτρο που καθορίζεται μονοσήμαντα $\mu(\{\underline{x}\in X / x_1=i_1,\dots x_n=i_n\})=p_{i_1}\cdots p_{i_n}$, $\forall n\in\mathbb{N}$ $i_1,\dots,i_n\in S$. Το $(X,\mathcal{A},\mu,T)$ είναι σδμ. και μάλιστα εργοδικό.

Είναι και ισχυρά mixing. Για να δείξουμε ότι το σύστημα είναι mixing αρκεί ν.δ.ο. $\mu(A\cap T^{-n}(B))\to\mu(A)\mu(B)$ για A και B κύλινδροι γιατί αυτοί αποτελούν ημιάλγεβρα που εξ. ορισμού παράγει την $\mathcal{A}$.

Έστω $A=\{\underline{x}\in X / x_1=i_1,\dots,x_n=i_n\}$ και $B=\{\underline{x}\in X / x_1=j_1,\dots,x_m=j_m\}$ με $n,m\in\mathbb{N}$, $i_1,\dots,i_n, j_1,\dots,j_m\in S$.

$\mu(A\cap T^{-k}(B))=\mu(\{\underline{x}\in X / x_1=i_1,\dots,x_n=i_n, x_{k+1}=j_1,\dots,x_{k+m}=j_m\})=$

$=\mu\bigcup_{s_1,s_2,\dots,s_{k-n}}\{\underline{x}\in X / x_1=i_1,\dots,x_n=i_n, x_{n+1}=s_1,\dots,x_k=s_{k-n}, x_{k+1}=j_1,\dots,x_{k+m}=j_m\}$

$=\sum_{s_1\in S}\cdots\sum_{s_{k-n}\in S}\mu(\{\underline{x}\in X / x_1=i_1,\dots,x_n=i_n, x_{n+1}=s_1,\dots,x_k=s_{k-n}, x_{k+1}=j_1,$

$\dots,x_{k+m}=j_m\})=\sum_{s_1\in S}\cdots\sum_{s_{k-n}\in S}p_{i_1}p_{i_2}\cdots p_{i_n}p_{s_1}\cdots p_{s_{k-n}}p_{j_1}\cdots p_{j_m}$

$=p_{i_1}\cdots p_{i_n}\underbrace{\cancel{\left(\sum_{s_1\in S}p_{s_1}\right)}}_{1}\underbrace{\cancel{\left(\sum_{s_2\in S}p_{s_2}\right)}}_{1}\cdots\underbrace{\cancel{\left(\sum_{s_{k-n}\in S}p_{s_{k-n}}\right)}}_{1}p_{j_1}\cdots p_{j_m}=$

$=p_{i_1}\cdots p_{i_n}\cdot p_{j_1}\cdots p_{j_m}=\mu(A)\mu(B)$, για $k>n$

Γενίκευση Έστω $(\Omega,\mathcal{F},P)$ χώρος πιθανότητας, $(S,\mathcal{S})$ μετρήσιμος χώρος και $\xi_1,\xi_2,\dots\ \Omega\to S$ ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων τ.ω.
$\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall A_1,\dots,A_n\in\mathcal{S}$ $P(\xi_1\in A_1,\dots,\xi_n\in A_n)=\prod_{j=1}^{n}P(\xi_j\in A_j)$

Ορίζουμε $X=S^{\mathbb{N}}$, $\mathcal{A}=\sigma(\{\underline{x}\in X / x_1\in A_1,\dots,x_n\in A_n\} / n\in\mathbb{N}, A_1,\dots,A_n\in\mathcal{S}\}$
$T: X\to X$ το shift $(T(x))_n=x_{n+1}$. Ορίζουμε $\xi:\Omega\to X$ με $\xi(\omega)=(\xi_1(\omega),\xi_2(\omega),\dots)$ και $\mu=\xi_* P$, δηλ.
$\mu(\{\underline{x}\in X / x_1\in A_1,\dots,x_n\in A_n\})=P(\{\omega\in\Omega / \xi_1(\omega)\in A_1,\dots,\xi_n(\omega)\in A_n\})=$
$=\prod_{j=1}^{n}P(\xi_j\in A_j)$. Το $(X,\mathcal{A},\mu,T)$ είναι mixing σ.δ.μ.

<u>απόδειξη</u>: όμοια με την περίπτωση του Bernoulli shift.

<u>απόδειξη παραδείγματος 4</u>

Έστω S πεπερασμένο σύνολο. Έστω $P=(P_{ij})_{i,j\in S}$ στοχαστικός πίνακας δηλαδή $P_{ij}\geq 0$ $\forall i,j\in S$ και $\sum_{j\in S} P_{ij}=1$ $\forall i\in S$

Έστω $p=(p_s)_{s\in S}$ τ.ω. $p_s\geq 0$ $\forall s\in S$ και $\sum_{s\in S} p_s=1$ και τ.ω. $pP=p$

δηλ. $\sum_{i\in S} p_i P_{ij}=p_j$ $\forall j\in S$. Τότε ορίζεται ένα μέτρο στον μετρήσιμο

χώρο $(X,\mathcal{A})$ όπου $X=S^{\mathbb{N}\cup\{0\}}$ $\mathcal{A}=\sigma\left(\{\underset{\sim}{x}\in X / x_0=i_0,\dots,x_n=i_n\} / \begin{smallmatrix} n\in\mathbb{N}\cup\{0\} \\ i_0,\dots,i_n\in S\end{smallmatrix}\right)$
με $\mu(\{\underset{\sim}{x}\in X / x_0=i_0, x_1=i_1,\dots,x_n=i_n\})=$
$=p_{i_0}P_{i_0 i_1}P_{i_1 i_2}\cdots P_{i_{n-1}i_n}$ $\forall n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ και $\forall i_0,i_1,\dots,i_n\in S$
$T:X\to X$ το shift. Το $(X,\mathcal{A},\mu,T)$ είναι σ.δ.μ.

<u>Πρόταση</u> Υποθέτουμε ότι $p_s>0$ $\forall s\in S$. Τα εξής είναι ισοδύναμα:
(1) Το σύστημα είναι mixing
(2) Το σύστημα είναι ασθενώς mixing
(3) Ο P είναι ανάγωγος και απεριοδικός, δηλ. $\exists m\in\mathbb{N}$ τω $P_{ij}^m>0$ $\forall i,j\in S$
(4) $P_{ij}^n\to p_j$ καθώς $n\to\infty$ $\forall i,j\in S$

<u>απόδειξη</u> (1) $\Rightarrow$ (2) ισχύει πάντα.
(2) $\Rightarrow$ (3) $\forall i,j\in S$ υπάρχει $J_{ij}\in\mathbb{N}$ τ.ω. $d(J_{ij})=0$ και
$\mu([i]\cap T^{-n}[j])\to\mu([i])\mu([j])$ καθώς $n\to\infty$, $n\notin J_{ij}$
όπου $[i]=\{\underset{\sim}{x}\in X / x_0=i\}$, $i\in S$
$\mu([i]\cap T^{-n}[j])=\mu(\{\underset{\sim}{x}\in X / x_0=i, x_n=j\})=\mu\left(\bigcup_{s_1,\dots,s_{n-1}\in S}\left\{\begin{smallmatrix}\underset{\sim}{x}\in X / x_0=i, x_1=s_1,\dots, \\ x_{n-1}=s_{n-1}, x_n=j\end{smallmatrix}\right\}\right)$

$$=\sum_{s_1\in S}\cdots\sum_{s_{n-1}\in S} p_i P_{is_1}P_{s_1s_2}\cdots P_{s_{n-1}j}=p_iP_{ij}^n$$

Έχουμε ότι $\cancel{p_i}P_{ij}^n\to\cancel{p_i}p_j$ καθώς $n\to\infty$, $n\notin J_{ij}$
Θέτουμε $J=\bigcup_{i,j\in S} J_{ij}$ Τότε $d(J)=0$ και για $n\notin J$ έχουμε

$P_{ij}^n\xrightarrow{n\to\infty}p_j$ $\forall i,j\in S$ Άρα $\exists m$ τ.ω. $P_{ij}^n>\frac{1}{2}p_j$ $\forall i,j\in S$

$\forall n\in[n_0,\infty)\cap\mathbb{N}\setminus J$

Για $m \in [n_0, \infty) \cap \mathbb{N} \setminus J$ έχουμε ότι $P_{ij}^{m} > 0$

$(3) \Rightarrow (4)$ κλασικό θεώρημα Θεωρίας Πιθανοτήτων.

