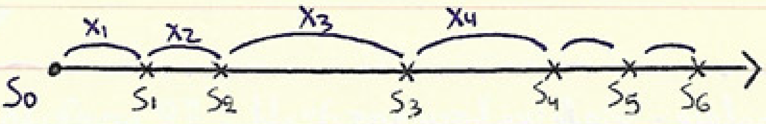
Μάθημα 1º (2|10|2018)

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ ΜΕ ΚΟΣΤΟΙ

1. Ανανεωτικές Διαδικασίες

↳ Σημειακή Στοχαστική Διαδικασία (point process)



S_i = χρόνος i-οστού γεγ.
$X_i = S_i - S_{i-1}$ = ενδιάμεσος χρόνος
($S_0 = 0$)

$S_1 \leq S_2 \leq S_3 \ldots$
ή (ισοδύναμα)
$X_i \leq 0$, $i = 1, 2 \ldots$

$\Big\}$ Απαίτηση για να είναι η $\{S_i\}$ σημειακή διαδικασία

$N(t) = \sup\{n^{\geq 0} : S_n \leq t\}$ = # γεγονότων στο $(0,t]$

↳ Απαριθμήτρια σημειακή διαδικασία της $\{S_n\}$

> Αν ξέρω $N(t)$ ή $S_1 \leq S_2 \leq S_3 \ldots$
> είναι το ίδιο

↳ Ανανεωτική Διαδικασία

Ανανεωτική Διαδικασία = Σημειακή Διαδικασία με X_i ανεξ. & ισόν.
$X_i \sim F_X(t)$
↳ κατανομή ενδιαμ. χρόνων
$\{N(t)\}$ (απαριθμ.) ανανεωτική διαδικασία

2. Βασικά Μέτρα για Ανανεωτικές Διαδικασίες

- Συνάρτηση κατανομής του χρόνου S_n (n-οστού γεγ.)
  $F_{S_n}(t) = \Pr[S_n \leq t]$

- Συνάρτηση Πιθανότητας της $N(t)$

  $P_n(t) = P_r[N(t)=n]$

  ↳ πιθανότητα να συμβούν ακριβώς n γεγονότα

- $E[S_n]$

  $m_x(t) = E[N(t)]$: ανανεωτική συνάρτηση

  ↳ κατά μέσο όρο πόσα γεγονότα θα έχουν συμβεί

Παρένθεση 1η : Συνελίξεις Laplace-Stieltjes (συν. κατ.)

$X \geq 0,\ Y \geq 0$ τ.μ. ανεξ. $X \sim \underset{\substack{\uparrow \\ \sigma\kappa}}{F_X(t)}$, $Y \sim \underset{\substack{\uparrow \\ \sigma\kappa}}{F_Y(t)}$

$f_X(t)$ σ.π.π $f_Y(t)$ σ.π.π

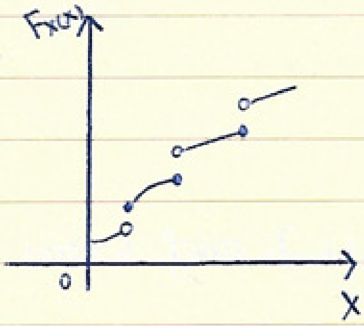
$\underline{F_{X+Y}(t) = ??}$

→ Αν είχα μικτή θα ήταν αθροισμα αυτών των 2

$$F_{X+Y}(t) = P_r[X+Y \leq t] = \begin{cases} \int_0^\infty P_r[X+Y \leq t \mid X=x] f_X(x)dx, & X \text{ συνεχ} \\ \sum_x P_r[X+Y \leq t \mid X=x] P_r[X=x], & X \text{ διακρ} \end{cases}$$

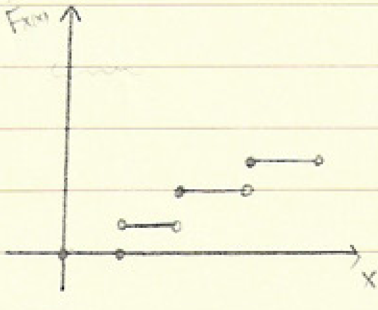
Θέλουμε να βρούμε έναν τρόπο αυτά τα 2 να τα γράφουμε ως ένα

$$= \int_0^\infty P_r[X+Y \leq t \mid X=x] dF_X(x) = \int_0^\infty P_r[Y \leq t-x] dF_X(x)$$



$$\int_0^\infty g(x) dF_X(x) = \underbrace{\int_0^\infty g(x) F'_X(x) dx}_{\text{σημεία που είναι παραγωγίσιμη}} + \underbrace{\sum_{\substack{x:\text{ άλματα} \\ \text{της } F_X(x)}} g(x)(F_X(x) - F_X(x^-))}_{\text{στα άλματα}}$$

Για x διακριτή :



$$\Rightarrow F'_X(x) = 0 \Rightarrow \int_0^\infty g(x) dF_X(x) = \sum_x g(x)(F_X(x) - F_X(x^-))$$

Ομοίως, για x συνεχής έχουμε

$$\int_0^\infty g(x) dF_X(x) = \int_0^\infty g(x) F'(x) dx$$

Τελικά, $F_{X+Y}(t) = {}_0\int^{\infty} F_Y(t-x)\,dF_X(x) \overset{\text{ορσ}}{=} (F_X * F_Y)(t)$

↳ Η συνέλιξη που χρησιμοποιούμε στα μαθηματικά (συνεχών κατανομών)

Προσοχή!! $(f*g)(t) = {}_0\int^{t} f(t-x)g(x)\,dx$ ⇝ άλλη συνέλιξη (πυκνοτήτων)