$(4) \Rightarrow (1)$ Αρκεί να δείξουμε ότι $\mu(A \cap T^{-k}(B)) \to \mu(A)\mu(B)$ για $A = \{\underset{\sim}{x} \in X / x_0 = i_0, \dots, x_n = i_n\}$, $B = \{\underset{\sim}{x} \in X / x_0 = j_0, \dots, x_m = j_m\}$)

όπου $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $i_0, \dots, i_n, j_0, \dots, j_m \in S$.

Έχουμε για k $\mu(A \cap T^{-k}(B)) = \mu\left(\{\underset{\sim}{x} \in X / \begin{array}{l} x_0 = i_0, \dots, x_n = i_n, x_k = j_0 \\ x_{k+1} = j_1, \dots, x_{k+m} = j_m \end{array}\}\right)$

$= \sum\limits_{s_1 \in S} \cdots \sum\limits_{s_{k-n-1}} \mu(\{\underset{\sim}{x} \in X / x_0 = i_0, \dots, x_n = i_n, x_{n+1} = s_1, \dots, x_{k-1} = s_{k-n-1}, x_k = j_0, \dots, x_{k+m} = j_m\})$

$= \sum\limits_{s_1 \in S} \cdots \sum\limits_{s_{k-n-1}} p_{i_0} P_{i_0 i_1} \cdots P_{i_{n-1} i_n} P_{i_n s_1} \cdots P_{s_{k-n-2} s_{k-n-1}} P_{s_{k-n-1} j_0} P_{j_0 j_1} \cdots$

$\cdots P_{j_{m-1} j_m} = p_{i_0} P_{i_0 i_1} \cdots P_{i_{n-1} i_n} \left(\sum\limits_{s_1 \in S} \cdots \sum\limits_{s_{k-n-1} \in S} P_{i_n s_1} \cdots P_{s_{k-n-1} j_0} \right) \cdot P_{j_0 j_1} \cdots P_{j_{m-1} j_m}$

$= p_{i_0} P_{i_0 i_1} \cdots P_{i_{n-1} i_n} \cdot P_{i_n j_0}^{k-n} P_{j_0 j_1} \cdots P_{j_{m-1} j_m} \xrightarrow{k \to \infty}$

$\to \underbrace{p_{i_0} P_{i_0 i_1} \cdots P_{i_{n-1} i_n}}_{\mu(A)} \underbrace{p_{j_0} P_{j_0 j_1} \cdots P_{j_{m-1} j_m}}_{\mu(B)} = \mu(A)\mu(B)$

Άρα το σύστημα είναι mixing.

Γενικευμένα μέσα εργοδικά Θεωρήματα

$(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ σ.δ.μ. Γνωρίζουμε ότι για $f \in L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$:

$\frac{1}{N} \sum\limits_{k=0}^{N-1} f \circ T^k \xrightarrow{L^2} \tilde{f}$ όπου $\tilde{f} \in L^2$ και αναλλοίωτη

Όμως έχουμε επίσης ότι $\frac{2}{N(N+1)} \sum\limits_{k=0}^{N-1} k \cdot f \circ T^k \to \tilde{f}$

Γενικά, δοθέντος ενός πολυωνύμου $P_n(z) = \sum\limits_{k=0}^{d_n} a_{k,n} z^k$ μπορούμε να

σχηματίσουμε τον τελεστή $P_n(U_T) = \sum\limits_{k=0}^{d_n} a_{k,n} U_T^k$

Υπό ποιες προϋποθέσεις έχουμε ότι $P_n(U_T) f \xrightarrow{L^2} \tilde{f}$, για κάποια $\tilde{f} \in L^2$

Παράδειγμα $a_{k,n} = \frac{1}{n}$ $\forall k \in \{0, \dots, n-1\}$, $n \in \mathbb{N}$ δίνει:

$P_n(U_T) f = \frac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} U_T^n f = \frac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} f \circ T^k$

Θεώρημα 1 Έστω $(X,\mathcal{A},\mu,T)$ και $P_n(z)=\sum_{k=0}^{d_n} a_{k,n}\, z^k$, $n\in\mathbb{N}$ τ.ω.

(1) $P_n(1)=1$
(2) $a_{k,n}\geq 0$ $\forall k\in\{0,\dots,d_n\}$, $n\in\mathbb{N}$
(3) $P_n(e^{2\pi i t})\to 0$ $\forall t\in\mathbb{T}\setminus\{0\}$

Τότε $P_n(U_T)f \xrightarrow{L^2} P_{F_0}(f)$ $\forall f\in L^2(X,\mathcal{A},\mu)$ όπου $F_0=\{h\in L^2 / U_T h=h\}$
και $P_{F_0}(f)$ η προβολή της f στον F_0

$\boxed{\text{μάθημα 15ο} \quad 26/11/18}$

Είχαμε δείξει ότι $\|P_n(U_T)f\|_2^2=\int_{\mathbb{T}}|P_n(e^{2\pi i t})|^2\, d\mu_f(t)$
για $f\in L^2(X,\mathcal{A},\mu)$ όπου μ_f είναι το φασματικό μέτρο της f
δηλ. μ_f θετικό μέτρο στον S^1. $\hat{\mu}_f(n)=\langle U_T^n f, f\rangle$ $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$
και $\hat{\mu}_f(n)=\langle f, U_T^{-n} f\rangle$ $-n\in\mathbb{N}$

Θεώρημα 2 Έστω $(X,\mathcal{A},\mu,T)$ ασθενώς mixing σύστημα που διατηρεί το μέτρο. Έστω $a_{k,n}\geq 0$, $k\in\{0,1,\dots,d_n\}$, $n\in\mathbb{N}$ τ.ω. για $P_n(z)=\sum_{k=0}^{d_n} a_{k,n}\, z^k$ έχουμε ότι $P_n(1)=1$ και $P_n(z)\to 0$ για όλα τα $z\in S^1$ εκτός από ένα αριθμήσιμο σύνολο. Τότε για $f\in L^2(X,\mathcal{A},\mu)$
$P_n(U_T)f \xrightarrow{L^2} P_{F_0}(f)=\int f\, d\mu\, \mathbb{1}_X$

απόδειξη Θεωρήματος 1

Έστω $f\in L^2(X,\mathcal{A},\mu)$ $f=g+h$ όπου $g=P_{F_0}(f)\in F_0$ και $h=f-g\perp F_0$
Για την g: $P_n(U_T)g=\sum_{k=0}^{d_n} a_{k,n}\, U_T^k g = g\sum_{k=0}^{d_n} a_{k,n}=g$

άρα $\|P_n(U_T)f-P_{F_0}(f)\|_2^2=\|P_n(U_T)g-g+P_n(U_T)h\|_2^2=$
$=\|P_n(U_T)h\|_2^2=\int_{\mathbb{T}}|P_n(e^{2\pi i t})|^2\, d\mu_h(t)$ (*)

$P_n(e^{2\pi i t})\to 0$ $\forall t\in\mathbb{T}\setminus\{0\}$
$|P_n(e^{2\pi i t})|\leq \sum_{k=0}^{d_n} a_{k,n}\, \underbrace{|e^{2\pi i t}|}_{1}{}^k = 1$ $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall t\in\mathbb{T}$
$P_n(e^{2\pi i 0})=1\to 1$ $n\to\infty$
Θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης: $\int_{\mathbb{T}}|P_n(e^{2\pi i t})|^2\, d\mu_h(t)\to 1\, d\mu_h(\{0\})$