Παρένθεση 2η: Μετασχηματισμός L-S

$X \geq 0$ τμ με σ.κ $F_X(t)$ ⇝ μετασχ L-S της X:

$$\tilde{F}_X(s) = {}_0\int^{\infty} e^{-ts}\,dF_X(t) = E[e^{-sX}]$$

↑ ενοποιημένος τύπος X διακρ ή συνεχ

Γενικά, αν $F(t)$ αυξ στο $[0,\infty)$ ⇝ μετασχ L-S της F:

$$\tilde{F}(s) = {}_0\int^{\infty} e^{-st}\,dF(t)$$

Ζεύγη $F(t) - \tilde{F}(s)$

$F(t)$	$\tilde{F}(s)$	T.μ
$1_{\{t\geq 0\}}$	1	$X=0$
t	$\frac{1}{s}$	-
$1-e^{-\lambda t}$	$\frac{\lambda}{\lambda+s}$	$X \sim Exp(\lambda)$
$1-\sum_{k=0}^{n-1} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}$	$\left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^n$	$X \sim Erlang(n,\lambda)$
$(F*G)(t)$	$\tilde{F}(s)\cdot\tilde{G}(s)$	
$aF(t) * bG(t)$	$a\tilde{F}(s)+b\tilde{G}(s)$	

⇝ είναι σταθερή 0 μετά έχει ένα άλμα από το 0 στο 1

${}_0\int^{\infty} e^{-0\cdot s}\,\cancel{dF_X(t)} \to 1$

⇝ ${}_0\int^{\infty} e^{-ts}(\lambda - t)\,dt$

ooo Τέλος παρενθέσεων - Επιστροφή στο 2ooo

3. Βασική "γέφυρα" μεταξύ $\{S_n\}$ και $\{N(t)\}$

$\{S_n \le t\} = \{N(t) \ge n\}$ ⇝ Τη χρονική στιγμή t έχουν συμβεί τουλ. n γεγονότα

↓

Το n-οστό γεγονός συνέβη το πολύ σε χρόνο t

$\{N(t) = n\} = \{S_n \le t < S_{n+1}\}$ ⇝ Το n-οστό το πολύ σε t, το n+1 μετά το t

↓

ακριβώς n γεγονότα

$\{N(t) \le n\} = \{S_{n+1} > t\}$ ⇝ Το n+1 γεγονός συνέβη πολύ μετά το t

↓

Την χρονική στιγμή t το πολύ n γεγονότα

4. Υπολογισμοί βασικών μέτρων

- $F_{S_n}(t) = P_r[S_n \le t] = P_r\left[\sum_{i=1}^{n} X_i \le t\right] = \underbrace{(F_X * F_X * \ldots * F_X)}_{n\text{-φορές}}(t) = F_X^{*n}(t)$
- $p_n(t) = P_r[N(t)=n] = P_r[S_n \le t < S_{n+1}] = P_r[\{S_n \le t\} \setminus \underbrace{\{S_{n+1} \le t\}}]$
  $= P_r[S_n \le t] - P_r[S_{n+1} \le t] = F_X^{*n}(t) - F_X^{*(n+1)}(t)$

  ↳ αυτό συνεπάγεται προφανώς ότι $\{S_n \le t\}$
- $E[S_n] = n \cdot \mu$, $\mu = E[X_i]$
- $m_X(t) = E[N(t)] = E\left[\sum_{n=1}^{\infty} \underset{\downarrow}{\mathbb{1}_{\{S_n \le t\}}}\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{P_r[S_n \le t]}_{F_{X(t)}^{*n}}$

  μαζεύω άσσους για όσα γεγονότα έγιναν πριν την t = # γεγονότων πριν την t

$$\mathbb{1}_{\{S_n \le t\}} = \begin{cases} 1, & S_n \le t \\ 0, & S_n > t \end{cases}$$

5. Αντίστοιχοι Μετασχηματισμοί $\mathcal{L}$-S

- $\tilde{F}_{S_n}(s) = (\tilde{F}_X(s))^n$
- $\tilde{p}_n(s) = (\tilde{F}_X(s))^n - (\tilde{F}_X(s))^{n+1} = (1 - \tilde{F}_X(s))(\tilde{F}_X(s))^n$

$$-\tilde{m}_X(s) = \sum_{n=1}^{\infty} (\tilde{F}_X(s))^n = \frac{\tilde{F}_X(s)}{1-\tilde{F}_X(s)}$$ (γεωμ. πρόοδος)

Μάθημα 2ο (4/10/18)

Ανανεωτική Θεωρία

1. Ανανεωτικός Συλλογισμός

$$h(t) = E[f(N(t))] \text{ ή } Pr[N(t) \in A] \text{ ή } E[f_{N(t)}(S_1, S_2, \dots, S_{N(t)})]$$

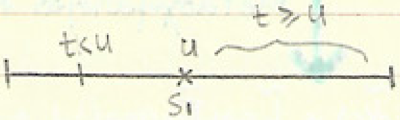
Ανανεωτικός Συλλογισμός: Είναι ένα εργαλείο δημιουργίας ανανεωτικών εξισώσεων για $h(t)$. Δουλεύει για δέσμευση στον S_1

Παράδειγμα 1ο: Ανανεωτική εξίσωση για την ανανεωτική συνάρτηση $m_X(t)$

$$h(t) = m_X(t) = E[N(t)] = E[E[N(t)|S_1]] = \int_0^{\infty} E[N(t)|S_1 = u]\, dF_{S_1}(u) \quad (1)$$

μέση τιμή #γεγονότων δεδομένου ότι ο χρόνος 1ου γεγονότος = u

$$E[N(t)|S_1 = u] = \begin{cases} 0, & u > t \\ 1 + E[N(t-u)], & u \le t \end{cases} \quad (2)$$



$$\xrightarrow{\text{ιδέα}} \left((N(t)|S_1 = u) \overset{st}{=} 1 + N(t-u) \text{ για } u \le t \right)$$

$$(1) \,\&\, (2) \Rightarrow \underset{\text{άγνωστη συνάρτηση}}{h(t)} = \int_0^t [1 + h(t-u)]\, dF_X(u) + \int_t^{\infty} 0\, dF_X(u)$$

$$= F_X(t) + \int_0^t h(t-u)\, dF_X(u) = \underset{\text{γνωστή συνάρτηση}}{F_X(t)} + (\overset{\text{άγνωστη συνάρτηση}}{h} * \underset{\text{σ.κ. ενδιάμεσων χρόνων}}{F_X})(t)$$

Σημείωση: $m(t) = F_X(t) + (m * F_X)(t)$

Παράδειγμα 2ο: Ανανεωτική εξίσωση για το μέσο χρόνο του επόμενου γεγονότος από τη στιγμή t

Έβαλα κατευθείαν X και όχι S_1 γιατί έχουν την ίδια κατανομή

$$h(t) = E[S_{N(t)+1}] = \int_0^\infty E[S_{N(t)+1} \mid S_1 = u]\, dF_X(u) \qquad (1)$$

$$E[S_{N(t)+1} \mid S_1 = u] = \begin{cases} u, & u > t \\ u + E[S_{N(t-u)+1}], & u \le t \end{cases} \qquad (2)$$

$$(1)\,\&\,(2) \Rightarrow \underset{\text{αγν.συν.}}{h(t)} = \int_0^t (u + h(t-u))\, dF_X(u) + \int_t^\infty u\, dF_X(u) = \underbrace{\int_0^\infty u\, dF_X(u)}_{E(X)=\mu} + \int_0^t h(t-u)\, dF_X(u)$$

$$= \underset{\text{γνωστή συνάρτηση (σταθερά)}}{\mu} + (\underset{\text{αγν.συν.}}{h} * \underset{\text{σ.κ. ενδιάμεσων χρόνων}}{F_X})(t)$$

2. Ανανεωτική Εξίσωση - Λύση

$$\underset{\text{αγν.συν.}}{h(t)} = \underset{\text{γνωστή συν.}}{d(t)} + \underbrace{\int_0^t h(t-u)\, d\overset{\text{σ.κ. ενδιάμεσων χρόνων}}{F_X(u)}}_{(h*F_X)(t)} \leftarrow \text{Ανανεωτική Εξίσωση}$$

$$\Big\downarrow \text{ Μετασχηματισμός L-S}$$

$$\tilde{h}(s) = \tilde{d}(s) + \tilde{h}(s) \cdot \tilde{F}_X(s)$$

$$\Rightarrow \tilde{h}(s) = \frac{\tilde{d}(s)}{1 - \tilde{F}_X(s)} = \tilde{d}(s)\left(1 + \frac{\tilde{F}_X(s)}{1 - \tilde{F}_X(s)}\right) = \tilde{d}(s) + \tilde{d}(s)\,\tilde{m}(s)$$

$$\xRightarrow{\text{λύση}} h(t) = d(t) + (d*m)(t) = d(t) + \int_0^t d(t-u)\, dm(u)$$

3. Υπολογισμός Ανανεωτικών Συναρτήσεων

Δίνεται $F_X(t) \longrightarrow$ Ψάχνω $m_X(t)$

1ος Τρόπος: $F_X(t) \xrightarrow{\text{εύκολο}} \tilde{F}_X(s) \xrightarrow{\text{εύκολο}} \tilde{m}_X(s) \xrightarrow{\text{δύσκολο}} m_X(t)$

2ος Τρόπος: $m_x = F_x + m * F_x$ $\rightsquigarrow$ βγάζω μια διαφορική εξίσωση για $m_x(t)$ και λύνω $\longrightarrow m_x(t)$ (σπάνια πιάνει)

3ος Τρόπος: $m_x = \sum_{n=1}^{\infty} F_x^{*n}$ (σπάνια πιάνει)

Παράδειγμα 1ο: Διαδικασία Poisson - Ανανεωτική Συνάρτηση

$X \sim Exp(\lambda)$, $F_x(t) = 1 - e^{-\lambda t}, t>0$, $f_x(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda t}, t>0$, $\tilde{F}_x(s) = \frac{\lambda}{\lambda+s}$

$$\tilde{m}_x(s) = \frac{\tilde{F}_x(s)}{1-\tilde{F}_x(s)} = \frac{\lambda}{s} = \lambda \cdot \frac{1}{s} \xrightarrow[\text{από πινακάκι 1ου μαθήματος}]{\left(\begin{smallmatrix}\tilde{F}(s) \leftrightarrow F(t) \\ 1/s \leftrightarrow t\end{smallmatrix}\right)} m_x(t) = \lambda \cdot t$$

Παράδειγμα 2ο: Ανανεωτική Συνάρτηση

$$X = \begin{cases} Exp(\lambda) \text{ με πιθ } p \\ Exp(\mu) \text{ με πιθ } 1-p \end{cases}, \quad p \in (0,1), \lambda, \mu > 0, \lambda \neq \mu$$

$$F_x(t) = p(1-e^{-\lambda t}) + (1-p)(1-e^{-\mu t}), t>0$$
$$f_x(t) = p \cdot \lambda e^{-\lambda t} + (1-p) \cdot \mu e^{-\mu t}, t>0$$
$$\tilde{F}_x(s) = p \frac{\lambda}{\lambda+s} + (1-p) \frac{\mu}{\mu+s} = \frac{\lambda p \cdot (\mu+s) + \mu(1-p)(\lambda+s)}{(\mu+s)(\lambda+s)}$$

$$\tilde{m}_x(s) = \frac{\tilde{F}_x(s)}{1-\tilde{F}_x(s)} = \frac{\lambda p(\mu+s) + \mu(1-p)(\lambda+s)}{(\mu+s)(\lambda+s) - \lambda p(\mu+s) - \mu(1-p)(\lambda+s)}$$

$$= \frac{[\lambda p + \mu(1-p)] \cdot s + \lambda\mu}{[s + \lambda(1-p) + \mu p] \cdot s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+\lambda(1-p)+\mu p} \qquad (1)$$