Όμως $\mu_h(\{0\}) = \|P_{F_0}(h)\|_2^2 = 0$ επειδή $h \perp F_0$

απόδειξη θεωρήματος 2

Το ⊛ της απόδειξης του θεωρήματος 1, είναι ακριβώς ίδιο
$p_n(e^{2\pi i t}) \to 0$ για t εκτός από αριθμήσιμο σύνολο
$|p_n(e^{2\pi i t})| \leq \sum_{k=0}^{d_n} a_{k,n} |\underbrace{e^{2\pi i t}}_{1}|^k = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t \in \mathbb{T}$

Αν δείξουμε ότι $\mu_h(A) = 0$ για κάθε αριθμήσιμο σύνολο τότε θα έχουμε ότι $p_n(e^{2\pi i t}) \to 0$ μ_h-σ.π. (γιατί παίρνουμε για A το αριθμήσιμο σύνολο που δεν έχουμε σύγκλιση.) Για να δείξουμε αυτό, αρκεί ν.δ.ο. κάθε μονοσύνολο έχει $\mu_h(\{t\}) = 0$ γιατί τότε για A αριθμήσιμο $\mu_h(A) = \sum_{t \in A} \mu_h(\{t\}) = 0$. Ξέρουμε $\mu_h(\{t\}) = \|P_{F_t}(h)\|_2^2$

όπου $F_t = \{\varphi \in L^2(X, \mathcal{A}, \mu) \,/\, U_T\varphi = e^{2\pi i t}\varphi\}$ για $t \in \mathbb{T}$. Αφού το σύστημα είναι ασθενώς mixing η μόνη ιδιοτιμή του U_T είναι η 1. και $F_t = \{0\}$ $\forall t \neq 0$ Άρα $P_{F_t}(h) = 0$ Για $t = 0$ έχουμε ότι $h \perp F_0$ άρα $P_{F_0}(h) = 0$ άρα $\mu_h(\{t\}) = \|P_{F_t}(h)\|_2^2 = 0 \quad \forall t \in \mathbb{T}$.

Εφαρμογή Για οποιοδήποτε ασθενώς mixing σύστημα:
$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^{2k} \xrightarrow{L^2} \int f \, d\mu = P_{F_0}(f)$

Παίρνουμε για $a_{k,n} = \frac{1}{n}$, $k \in \{0, 2, \ldots, 2(n-1)\}$, $n \in \mathbb{N}$.
$p_n(z) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} z^{2k}$, $p_n(1) = 1$

$p_n(z) = \frac{1}{n} \frac{z^{2n} - 1}{z^n - 1}$, $z \neq \pm 1$

$|p_n(z)| \leq \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{z^n - 1} \to 0 \quad \forall z \neq \pm 1$

Άρα εφαρμόζουμε το γενικευμένο μέσο εργοδικό θεώρημα.

Ιδιοτιμές του Τελεστή Koopmann για εργοδικά συστήματα

Πρόταση Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ ένα εργοδικό σδμ και $U_T f = f \circ T$ ο τελεστής Koopmann στον $L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$.

(1) Αν λ είναι ιδιοτιμή του U_T και f ιδιοσυνάρτηση τότε $|\lambda| = 1$ και $|f| = c$ μ-σ.π για κάποιο $c \in \mathbb{C}$.

(2) Ιδιοσυναρτήσεις που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι ορθογώνιες μεταξύ τους.

(3) Κάθε ιδιοτιμή είναι απλή, δηλ αν $U_T f = \lambda f$ και $U_T g = \lambda g$, $f, g \in L^2 \setminus \{0\}$ τότε υπάρχει $c \in \mathbb{C}$ τ.ω. $f = cg$ μ-σ.π

(4) Το σύνολο των ιδιοτιμών του U_T είναι υποομάδα του S^1.

απόδειξη (1) $\|U_T f\|_2 = \|f\|_2$ επειδή U_T ισομετρία $\forall f \in L^2$

Αν $U_T f = \lambda f$ τότε $\|f\|_2 = \|U_T f\|_2 = |\lambda| \|f\|_2$

Αν $f \in L^2(X, \mathcal{A}, \mu) \setminus \{0\}$ δηλ η f είναι ιδιοσυνάρτηση τότε $\|f\|_2 \neq 0$ άρα $|\lambda| = 1$. Αν $U_T f = \lambda f$, $f \in L^2(X, \mathcal{A}, \mu) \setminus \{0\}$ τότε

$U_T |f|(x) = |f|(Tx) = |f(Tx)| = |U_T f|(x)$. Επομένως

$U_T |f| = |U_T f| = |\lambda f| = |\lambda| |f| = |f|$ ή $|f|$ είναι αναλλοίωτη και άρα σταθερή σχεδόν παντού.

(2) Έστω $\lambda \neq \mu$ και $U_T f = \lambda f$, $U_T g = \mu g$ για $f, g \in L^2(X, \mathcal{A}, \mu) \setminus \{0\}$

$\langle f, g \rangle = \langle U_T f, U_T g \rangle = \langle \lambda f, \mu g \rangle = \lambda \bar{\mu} \langle f, g \rangle$.

Έχουμε $\lambda, \mu \in S^1$ Από (1) $\Rightarrow |\mu| = 1$ άρα $\bar{\mu} = \frac{1}{\mu}$. Τότε $\lambda \neq \mu \Leftrightarrow \lambda \cdot \frac{1}{\mu} \neq 1 \Leftrightarrow \lambda \bar{\mu} \neq 1$

άρα πρέπει $\langle f, g \rangle = 0$

(3) Έστω λ ιδιοτιμή του U_T και $f, g \in L^2 \setminus \{0\}$ τ.ω. $U_T f = \lambda f$ και $U_T g = \lambda g$. Αφού g δεν είναι ταυτοτικά μηδέν έχουμε ότι $|g| = c$ μ-σ.π. και αφού η g δεν είναι μ-σ.π μηδέν πρέπει $c \neq 0$. Άρα $g \neq 0$ μ-σ.π

Άρα ορίζεται η f/g. $U_T(\frac{f}{g}) = (f/g) \circ T = \frac{f \circ T}{g \circ T} = \frac{U_T f}{U_T g} = \frac{\lambda f}{\lambda g}$

Άρα f/g είναι αναλλοίωτη άρα σταθερή μ-σ.π

(4) Έστω $\lambda, \mu \in S^1$ ιδιοτιμές του U_T με $U_T f = \lambda f$, $U_T g = \mu g$ με $f, g \in L^2 \setminus \{0\}$. $U_T(fg) = (fg) \circ T = f \circ T \cdot g \circ T = U_T f \cdot U_T g =$

$= \lambda f \cdot \mu g = \lambda \mu \, fg$. Όπως πριν $f \neq 0$ μ-σ.π, $g \neq 0$ μ-σ.π

και άρα $fg \neq 0$ μ-σ.π. Άρα $\lambda \mu$ ιδιοτιμή του U_T με ιδιοσυνάρτηση fg. Επίσης $U_T \bar{f} = \overline{U_T f} = \overline{\lambda f} = \bar{\lambda} \bar{f} = \lambda^{-1} \bar{f}$ και $\bar{f} \in L^2(X, \mathcal{A}, \mu) \setminus \{0\}$

άρα λ^{-1} είναι ιδιοτιμή με ιδιοσυνάρτηση $\bar{f}$. Επίσης 1 είναι ιδιοτιμή του U_T (σταθερές συναρτήσεις οι ιδιοσυναρτήσεις) άρα το σύνολο των ιδιοτιμών του U_T είναι υποομάδα της S

Ορισμός Ένα σ.δ.μ. $(X,\mathcal{A},\mu,T)$ λέμε ότι έχει συνεχές φάσμα αν η μόνη ιδιοτιμή του τελεστή Koopman είναι ο 1 και αυτή είναι απλή.
π.χ κάθε ασθενώς mixing έχει συνεχές φάσμα.