$$(1) * s \rightsquigarrow A + \frac{Bs}{s+\lambda(1-p)+\mu p} = \frac{[\lambda p + \mu(1-p)]s + \lambda\mu}{s+\lambda(1-p)+\mu p}$$

$$\overset{s=0}{\rightsquigarrow} A = \frac{\lambda\mu}{\lambda(1-p)+\mu p}$$

$(1) * [s+\lambda(1-\rho)+\mu\rho] \xrightarrow[\text{ρίζα} \nwarrow \text{αυτού}]{\text{βάζω } s \text{ τη}} B = -\dfrac{[\lambda\rho+\mu(1-\rho)][\lambda(1-\rho)+\mu\rho]+\lambda\mu}{\lambda(1-\rho)+\mu\rho}$

$$\Rightarrow m_X(t) = At + \frac{B}{\lambda(1-\rho)+\mu\rho}\cdot\left(1-e^{-[\lambda(1-\rho)+\mu\rho]t}\right)$$

$*$ Χρησιμοποιώ τον μετασχηματισμό $\frac{\lambda}{\lambda+s} \longleftrightarrow 1\cdot e^{-\lambda t}$

$$\left[\frac{A}{s}+\frac{B}{s+\lambda(1-\rho)+\mu\rho} = A\cdot\frac{1}{s}+\frac{B}{\lambda(1-\rho)+\mu\rho}\cdot\frac{\lambda(1-\rho)+\mu\rho}{s+\lambda(1-\rho)+\mu\rho} \qquad \frac{\lambda}{\lambda+s}\longleftrightarrow 1\cdot e^{-\lambda t}\right]$$

Παράδειγμα 1ο: Λύση Ανανεωτικής Εξίσωσης

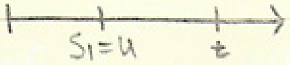
$\{N(t)\}$ ανανεωτική διαδικασία, $X\sim F_X(t)$

$S_1, S_2 \ldots$ χρόνοι γεγονότων

$h(t)=E[(N(t))^2]$

$$h(t)=\int_0^\infty E[(N(t))^2 \mid S_1=u]\,dF_X(u)$$

$$E[(N(t))^2\mid S_1=u]=\begin{cases}0, & u>t \rightsquigarrow \text{έχουν συμβεί 0 γεγονότα, } N(t)=0 \Rightarrow 0^2=0\\ \underbrace{\underbrace{E[(1+N(t-u))^2]}_{E[1+2N(t-u)+(N(t-u))^2]}}_{1+2m(t-u)+h(t-u)}, & u\le t \rightsquigarrow\end{cases}$$



$u\le t,\ (N(t)\mid S_1=u)\overset{d}{=}1+N(t-u)$

~ ΤΕΛΟΣ ΑΝΑΝΕΩΤΙΚΟΥ ΣΥΛΟΓΙΣΜΟΥ ~

$$\text{Άρα, } h(t)=\int_0^t(1+2m(t-u)+h(t-u))\,dF_X(u)+\int_t^\infty \cancel{0\,dF_X(u)}\to 0$$

$$=\underbrace{\int_0^t 1\,dF_X(u)+2\int_0^t m(t-u)\,dF_X(u)}_{d(t)}+\int_0^t h(t-u)\,dF_X(u)$$

Έχω $d(t)=F_X(t)+2(m*F)(t)$

Όμως από την ανανεωτική εξίσωση για την ανανεωτική συνάρτηση

$m = F_X + m * F_X \Rightarrow m * F_X = m - F_X$ (Το χρησιμοποιώ για να απλοποιώ συνελίξεις)

Άρα, $d(t) = F_X(t) + 2m(t) - 2F_X(t) = 2m(t) - F_X(t)$

★ Η λύση της ανανεωτικής εξίσωσης είναι: $h(t) = d(t) + (d*m)(t)$

Άρα, $$\begin{aligned} h(t) &= 2m(t) - F_X(t) + 2(m*m)(t) - (F_X*m)(t) \\ &= 2m(t) - \cancel{F_X(t)} + 2m^{*2}(t) - m(t) + \cancel{F_X(t)} \\ &= m(t) + 2m^{*2}(t) \end{aligned}$$

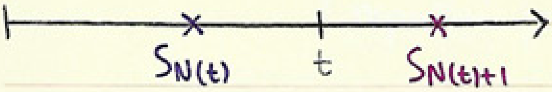
Παράδειγμα 2ο: Λύση ανανεωτικής εξίσωσης μέσου χρόνου πρώτου γεγονότος μετά την t

μέσος ενδιάμεσος χρόνος μεταξύ των γεγονότων

$$h(t) = E[S_{N(t)+1}] = \underbrace{\mu}_{d(t)} + \int_0^t h(t-u)\,dF_X(u)$$

Άρα, η λύση είναι $h(t) = d(t) + (d*m)(t) = \mu + \mu m(t) = \mu(1 + m(t))$

Προσοχή!! $E[S_{N(t)}]$: μέσος χρόνος που συνέβη το τελευταίο γεγονός πριν τη στιγμή t

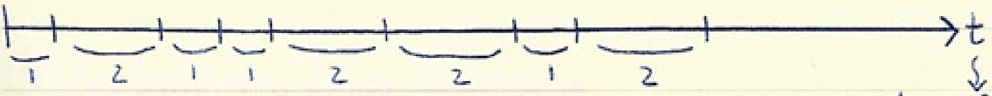


ΔΕΝ ΙΣΧΥΕΙ $E[S_{N(t)}] = \mu m(t)$

$$\begin{aligned} E[S_{N(t)}] &= E[S_{N(t)+1} - X_{N(t)+1}] \\ &= \underbrace{E[S_{N(t)+1}]}_{\mu(1+m(t))} - \underbrace{E[X_{N(t)+1}]}_{\neq \mu} \end{aligned}$$

φυλλάδιο κεφ 2
ασκ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
τις κάνετε

Σκέφτομαι ανανεωτική διαδικασία:



ενδιάμεσοι χρόνοι $= \begin{cases} 1, p = 1/2 \\ 2, p = 1/2 \end{cases}$

$E[X] = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 = \frac{3}{2} = 1{,}5$

$\frac{t}{3/2} = \frac{2t}{3}$ ενδιαμ. χρον.

$t/3$ → είναι 1 → $t/3 \cdot 1$ στιγμές που ο χρόνος είναι 1

$t/3$ → είναι 2 → $t/3 \cdot 2$ στιγμές που ο χρόνος είναι 2

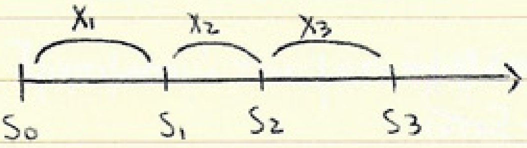
Άρα, $E[X_{\underbrace{N(t)+1}}] = 1/3 \cdot 1 + 2/3 \cdot 2 = 5/3$

μέσος χρόνος σε συγκεκριμένη χρονική στιγμή

Μάθημα 3ο (9/10/18)

ΑΝΑΝΕΩΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ - ΟΡΙΑΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

1. Πλαίσιο



$X_i \sim F_X(t)$ ανεξ.

$S_i = \sum_{i=1}^{n} X_i,\ i \geq 1$, $S_0 = 0$

$N(t) = \#$ γεγονότων στο $(0,t]$

2. Περιοδικές / Απεριοδικές τ/

Ορισμός: Η X λέγεται περιοδική αν $\exists d>0 : \sum_{k=0}^{\infty} \Pr[X=kd] = 1$

Ο μεγαλύτερος d με αυτή την ιδιότητα λέγεται περίοδος της X.

Αλλιώς, η X λέγεται απεριοδική

πχ.

- $X \sim Bin(n,p)$
  $X \in \{0,1,\dots,n\}$ ~> περ. με $d=1$
- $X \sim Geo(p)$
  $X \in \{0,1,\dots\}$ ~> περ. με $d=1$
- X συνεχής ή μεικτή ~> απεριοδική
- X διακριτή
  $X \in \{1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots\}$ ~> απεριοδική
- X διακριτή
  $X \in \{0, 1, \sqrt{2}\}$ ~> απεριοδική

3. Οριακά Θεωρήματα

1] Νόμος Μεγάλων Αριθμών (ΝΜΑ)

$$\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{\mu}$$ με πιθ 1, όπου $\mu = E[X_i]$

$\left(N(t) \simeq \frac{t}{\mu} \right.$ για μεγάλα $\left. t \right)$

2| Κεντρικό Οριακό Θεώρημα

$$\lim_{t\to\infty}\left[\frac{N(t)-t/\mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2 t}{\mu^3}}}\leq x\right]=\Phi(x)$$

όπου $\Phi(x)$ σ.κ $N(0,1)$

$\mu = E[X_i]$

$\sigma^2 = Var[X_i]$

3| Στοιχειώδες Ανανεωτικό Θεώρημα

$$\lim_{t\to\infty}\frac{E[N(t)]}{t}=\lim_{t\to\infty}\frac{m(t)}{t}=\frac{1}{\mu}$$

4| Βασικό Ανανεωτικό Θεώρημα (ΒΑΘ) - Key Renewal Theorem

$h(t) = d(t) + {}_0\int^t h(t-u)\,dF_X(u)$ ανανεωτική εξίσωση

$\downarrow$

$h(t) = d(t) + {}_0\int^t d(t-u)\,dm_X(u)$ λύση

Υποθέσεις: $d(t) = d_1(t) - d_2(t)$ με $d_1(t), d_2(t) \geq 0$, φθίνουσες, φραγμένες και ${}_0\int^\infty |d(t)|\,dt < \infty$

X περιοδική $\Rightarrow \lim_{t\to\infty} h(t) = \dfrac{{}_0\int^\infty d(t)\,dt}{\mu}$

X περιοδική με περίοδο $p \Rightarrow \lim_{t\to\infty} h(tp+x) = \dfrac{\sum_{k=1}^{\infty} d(kp+x)}{\mu}$

Ιδέα Απόδειξης: Συνθήκες ομαλότητας $\Rightarrow \lim_{t\to\infty} d(t) = 0 \Rightarrow \lim_{t\to\infty} h(t) = \lim_{t\to\infty} {}_0\int^\infty d(t-u)\,dm_X(u)$

μικρό για μεγάλο t

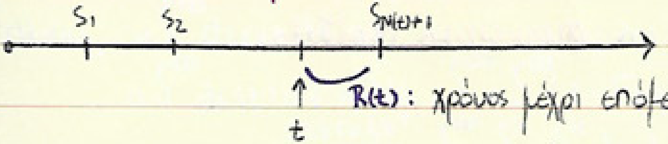
$m_X(u) \simeq u/\mu$ για μεγάλο u

$${}_0\int^\infty d(t-u)\,dm_X(u) = \underbrace{{}_0\int^{\varepsilon(t)} d(t-u)\,dm_X(u)}_{\substack{\downarrow\\ 0}} + \underbrace{{}_{\varepsilon(t)}\int^{t} d(t-u)\,dm_X(u)}_{21}$$

$$\frac{1}{\mu}\,{}_0\int^t d(t-u)\,du = \frac{1}{\mu}\,{}_0\int^t d(u)\,du \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{\mu}\,{}_0\int^\infty d(u)\,du$$