Στον αντίποδα:
Ορισμός Ένα σ.δ.μ. $(X,\mathcal{A},\mu,T)$ λέμε ότι έχει διακριτό φάσμα αν υπάρχει βάση του $L^2(X,\mathcal{A},\mu)$ από ιδιοσυναρτήσεις του U_T.
παράδειγμα: κάθε εργοδική στροφή συμπαγούς ομάδας έχει διακριτό φάσμα (ιδιοσυναρτήσεις είναι οι χαρακτήρες της ομάδας)

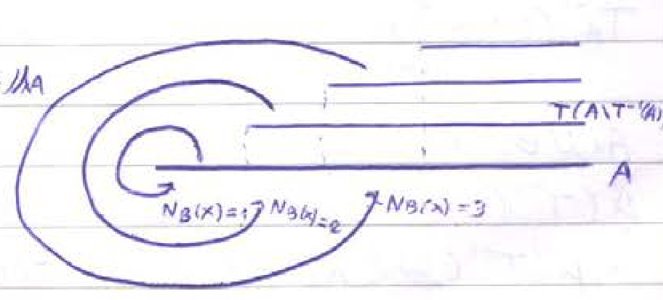
Παρατήρηση Κάθε υποομάδα του κύκλου είναι το σύνολο ιδιοτιμών για ένα εργοδικό σύστημα και μάλιστα το σύστημα αυτό μπορούμε να το πάρουμε να είναι εργοδική στροφή.

Επαγόμενος μετασχηματισμός - Kakutani Skyscraper

Έστω $(X,\mathcal{A},\mu,T)$ σ.δ.μ. και έστω $B\in\mathcal{A}$ με $\mu(B)>0$. Ορίζουμε:
$N_B(x)=\inf\{n\in\mathbb{N} \,/\, T^n(x)\in B\}$. Αν $T^n(x)\notin B$ $\forall n\in\mathbb{N}$ τότε $N_B(x)=+\infty$. Από Θεώρημα Poincaré: για σχεδόν κάθε $x\in B$ έχουμε $N_B(x)<+\infty$. Ορίζουμε και $A = B\cap\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\bigcup_{m=n}^{\infty} T^{-n}(B) =$

$= B\cap \limsup_n T^{-n}(B)$

Για $x\in A$ ορίζουμε $T_A(x)=T^{N_B(x)}(x)$. Έχουμε $T_A: A\to A$. Ο T_A λέγεται επαγόμενος μετασχηματισμός.
Ορίζουμε $\mathcal{A}_A=\{C\cap A \,/\, C\in\mathcal{A}\}$
και $\mu_A:\mathcal{A}_A\to[0,1]$ με $\mu_A(C)=\frac{\mu(C)}{\mu(A)}$, $C\in\mathcal{A}_A$



Προταση (1) $N_B : X \to \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ και $N_B : A \to \mathbb{N}$ είναι μετρήσιμες ως προς τις σ-αλγεβρες $\mathcal{A}$ και $\mathcal{A}_A$ αντίστοιχα.

(2) $T_A : A \to A$ είναι $\mathcal{A}_A$-μετρήσιμη

(3) $(A, \mathcal{A}_A, \mu_A, T_A)$ είναι ενα σ.δ.μ.

αποδειξη (1) $N_B^{-1}(\{n\}) = \{x \in X / T^1(x) \notin B, T^2(x) \notin (B), \dots, T^{n-1}(x) \notin B, T^n(x) \in B\}$

$= T^{-1}(B^c) \cap T^{-2}(B^c) \cap \dots \cap T^{-n+1}(B^c) \cap T^{-n}(B) \in \mathcal{A}$

Για $n = +\infty$ $N_B^{-1}(\{\infty\}) = \bigcap_{n=1}^{\infty} T^{-n}(B^c) \in \mathcal{A}$

Αν περιοριστούμε στο A: $\{x \in A / N_B(x) = n\} = A \cap N_B^{-1}(\{n\}) =$

$= A \cap T^{-1}(B^c) \cap \dots \cap T^{-n+1}(B^c) \cap T^{-n}(B) \in \mathcal{A}_A$

Επειδή $T^{-1}(B^c) \cap \dots \cap T^{-n+1}(B^c) \cap T^{-n}(B) \in \mathcal{A}$

Αρα η $N_B \; A \to \mathbb{N}$ είναι $\mathcal{A}_A$-μετρήσιμη.

(2) Εστω $C \in \mathcal{A}_A$. $T_A^{-1}(C) = \bigcup_{n=1}^{\infty} T_A^{-1}(C) \cap \{x \in A / N_B(x) = n\} =$

$= \bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(C) \cap \{x \in A / N_B(x) = n\} =$

$= \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{T^{-n}(C) \cap T^{-1}(B^c) \cap \dots \cap T^{-n+1}(B^c) \cap T^{-n}(B)}_{\mathcal{A}} \cap A \quad \in \mathcal{A}_A$

(3) Ορίζουμε $A_1 = \{x \in A / T(x) \in A\} = A \cap \{x / N_B(x) = 1\}$,

$A_n = \{x \in A / T(x) \notin A, \dots, T^{n-1}(x) \notin A, T^n(x) \in A\} = A \cap \{x / N_B(x) = n\}$

$B_1 = \{x \in X \setminus A / T(x) \in A\}$

$B_n = \{x \in X \setminus A / T(x) \notin A, \dots, T^{n-1}(x) \notin A, T^n(x) \in A\}$

• $B_1 \cup A_1 = T^{-1}(A)$

• $B_{n+1} \cup A_{n+1} = T^{-1}(B_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Πράγματι, $x \in B_{n+1} \cup A_{n+1} \iff$

$\iff T(x) \notin A, T^2(x) \notin A, \dots, T^n(x) \notin A, T^{n+1}(x) \in A$

$x \in T^{-1}(B_n) \iff T(x) \in B_n \iff T(x) \in A^c, T^2(x) \notin A, \dots, T^{n-1}(Tx) \notin A, T^n(Tx) \in A$

Πρεπει ν.δ.ο. για $C \in \mathcal{A}_A$ εχουμε οτι $\mu_A(T_A^{-1}(C)) = \mu_A(C) \iff$

$\iff \mu(T_A^{-1}(C)) = \mu(C) = \mu(T^{-1}(C))$

$T_A^{-1}(C) = \bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(C) \cap A_n$. Αρα $\mu(T_A^{-1}(C)) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(T^{-n}(C) \cap A_n)$

$A_1 \cup B_1 = T^{-1}(A)$ $\quad A_{n+1} \cup B_{n+1} = T^{-1}(B_n)$.

$\mu(T^{-1}(C)) = \mu(T^{-1}(C) \cap T^{-1}(A)) = \mu(T^{-1}(C) \cap A_1) + \mu(T^{-1}(C) \cap B_1)$

$= \mu(T^{-1}(C) \cap A_1) + \mu(T^{-2}(C) \cap T^{-1}(B_1)) =$

$= \mu(T^{-1}(C) \cap A_1) + \mu(T^{-2}(C) \cap A_2) + \mu(T^{-2}(C) \cap B_2) = \dots =$

$= \sum_{j=1}^{n} \mu(T^{-j}(C) \cap A_j) + \mu(T^{-n}(C) \cap B_n)$ και $\mu(T^{-n}(C) \cap B_n) \leq \mu(B_n) \to 0$

επειδή τα B_n είναι ξένα και άρα $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) < +\infty$

Άρα παίρνω lim καθώς $n \to \infty$ $\mu(T^{-1}(C)) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(T^{-n}(C) \cap A_n) =$

$= \mu(T_A^{-1}(C))$

Έστω τώρα $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ αντιστρέψιμο. Στην περίπτωση αυτή, ορίζουμε το A ως $A = B \cap \limsup_n T^{-n}(B) \cap \limsup_n T^{n}(B)$

μάθημα 16°
28/11/18

Πρόταση Αν το $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ είναι αντιστρέψιμο σ.δ.μ. τότε το $(A, \mathcal{A}_A, \mu_A, T_A)$ είναι επίσης αντιστρέψιμο.