4. Υπολειπόμενος Χρόνος Ανανέωσης



$R(t)$: χρόνος μέχρι επόμενο γεγονός από τη στιγμή t

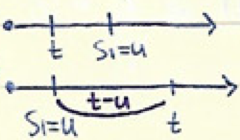
$R(t) = S_{N(t)+1} - t$: Υπολειπόμενος χρόνος ανανέωσης τη στιγμή t
Χρόνος ως το πρώτο γεγονός μετά τη στιγμή t

$E[R(t)] = ?$, $\lim_{t\to\infty} E[R(t)] = ?$

Έστω $h(t) = E[R(t)]$

Από ανανεωτικό συλλογισμό $h(t) = \int_0^\infty E[R(t)|S_1=u]\,dF_X(u)$

$$E[R(t)|S_1=u] = \begin{cases} u-t, & u>t \\ \underbrace{E[R(t-u)]}_{h(t-u)}, & u\le t \end{cases}$$



Άρα, $h(t) = \int_0^t h(t-u)\,dF_X(u) + \underbrace{\int_t^\infty (u-t)\,dF_X(u)}_{d(t)}$, ανανεωτική εξίσωση

$$d(t) = \int_t^\infty \underbrace{(u-t)}_{}\,dF_X(u) = \int_t^\infty \underbrace{\int_t^u dx}_{}\,dF_X(u) \overset{t\le x\le u}{=\!=} \int_t^\infty\int_x^\infty dF_X(u)\,dx = \int_t^\infty (1-F_X(x))\,dx$$

Έχω $E[R(t)] = d(t) + \int_0^t d(t-u)\,dm_X(u)$

Για X συνεχής

$$d(t) = \underset{\substack{\ge 0,\ \text{φθιν.} \\ \text{φραγμ.??}}}{d_1(t)} - \underset{\substack{\ge 0,\ \text{φθιν.} \\ \text{φραγμ.}}}{0}$$

$$\int_t^\infty (1-F_X(x))\,dx \le \underbrace{\int_0^\infty (1-F_X(x))\,dx}_{\mu}$$

Επίσης, $$\int_0^\infty |d(t)|\,dt \overset{d(t)\ge 0}{=\!=} \int_0^\infty d(t)\,dt = \int_0^\infty\int_t^\infty \underbrace{(1-F_X(x))}_{}\,dx\,dt = \int_0^\infty\int_t^\infty \underbrace{\int_x^\infty dF_X(u)}_{}\,dx\,dt$$
$$\overset{0<t<x<u}{=\!=} \int_0^\infty\int_0^u\int_0^x dt\,dx\,dF_X(u) = \int_0^\infty \frac{u^2}{2}\,dF_X(u) = \frac{E[X^2]}{2} < \infty$$

Το ΒΑΘ εφαρμόζεται: $\lim_{t\to\infty} E[R(t)] = \frac{\int_0^\infty d(t)\,dt}{\mu} = \frac{E[X^2]}{2\mu} = \frac{E[X^2]}{2\cdot E[X]}$

Σημαντικό!! $\lim_{t\to\infty} E[R(t)] \neq \frac{E[X]}{2}$ (που ήταν το αναμενόμενο)

Η σχέση $\lim_{t\to\infty} E[R(t)] = \frac{E[X^2]}{2\cdot E[X]}$ αναφέρεται ως ανανεωτικό παράδοξο

X: τυπικός ενδιάμεσος χρόνος, $E[X]=\mu$, $Var[X]=\sigma^2$

▶ Μέσος υπολοιπόμενος χρόνος ως το επόμενο γεγονός αν κοιτάξω την ανανεωτική διαδικασία τυχαία χρονική στιγμή $= \frac{\mu^2+\sigma^2}{2} = \frac{\mu^2}{2} + \underbrace{\frac{\sigma^2}{2\mu}}_{\text{παίζει ρόλο το Var}} \underset{\sigma=0}{\geq} \frac{\mu}{2}$ = μισός μέσος ενδιαμ. χρόνος

5. Πλάγια ασύμπτωτη της ανανεωτικής συνάρτησης

ΣΑΘ → Για μεγάλα t $m(t) \simeq t/\mu$ $\left(\lim_{t\to\infty} m(t)/t = 1/\mu\right)$

$\mu = E[X]$, $\sigma^2 = Var[X]$

$h(t) = m(t) - t/\mu$, $\lim_{t\to\infty} h(t) = ?$

Ανανεωτικός Συλλογισμός: $h(t) = E[N(t)] - t/\mu = \int_0^\infty E[N(t)|S_1=u]\,dF_X(u) - t/\mu$ (1)

$$E[N(t)|S_1=u] = \begin{cases} 0, & u>t \\ 1+\underbrace{E[N(t-u)]}_{h(t-u)+\frac{t-u}{\mu}}, & u\leq t \end{cases} \quad (2)$$

$$(1)\,\&\,(2) \Rightarrow h(t) = \underbrace{\int_0^t \left(1+\frac{t-u}{\mu}\right) dF_X(u) - \frac{t}{\mu}}_{d(t)} + \int_0^t h(t-u)\,dF_X(u)$$

ανανεωτική εξισ. για h(t)

$$d(t) = \int_0^t \left(1+\frac{t-u}{\mu}\right) dF_X(u) - \frac{t}{\mu} = (1+t/\mu)F_X(t) - 1/\mu \int_0^t u\,dF_X(u) - t/\mu$$

$$d'(t) = 1/\mu\, F_X(t) + (1+\cancel{t/\mu}) f_X(t) - \cancel{1/\mu \cdot t\, f_X(t)} - 1/\mu = \underbrace{f_X(t)}_{\geq 0} - \underbrace{1/\mu\,(1-F_X(t))}_{\geq 0}$$

Άρα, $d(t) = \underbrace{F_X(t)}_{\text{ανεξ}} - 1/\mu \int_0^t \underbrace{(1-F_X(u))du}_{\text{ανεξ}} = -(1-F_X(t)) + 1 - 1/\mu \int_0^t (1-F_X(u))du$

$$= -(1-F_X(t)) + \frac{\mu - \int_0^t (1-F_X(u))du}{\mu} = -\underbrace{(1-F_X(t))}_{d_2(t)} + \underbrace{\frac{\int_t^\infty (1-F_X(u))du}{\mu}}_{d_1(t)}$$

$d_1(t), d_2(t) \geq 0$, φθιν, φραγμ. (από το 1)

Επίσης, $\int_0^\infty d_2(t)\,dt = \mu$

$$\int_0^\infty d_1(t)\,dt = 1/\mu \int_0^\infty \int_t^\infty (1-F_X(u))\,du\,dt = 1/\mu \int_0^\infty \int_t^\infty \int_u^\infty dF_X(x)\,du\,dt$$

$$\overset{0<t<u<x}{=\!=\!=} \int_0^\infty \int_0^x \int_0^u dt\,du\,dF_X(u) = 1/\mu \int_0^\infty \frac{x^2}{2}\,dF_X(x) = \frac{E[X^2]}{2\mu} < \infty$$

$$_0\int^\infty |d(t)|dt = {}_0\int^\infty |d_1(t)-d_2(t)|dt \le \mu + \frac{E[X^2]}{2\mu} < \infty$$

Άρα, ΒΑΘ εφαρμόσιμο

$$\lim_{t\to\infty}\left(m(t)-\frac{t}{\mu}\right) = \lim_{t\to\infty} h(t) = \frac{_0\int^\infty d(t)dt}{\mu} = \frac{\frac{E[X^2]}{2\mu}-\mu}{\mu} = \frac{E[X^2]-2\mu^2}{2\mu^2}$$

$$= \frac{\sigma^2+\mu^2-2\mu^2}{2\mu^2} = \frac{\sigma^2-\mu^2}{2\mu^2}$$

Άρα, η $m(t)$ έχει πλάγια ασύμπτωτη $\frac{t}{\mu}+\frac{\sigma^2-\mu^2}{2\mu^2}$

Μάθημα 4ο (11/10/18)

Enjoy

$\{N(t)\}$ ~ διαδικασία

$N(t)$ ~ τ.μ.

~ Διαδικασία Poisson ~

Ορισμοί

1. **Ανανεωτικός:** $\{N(t)\}$ Poisson(λ) διαδικασία $\Leftrightarrow$ $\{N(t)\}$ ανανεωτική διαδ. με κατανομή ενδιάμεσων χρόνων Exp(λ)

2. **Ολικός/Μακροσκοπικός:** $\{N(t)\}$ Poisson(λ) διαδικ. $\Leftrightarrow$
   - (i) Ανεξ. προσαυξήσεις ($t_1<t_2<\ldots<t_n$: $N(t_1), N(t_2)-N(t_1), N(t_3)-N(t_2), \ldots, N(t_n)-N(t_{n-1})$ ανεξ. τ.μ.)
   - (ii) Ομογενείς προσαυξήσεις ($t,s>0$ $N(s+t)-N(s) \overset{d}{=} N(t)$)
   - (iii) $N(t)\sim$ Poisson(λt) $\left(Pr[N(t)=n] = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}, n\ge 0\right)$

3. **Τοπικός/Μικροσκοπικός:** $\{N(t)\}$ Poisson(λ) διαδικ $\Leftrightarrow$
   - (i) Ανεξ. προσαυξήσεις
   - (ii) Ομογενείς -//-
   - (iii) $Pr[N(h)=n] = \begin{cases} 1-\lambda h+O(h), & n=0 \\ \lambda h+O(h), & n=1 \\ O(h), & n\ge 2 \end{cases}$

ένταση (ρυθμός με τον οποίο συμβαίνουν γεγονότα)

$$\frac{O(h)}{h} \xrightarrow{h\to 0^+} 0$$

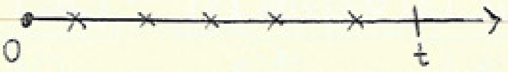
$$\begin{tikzcd} \text{Ορσ 1} \arrow[r, Leftrightarrow] \arrow[dr, Leftrightarrow] & \text{Ορσ 2} \arrow[d, Leftrightarrow] \\ & \text{Ορσ 3} \end{tikzcd}$$

Θεώρημα Campbell

$\{N(t)\}$ στοχ. διαδ. Poisson(λ), $S_1, S_2 \ldots$ χρόνοι γεγονότων. Τότε:

$$(S_1, S_2, \ldots, S_n \mid N(t)=n) = (U_{1=n}, U_{2=n}, \ldots, U_{n=n})$$

όπου $U_{i=n}$ η i-οστή διατεταγμένη τμ από n ανεξ. Uniform($[0,t]$)

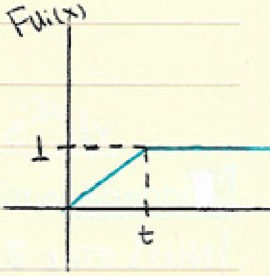


Τύποι από διατεταγμένες τμ για τυχαίο δείγμα Uniform($[0,t]$)

ανεξ. + ισον.

$U_1, U_2, \ldots, U_n$ ανεξ $\sim$ Uniform($[0,t]$)

σ.π.π $f_{U_i}(x) = \begin{cases} 1/t, & x \in [0,t] \\ 0, & \text{διαφ} \end{cases}$ σ.κ $F_{U_i}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x/t, & 0 < x < t \\ 1, & x \geq t \end{cases}$



σ.κ $\rightsquigarrow$ $F_{U_{i=n}}(x) = P_r[U_{i=n} \leq x] = P_r[\text{τουλαχ. } i \text{ από τις } U_1, \ldots, U_n \leq x]$

$$= \sum_{k=i}^{n} \binom{n}{k} F_{U_i}(x)^k \left(1 - F_{U_i}(x)\right)^{n-k} = \sum_{k=i}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{x}{t}\right)^k \left(1 - \frac{x}{t}\right)^{n-k}$$