Πρόταση Αν το $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ είναι αντιστρέψιμο και εργοδικό σ.δ.μ. τότε το $(A, \mathcal{A}_A, \mu_A, T_A)$ είναι εργοδικό, όπου $A = B \cap \limsup_n T^{-n}(B) \cap \limsup_n T^{n}(B)$

απόδειξη Έστω όχι. Τότε υπάρχει $C \in \mathcal{A}_A$ τ.ω. $T_A(C) = C$ και $\mu_A(C) \in (0,1)$. Άρα $\mu(C) \in (0,1)$.

Ορίζουμε $\tilde{C} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{n=0}^{k-1} T^n(A_k \cap C)$ όπου $A_k = \{x \in A / N_B(x) = k\} =$

$$= \begin{cases} A \cap T^{-1}(A) & , k=1 \\ A \cap T^{-1}(A^c) \cap \dots \cap T^{-(k-1)}(A^c) \cap T^{-k}(A) & , k>1 \end{cases}$$

Ισχυρισμός: το $\tilde{C}$ είναι T-αναλλοίωτο

απόδειξη $T(\tilde{C}) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{n=0}^{k-1} T^{n+1}(A_k \cap C) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{n=1}^{k-1} T^n(A_k \cap C) \cup \bigcup_{k \in \mathbb{N}} T^k(A_k \cap C)$

$= \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{n=1}^{k-1} T^n(A_k \cap C) \cup \bigcup_{k \in \mathbb{N}} T_A(A_k \cap C) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{n=1}^{k-1} T^n(A_k \cap C) \cup T_A(C) =$

$= \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{n=1}^{k-1} T^n(A_k \cap C) \cup C = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{n=1}^{k-1} T^n(A_k \cap C) \cup \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (C \cap A_k) =$

$= \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{n=0}^{k-1} T^n(A_k \cap C) = \tilde{C}$

Έχουμε ότι $\tilde{C} \supseteq C$, επομένως $\mu(\tilde{C}) \geq \mu(C) > 0$. Επίσης $X \setminus \tilde{C} \supseteq A \setminus C$

Πραγματι, αν $x \in A \setminus C$ τοτε $X\setminus\tilde{C} = X \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{m=0}^{k-1} T^m(A_k \cap C) =$

$= \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcap_{m=0}^{k-1} (X \setminus T^m(A_k\cap C))$

$x\in A \Rightarrow x \notin T^m(A_k) \supseteq T^m(A_k\cap C)$ για $m=1,\dots,k-1$

Επισης $x\notin C$ αρα $x \notin A_k\cap C$ $\forall k\in\mathbb{N}$

Αρα $x\notin T^m(A_k\cap C)$ $\forall k\in\mathbb{N}$ για $m=0$. Επομενως $\mu(X\setminus\tilde{C}) \geq \mu(A\setminus C) > 0$

αφού $\mu_A(C) = \frac{\mu(C)}{\mu(A)} < 1$. Αφού το αρχικό σύστημα είναι εργοδικό

εχουμε ατοπο.

Θεώρημα (Kac)

Εστω $(X,\mathcal{A},\mu,T)$ σ.δ.μ. και $A\in\mathcal{A}$ με $\mu(A)>0$.

Εστω $N_A(x) = \inf\{n\in\mathbb{N} \,/\, T^n(x)\in A\}$

τοτε $\int_A N_A \, d\mu = 1 - \mu(\{x\in X \,/\, T^n(x)\notin A \;\; \forall n \geq 0\})$

Πόρισμα Αν $(X,\mathcal{A},\mu,T)$ είναι εργοδικό σ.δ.μ. και $A\in\mathcal{A}$ με $\mu(A)>0$

τοτε $\int_A N_A\, d\mu = 1$ και άρα $\int_A N_A \, d\mu_A = \frac{1}{\mu(A)}$

απόδειξη: Οταν το σύστημα είναι εργοδικό $\mu(\{x\in X / T^n(x)\notin A \;\forall n\geq 0\}) =$

$= \mu\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} T^{-n}(A^c)\right) = 1 - \mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(A)\right) = 0$

απόδειξη θεωρήματος

Ορίζουμε $A_n = \{x\in A \,/\, N_A(x) = n\} = \begin{cases} T^{-1}(A)\cap A, & n=1 \\ A\cap T^{-1}(A^c)\cap\dots\cap T^{-n+1}(A^c)\cap T^{-n}(A) \end{cases}$

$B_n = \{x\in X\setminus A \mid N_A(x) = n\}$ για $n\in\mathbb{N}$.

$A_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} A\cap T^{-n}(A^c)$, $B_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} (X\setminus A)\cap T^{-n}(A^c)$

Από Poincaré, $\mu(A_\infty) = 0$.

Παρατηρούμε ότι $A_1 \cup B_1 = T^{-1}(A)$. Για $n\in\mathbb{N}$: $A_{n+1}\cup B_{n+1} = T^{-1}(B_n)$

$x\in A_{n+1}\cup B_{n+1}$ ανν $T(x)\notin A, \dots, T^n(x)\notin A$, $T^{n+1}(x)\in A$

$x \in T^{-1}(B_n)$ αν $T(x) \notin A, \dots, T^n(x) \notin A$, $T^{n+1}(x) \in A$.
Εχουμε ότι $X = A_\infty \cup B_\infty \cup \bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \cup B_n)$ ξενες ενώσεις. Επομένως:

$$1 = \underbrace{\mu(A_\infty)}_{0} + \mu(B_\infty) + \sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n) + \sum_{n=1}^{\infty}\mu(B_n) \quad (1)$$

Επίσης $T^{-1}(B_n) = A_{n+1} \cup B_{n+1}$, επομένως $\mu(B_n) = \mu(T^{-1}(B_n)) = \mu(A_{n+1}) + \mu(B_{n+1})$
$= \mu(A_{n+1}) + \mu(A_{n+2}) + \mu(B_{n+2}) = \dots = \sum_{j=n+1}^{m}\mu(A_j) + \mu(B_m)$, $\forall m > n$.

Παίρνω όριο καθώς $m \to \infty$. $\mu(B_n) \overset{⊛}{=} \sum_{j=n+1}^{\infty}\mu(A_j) + 0 = \sum_{j=n+1}^{\infty}\mu(A_j)$ (2)

⊛ επειδή τα $B_n, n \in \mathbb{N}$ είναι ξένα ανά 2, άρα $\sum_{n=1}^{\infty}\mu(B_n) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n) \leq 1$
οπότε $\mu(B_n) \to 0$.
Από (1),(2): $1 - \mu(B_\infty) = \sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n) + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=n+1}^{\infty}\mu(A_j) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=n}^{\infty}\mu(A_j) =$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\mu(\{x \in A \,/\, N_A(x) \geq n\}) = \int \mu(N_A \geq t)\,dt = \int_A N_A \, d\mu$$

Θεώρημα (Rokhlin)
Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ αντιστρέψιμο και εργοδικό σδμ με το μ. χωρίς άτομα.
Τότε $\forall \varepsilon > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists C \in \mathcal{A}$ με $\mu(C) > 0$ τ.ω.
(1) $C, T(C), \dots, T^{n-1}(C)$ είναι ξένα ανά δύο
(2) $\mu(C \cup T(C) \cup \dots \cup T^{n-1}(C)) > 1 - \varepsilon$
απόδειξη Δοθέντων των $\varepsilon > 0$ και $n \in \mathbb{N}$, επειδή το μ δεν έχει άτομα, $\exists B \in \mathcal{A}$ τ.ω. $0 < \mu(B) < \frac{\varepsilon}{n-1}$

Ορίζουμε $A = B \cap \limsup_n T^{-n}(A) \cap \limsup_n T^n(A)$ και τον επαγόμενο πύργο του Kakutani. Ορίζουμε: $C = \bigcup_{k=n}^{\infty}\bigcup_{j=0}^{[k/n]-1} T^{jn}(A_k)$

όπου $A_k = \{x \in A \,/\, T(x) \notin A, \dots, T^{k-1}(x) \notin A, T^k(x) \in A\}$ $k \in \mathbb{N}$.
$\left[\frac{k}{n}\right] = m$ αν $mn \leq k < (m+1)n$. Άρα $C = \bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcup_{k=mn}^{(m+1)n-1}\bigcup_{j=0}^{m-1} T^{jn}(A_k) =$

$$= \bigcup_{k=n}^{2n-1} A_k \cup \bigcup_{k=2n}^{3n-1} A_k \cup \bigcup_{k=3n}^{4n-1} A_k$$

$$\cup \bigcup_{k=2n}^{3n-1} T^n(A_k) \cup \bigcup_{k=3n}^{4n-1} T^n(A_k) \ \ldots$$

$$\cup \bigcup_{k=3n}^{4n-1} T^{2n}(A_k) \ \ldots$$

<u>Ισχυρισμός</u> $C, T(C), \ldots, T^{n-1}(C)$ είναι ξένα ανά δύο

<u>απόδειξη</u> $T^i(C) = \bigcup_{k=n}^{\infty} \bigcup_{j=0}^{[k/n]-1} T^{jn+i}(A_k)$, $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$

Εστω $j_1, i_1, k_1, i_2, j_2, k_2$ τ.ω. $k_1, k_2 \geq n$.

$j_1 \leq \left[\frac{k_1}{n}\right] - 1$, $j_2 \leq \left[\frac{k_2}{n}\right] - 1$, $i_1, i_2 \in \{0, \ldots, n-1\}$

Αν $n \cdot j_1 + i_1 = n \cdot j_2 + i_2$ τοτε $(j_1 - j_2)n = i_1 - i_2$ και επειδή $i_1, i_2 \in \{0, \ldots, n-1\}$ πρέπει $j_1 = j_2$ και αρα $i_1 = i_2$. Αρα υποθετουμε οτι $j_1 n + i_1 \neq j_2 n + i_2$. Εχουμε $j_1 n + i_1 < (j_1+1)n \leq \left[\frac{k_1}{n}\right] n \leq k_1$

[<u>Λήμμα</u> Αν $\ell_1 < k_1$, $\ell_2 < k_2$ και $\ell_1 \neq \ell_2$ τοτε $T^{\ell_1}(A_{k_1}) \cap T^{\ell_2}(A_{k_2}) = \emptyset$.]

<u>Απόδειξη</u> Εστω οτι $x \in T^{\ell_1}(A_{k_1}) \cap T^{\ell_2}(A_{k_2})$. Τοτε υπάρχουν $x_1 \in A_{k_1}$ και $x_2 \in A_{k_2}$: $T^{\ell_1}(x_1) = x = T^{\ell_2}(x_2)$. Εστω $\ell_1 < \ell_2$, τότε

$x_1 = T^{\ell_2 - \ell_1}(x_2)$ με $x_2 \in A_{k_2}$ και $\ell_2 - \ell_1 < k_2$ που είναι ατοπο]

Απο το Λήμμα $T^{j_1 n + i_1}(A_{k_1}) \cap T^{j_2 n + i_2}(A_{k_2}) = \emptyset$.

Επεται οτι $T^i(C) \cap T^{i'}(C) = \emptyset$.

$$C \cup T(C) \cup \cdots \cup T^{n-1}(C) = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=mn}^{(m+1)n-1} \bigcup_{j=0}^{m-1} \bigcup_{i=0}^{n-1} T^{jn+i}(A_k) =$$

$$= \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=mn}^{(m+1)n-1} \bigcup_{j=0}^{mn-1} T^j(A_k)$$

Επισης $\bigcup_{k=0}^{\infty} T^k(A) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=0}^{k-1} T^m(A_k) =$

$$= \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=mn}^{(m+1)n-1} \bigcup_{j=0}^{k-1} T^j(A_k) \cup \bigcup_{k=0}^{n-1} \bigcup_{j=0}^{k-1} T^j(A_k)$$

$$\mu\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} T^k(A) \setminus C \cup T(C) \cup \cdots \cup T^{n-1}(C)\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{k-1} \mu(T^j(A_k)) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=mn}^{(m+1)n-1} \sum_{j=mn}^{k-1} \mu(T^j(A_k)) =$$

$$\overset{\sigma.\beta.\mu}{=} \sum_{k=0}^{n-1} k\mu(A_k) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=mn}^{(m+1)n-1} (k-mn)\mu(A_k) \leq \sum_{k=0}^{n-1} k\mu(A_k) +$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=mn}^{(m+1)n-1} (n-1)\mu(A_k) = (n-1)\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) = (n-1)\mu(A) = (n-1)\mu(B) < \varepsilon$$

Απο εργοδικότητα έχουμε οτι $\mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} T^n(A)\right) = 1$

(Εφαρμόζω εργοδικότητα στην T^{-1})

Αρα $\mu(C \cap T(C) \cap \dots \cap T^{n-1}(C)) > 1-\varepsilon$

μαθημα 17°
3/12/18

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3° - ΤΟΠΟΛΟΓΙΚΑ ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Ενα <u>τοπολογικό δυναμικό σύστημα</u> είναι ενα (X, T), οπου X συμπαγής μετρικός χώρος $T: X \to X$ συνεχής

Ενα Τ.δ.σ (X, T) είναι <u>αντιστρέψιμο</u> αν $T: X \to X$ είναι ομοιομορφισμός. Γι αυτό αρκεί η T^{-1} να υπάρχει μόνο

<u>Παραδείγματα</u>

1) $X = \mathbb{T}$, $T(x) = x + \alpha \pmod 1$, $x \in \mathbb{T}$. (X, T) τοπολογικό δυναμικό σύστημα, αντιστρέψιμο.

Γενικότερα, καθε στροφή $T(x) = \alpha x$, $\alpha \in G$, $x \in G$ με την G συμπαγή μετρική ομάδα είναι ενα Τ.δ.σ.

2) Επιμορφισμοί τόρων: A ενας $d \times d$ πίνακας με $A_{ij} \in \mathbb{Z}$, $\forall i, j \in \{1, \dots, d\}$
$T(x) = Ax \pmod 1$ $x \in \mathbb{T}^d$ ορίζει απεικόνιση $T: \mathbb{T}^d \to \mathbb{T}^d$ και το ζεύγος (X, T) είναι Τ.δ.σ.

3) S πεπερασμένο σύνολο. $X = S^{\mathbb{N}} = \{ \underline{x} = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \ / \ x_n \in S \ \forall n \in \mathbb{N} \}$
$T: X \to X$ shift $(T\underline{x})_n = x_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.
Μετρική $d((x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}) = e^{-n(\underline{x}, \underline{y}) + 1}$
$n(\underline{x}, \underline{y}) = \inf\{ n \in \mathbb{N} \ / \ x_n \neq y_n \}$
$\inf \emptyset = +\infty$.

4) S πεπερασμένο σύνολο $X = S^{\mathbb{Z}} = \{ \underline{x} = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \ / \ x_n \in S \ \forall n \in \mathbb{Z} \}$
$T: X \to X$ shift $(T\underline{x})_{n+1} = x_n$ $\forall n \in \mathbb{Z}$
Μετρική $d((x_n)_{n \in \mathbb{Z}}, (y_n)_{n \in \mathbb{Z}}) = e^{-n(\underline{x}, \underline{y})}$

$h(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y}) = \inf\{n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \,/\, x_n \neq y_n$ ή $x_{-n} \neq y_{-n}\}$

Το (X, T) είναι αντιστρέψιμο τ.δ.σ.

Ελαχιστικά δυναμικά συστήματα

Ορισμός Ένα τ.δ.σ (X, T) λέγεται ελαχιστικό αν τα μόνα αναλλοίωτα κλειστά υποσύνολα του X είναι το $\varnothing$ και το X, όπου αναλλοίωτο σημαίνει $T(E) \subseteq E$ (ή $T^{-1}(E) \supseteq E$)

Αν (X, T) και $\varnothing \neq F \subset X$ με $T(F) \subseteq F$ μπορώ να θεωρήσω $T|_F : F \to F$

Παρατηρήσεις

1) Αν (X, T) τ.δ.σ., X άπειρο σύνολο και είναι ελαχιστικό τότε το σύστημα δεν μπορεί να περιέχει περιοδικά σημεία, δηλαδή σημεία τ.ω. $T^n(x) = x$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$.

Πράγματι, αν x περιοδικό, δηλ. $T^n(x) = x$, τότε το σύνολο $\{x, T(x), T^2(x), \ldots, T^{n-1}(x)\}$ είναι μη κενό, κλειστό, αναλλοίωτο υποσύνολο και δεν είναι όλο το X. Αυτό αντιτίθεται στην ελαχιστικότητα.

2) Αν (X, T) ελαχιστικό τ.δ.σ τότε $T(X) = X$.

Πράγματι, αν $T(X) \subset X$ γνωρίζουμε ότι $T(X)$ συμπαγές και άρα κλειστό και $T(T(X)) \subseteq T(X)$, $T(X) \neq \varnothing$ και έχουμε άτοπο πάλι.

3) Αν (X, T) τ.δ.σ και F_1, F_2 κλειστά αναλλοίωτα υποσύνολα τ.ω. $(F_i, T|_{F_i})$ να είναι ελαχιστικά $i \in \{1, 2\}$ τότε $F_1 = F_2$ ή $F_1 \cap F_2 = \varnothing$

Πράγματι, αν $F_1 \cap F_2 \neq \varnothing$ έχουμε ότι $F_1 \cap F_2$ είναι κλειστό και $T(F_1 \cap F_2) \subseteq F_1 \cap F_2$ και $F_1 \cap F_2 \subseteq F_i$, $i \in \{1, 2\}$. Επειδή F_1, F_2 ελαχιστικά, πρέπει $F_1 \cap F_2 = F_1$ και $F_1 \cap F_2 = F_2$. Άρα $F_1 = F_2$.

Παραδείγματα

1) $X=\mathbb{T}$, $T(x)=2x \pmod 1$ δεν είναι ελαχιστικό γιατί έχει σταθερά σημεία. $T(0)=0$.

Γενικά επιμορφισμοί του d-τορου δεν είναι ελαχιστικοί.

2) Οι χώροι shift $X=S^{\mathbb{N}}$ ή $X=S^{\mathbb{Z}}$ με T το shift δεν είναι ελαχιστικοί επίσης γιατί έχουν σταθερά σημεία $(s,s,s,\dots)\in X$ όπου $s\in S$ είναι σταθερό σημείο.

Πρόταση Έστω (X,T) τ.δ.σ. Τα εξής είναι ισοδύναμα.

1) (X,T) ελαχιστικό

2) $\overline{\{T^n(x) \,/\, n\in\mathbb{N}\cup\{0\}\}}=X \quad \forall x\in X$

3) $\forall\, \emptyset\neq U\subseteq X$ ανοικτό, $X=\bigcup_{n=0}^{\infty}T^{-n}(U)$

Σημείωση Λόγω συμπάγειας, το (3) μπορεί και να γραφτεί ως:
$\forall\, \emptyset\neq U\subseteq X$ ανοικτό $\exists\, N\in\mathbb{N}$ τ.ω. $X=\bigcup_{n=0}^{N}T^{-n}(U)$

Απόδειξη 1) ⇒ 2) Έστω $x\in X$. Έχουμε:
$T\,\overline{\{T^n(x)\,/\,n\in\mathbb{N}\cup\{0\}\}}\subseteq\overline{T(\{T^n(x)\,/\,n\in\mathbb{N}\cup\{0\}\})}\subseteq\overline{\{T^n(x)/n\in\mathbb{N}\}}\subseteq$
$\subseteq\overline{\{T^n(x)\,/\,n\in\mathbb{N}\cup\{0\}\}}$. Άρα το $\overline{\{T^n(x)\,/\,n\in\mathbb{N}\cup\{0\}\}}$ είναι αναλλοίωτο και κλειστό και επίσης δεν είναι κενό (περιέχει το x). Αφού το σύστημα είναι ελαχιστικό, πρέπει $\overline{\{T^n(x)/n\in\mathbb{N}\cup\{0\}\}}=X$

2) ⇒ 3) Έστω U ανοικτό, $U\neq\emptyset$. Έστω $x\in X$. Γνωρίζουμε ότι $\overline{\{T^n(x)\,/\,n\in\mathbb{N}\cup\{0\}\}}=X$. Άρα $\{T^n(x)\,/\,n\in\mathbb{N}\cup\{0\}\}\cap U\neq\emptyset$.
Άρα $\exists\, n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ τ.ω. $T^n(x)\in U \Leftrightarrow x\in T^{-n}(U)\subseteq\bigcup_{m=0}^{\infty}T^{-m}(U)$
Έπεται ότι $X=\bigcup_{m=0}^{\infty}T^{-m}(U)$.

3) ⇒ 1) Έστω $E\subset X$ κλειστό τ.ω. $T(E)\subseteq E \Leftrightarrow E\subseteq T^{-1}(E)$
Έστω ότι $E\neq X$. Τότε $U=X\setminus E\neq\emptyset$ ανοικτό. Άρα $X=\bigcup_{n=0}^{\infty}T^{-n}(U)$
Επίσης $E\subseteq T^{-1}(E)\Leftrightarrow T^{-1}(U)\subseteq U$.
Άρα $T^{-n}(U)\subseteq U$ $\forall n$ και άρα $X=\bigcup_{n=0}^{\infty}T^{-n}(U)=U$, άρα $E=\emptyset$
Άρα (X,T) ελαχιστικό

Παράδειγμα $X = \mathbb{T}$, $T(x) = x + a (\mathrm{mod}\ 1)$.

Αν $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ το σύστημα (X, T) είναι ελαχιστικό.

Από Θ. Kronecker $\overline{\{T^n(0) / n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}} = \mathbb{T}$. Έπεται ότι $\overline{\{T^n(x) / n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}} = X$ $\forall x \in X = \mathbb{T}$. Από πρόταση το σύστημα είναι ελαχιστικό.

Γενικά καθε εργοδική στροφή συμπαγούς ομάδας είναι ελαχιστικό σύστημα.

Για αντιστρέψιμα συστήματα (X, T) μπορούμε να ορίσουμε "αμφίπλευρη" ελαχιστικότητα. Δηλ:

Ορισμός Ένα αντιστρέψιμο τ.δ.σ θα λέγεται αμφίπλευρα ελαχιστικό αν για καθε κλειστό $E \subseteq X$ με $T(E) = E$ είναι ϕ ή X.

Πρόταση Έστω (X, T) ένα αντιστρέψιμο τ.δ.σ. Τα εξής είναι ισοδύναμα.

1) Το (X, T) είναι αμφίπλευρα ελαχιστικό
2) $\overline{\{T^n(x) / n \in \mathbb{Z}\}} = X$ $\forall x \in X$
3) $\forall \phi \neq U \subseteq X$ ανοικτό, $X = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} T^n(U)$

απόδειξη Ίδια με μονόπλευρη ελαχιστικότητα

Παρατήρηση

Για ένα αντιστρέψιμο σύστημα (X, T) μονόπλευρη ελαχιστικότητα $\Rightarrow$ αμφίπλευρη

Πρόταση Ένα αντιστρέψιμο τ.δ.σ είναι (μονόπλευρα) ελαχιστικό ανν είναι αμφίπλευρα ελαχιστικό.

απόδειξη Αρκεί ν.δ.ο. αμφίπλευρη ελαχιστικότητα $\Rightarrow$ μονόπλευρη.
Αρκεί να δείξει το εξής

Λήμμα Αν (X, T) είναι τ.δ.σ. και $E \subseteq X$ κλειστό τ.ω. $T(E) \subseteq E$ τότε υπάρχει $F \subseteq E$ κλειστό τ.ω. $T(F) = F$ και $F \neq \phi$ αν $E \neq \phi$.

απόδειξη Έστω $E \neq \phi$, κλειστό τ.ω. $T(E) \subseteq E$. Ορίζουμε $F = \bigcap_{n=0}^{\infty} T^n(E)$. Το F είναι συμπαγές, άρα κλειστό. Έχουμε

$E \supseteq T(E) \supseteq T^2(E) \supseteq T^3(E) \supseteq \dots$ και $T^n(E) \neq \emptyset$ $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ γιατί $E \neq \emptyset$.
Άρα η $T^n(E)$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ είναι φθίνουσα ακολουθία συμπαγών, μη κενών υποσυνόλων του συμπαγούς X άρα $\bigcap_{n=0}^{\infty} T^n(E) \neq \emptyset$.

Ισχυρισμός: $T(F) \subseteq F$

Πράγματι, $T(F) = T\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} T^n(E)\right) \subseteq \bigcap_{n=0}^{\infty} T^{n+1}(E) = \bigcap_{n=1}^{\infty} T^n(E) \subseteq \bigcap_{n=0}^{\infty} T^n(E) = F$

Ισχυρισμός: $F \subseteq T(F)$

Πράγματι, έστω $x \in F$ τότε $x \in T^n(E)$ $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, δηλ. $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ $\exists x_n \in E$ τ.ω. $T^n(x_n) = x$, δηλ για $y = T^{n-1}(x_n)$ έχουμε:
$y \in T^{n-1}(E) \cap T^{-1}(\{x\})$ $n \in \mathbb{N}$, δηλ τα $T^n(E) \cap T^{-1}(\{x\})$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ φθίνουσα ακολουθία συμπαγών, μη κενών υποσυνόλων του X. Άρα πάλι $\bigcap_{n=0}^{\infty} T^n(E) \cap T^{-1}(\{x\}) \neq \emptyset$

Αν $y \in \bigcap_{n=0}^{\infty} T^n(E) \cap T^{-1}(\{x\})$ τότε $y \in F$ και $T(y) = x$. Άρα $x \in T(F)$

Θεώρημα Birkoff

Κάθε τ.δ.σ. (X,T) περιέχει ένα ελαχιστικό υποσύστημα

απόδειξη $\mathcal{F} = \{E \subseteq X \,/\, E \neq \emptyset$ κλειστό και $T(E) \subseteq E\}$
$\mathcal{F} \neq \emptyset$ γιατί $X \in \mathcal{F}$. Διάταξη στο $\mathcal{F}$ $E_1 \leq E_2$ αν $E_1 \subseteq E_2$
Αν $\mathcal{F}'$ αλυσίδα στο $\mathcal{F}$, δηλ $\mathcal{F}'$ είναι ολικά διατεταγμένο υποσύνολο
Αρκεί ν.δ.ο η $\mathcal{F}'$ έχει κάτω φράγμα. Πράγματι, $F = \bigcap_{E \in \mathcal{F}'} E$ είναι κλειστό. Ισχύει $T(F) \subseteq F$. Από ιδιότητα πεπερασμένων τομών, το F είναι μη κενό (τομή μη κενών συμπαγών με την ιδιότητα ότι κάθε πεπερασμένη τομή τους είναι μη κενή) Άρα $F \in \mathcal{F}$ και $F \subseteq E$ $\forall E \in \mathcal{F}'$. Άρα όντως F είναι κάτω φράγμα για την $\mathcal{F}'$
Από το λήμμα του Zorn η $\mathcal{F}$ έχει ελάχιστο στοιχείο. Τότε το $(F, T|_F)$ είναι ελαχιστικό υποσύστημα του (X,T).

Ερώτημα: Γράφεται κάθε σύστημα σαν ξένη ένωση ελαχιστικών υποσυστημάτων;

Απάντηση: Όχι

Αντιπαράδειγμα $X = \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$, $T: X \to X$ shift, $x = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ όπου

$x_n = 1 \ \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ $\quad x_n = 0 \ \forall n < 0$. Εστω $X' = \overline{\{T^n(x) / n \in \mathbb{Z}\}}$

Θεωρούμε το συστημα $(X', T|_{X'})$

$X' = \{T^n(x) / n \in \mathbb{Z}\} \cup \{(\dots 0, 0, 0, \dots)\} \cup \{(\dots 1, 1, 1, \dots)\}$

προφανώς, το X' δεν είναι ελαχιστικό, ούτε γράφεται σαν ένωση ελαχιστικών.

Προταση Αν (X, T) ελαχιστικό Τ.δ.σ. τότε κάθε $f \in C(X)$ αναλλοίωτη είναι σταθερή.

αποδειξη Εστω $x \in X$ και θεωρούμε το σύνολο $\{f(T^n(x)) / n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ για $f \in C(X)$ αναλλοίωτη. Αυτο είναι μονοσυνολο, έστω $\{c\}$.

Εστω $y \in X$, τότε αν $y = T^n(x)$ για κάποιο $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ τότε $f(y) = c$. Αλλιώς υπάρχει $n_1 < n_2 < \dots$ τ.ω. $T^{n_k}(x) \to y$ επειδή η τροχιά $\overline{\{T^n(x) / n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}} = X$. Απο συνεχεια $f(T^{n_k}(x)) \to f(y)$

άρα $f(y) = c$ άρα $f(y) = c \ \forall y \in X$. $\qquad \overset{\shortparallel}{c} \ \forall k \in \mathbb{N}$

Παρατηρηση Το αντίστροφο δεν ισχύει. Το επιχείρημα αν ποιμε δουλεύει και όταν έχω μόνο μια πυκνή τροχιά.

αντιπαραδειγμα γενικα

$X = \mathbb{T}$, $T(x) = 2x \pmod 1$. Εδώ $\forall f \in C(\mathbb{T})$ και αναλλοίωτη, έχουμε ότι $f \in L^2(\mathbb{T}, \lambda_{\mathbb{T}})$ και αναλλοίωτη. $(\mathbb{T}, \mathcal{B}_{\mathbb{T}}, \lambda_{\mathbb{T}}, T)$ είναι εργοδικό

Αρα f = σταθερή σ.π. και αφού $f \in C(\mathbb{T})$ πρέπει f = σταθερή παντού.

Αρα κάθε $f \in C(\mathbb{T})$ αναλλοίωτη είναι σταθερή αλλά το σύστημα δεν είναι ελαχιστικό (όπως είδαμε).

μάθημα 18°
5/12/18

Ορισμός Ενα Τ.δ.σ. (X, T) λέγεται τοπολογικά μεταβατικό αν έχει μια πυκνή τροχιά, δηλ. $\exists x \in X$ τ.ω. $\overline{\{T^n(x) / n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}} = X$

Παρατηρηση Ελαχιστικό $\Rightarrow$ τοπολογικά μεταβατικό

Ορισμός Ενα αντιστρέψιμο Τ.δ.σ. (X, T) λέγεται αμφίπλευρα μεταβατικό αν υπάρχει μια πυκνή αμφίπλευρη τροχιά, δηλ. $\exists x \in X$ τ.ω. $\overline{\{T^n(x) / n \in \mathbb{Z}\}} = X$.