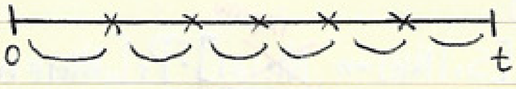
παραγώγιση $\downarrow$

σ.π.π $\rightsquigarrow$ $f_{U_{i=n}}(x) = \frac{n!}{\underbrace{\binom{n}{i-1}\binom{n-i+1}{1}}_{\frac{n!}{(i-1)!(n-i)!}}} \left(\frac{x}{t}\right)^{i-1} \cdot \frac{1}{t} \left(1 - \frac{x}{t}\right)^{n-i}$ ← υπόλοιπες πάνω από x

↑ i-1 μικρότερες από x

↑ 1 ακριβώς x

$$\boxed{E[U_{i=n}] = \frac{it}{n+1}}$$



$$f_{(U_{1=n}, U_{2=n}, \ldots, U_{n=n})}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{cases} n!/t^n, & 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n \leq t \\ 0, & \text{διαφ.} \end{cases}$$

Βασική Συνέπεια του θεωρήματος Campbell για υπολογισμούς

$$\Pr[(S_1, S_2, \dots, S_n) \in A \mid N=n] = \Pr[(U_1=n, U_2=n, \dots, U_n=n) \in A]$$

$$E[f(S_1, S_2, \dots, S_3) \mid N(t)=n] = E[f(U_1=n, U_2=n, \dots, U_n=n)]$$

Υπέρθεση

$\{N_i(t)\}$ στοχ. διαδ. Poisson(λ_i), $i=1,2\dots n$ ανεξ

$N(t) = \sum_{i=1}^{n} N_i(t)$ η υπέρθεση τους: (i) $\{N(t)\}$ στοχ. διαδ. Poisson$(\sum_i \lambda_i)$

(ii) Αν Z_k είναι ο τύπος (διαδ. από την οποία έχει προέλθει) του κ-οστού γεγ. της $N(t)$, τότε $Z_1, Z_2 \dots$ είναι ανεξ & ισον. και $\Pr[Z_k = i] = \dfrac{\lambda_i}{\sum_j \lambda_j}$

Διάσπαση (αντίστροφη υπέρθεσης)

$\{N(t)\}$ στοχ διαδ Poisson(λ)

$Z_1, Z_2, \dots$ ανεξ & ισον με $\Pr[Z_k = i] = P_i$, $i = 1,2,\dots,n$

$N_i(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} \mathbb{1}_{\{Z_k = i\}} = \#$ γεγ. τύπου i στο $(0, t]$

$\Downarrow$

$\{N_i(t)\}$ στοχ. διαδ Poisson(λp_i) ανεξ

Άσκηση

$\{N(t)\}$ στοχ. διαδ. Poisson(λ)

$S_1, S_2, \dots$ χρόνοι γεγονότων

$E[S_1 \mid N(t) \geq 1] = ?$

Λύση

1ος Τρόπος (Θεωρ. Campbell)

$$E[S_1 \mid N(t) \geq 1] = \sum_{n=0}^{\infty} E[S_1 \mid N(t) = n, \overset{\text{περιττό}}{\cancel{N(t)\geq 1}}] \cdot \Pr[N(t)=n \mid N(t) \geq 1]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{E[U_1 = n]}_{\frac{t}{n+1}} \frac{\Pr[N(t)=n, \overset{\text{περιττό}}{\cancel{N(t)\geq 1}}]}{\Pr[N(t)\geq 1]} = \frac{1}{\Pr[N(t)\geq 1]} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t}{n+1} \Pr[N(t)=n]$$

$$= \frac{1}{\lambda(1-e^{-\lambda t})} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda t}{n+1} \cdot \underset{\uparrow}{e^{-\lambda t}} \frac{(\lambda t)^n}{n!} = e^{\lambda t} - 1 - \lambda t$$

εκθετική παραλείπω n=0, n=1
ξεκινάω από n=2

Βγαίνει

Τελικά $E[S_1 | N(t) \geq 1] = \dfrac{1 - e^{-\lambda t} - \lambda t e^{-\lambda t}}{\lambda(1 - e^{-\lambda t})}$

2ος τρόπος

συμπληρωματικό

$$\underbrace{E[S_1]}_{1/\lambda} = \underbrace{Pr[N(t)=0]}_{e^{-\lambda t}} \underbrace{E[S_1 | N(t)=0]}_{t + \frac{1}{\lambda}\ \left(\text{αναγεννητική διαδικασία}\right)} + \underbrace{Pr[N(t) \geq 1]}_{1-e^{-\lambda t}} \cdot E[S_1 | N(t) \geq 1]$$

$\Rightarrow \ldots$

$$E[X|A] = \frac{E[X \cdot 1_A]}{E[A]}$$

3ος τρόπος

$$E[S_1 | N(t) \geq 1] = E[S_1 | S_1 \leq t] = \frac{E[S_1 \cdot 1_{\{S_1 \leq t\}}]}{\underset{Pr[Gamma(2,\lambda) \leq t] \rightarrow}{Pr[S_1 \leq t]}} = \frac{{}_0\int^{x} x \cdot 1_{\{x \leq t\}} \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda t} dx}{1 - e^{-\lambda t}}$$

$$= \frac{\lambda \cdot {}_0\int^{t} \frac{\lambda^2}{1} x^{2-1} \cdot e^{-\lambda x} dx}{1 - e^{-\lambda t}} = \frac{1 - e^{-\lambda t} - \lambda t e^{-\lambda t}}{\lambda(1 - e^{-\lambda t})}$$

Σημειώσεις - Κεφ 2ο

Ασκ 15/σελ 36

$X \sim Exp(\lambda)$: χρόνος ζωής μηχανήματος

Μέσος χρόνος μεταξύ διαδοχ. επιθεωρήσεων $= T = 1/\mu$, μ: ρυθμός επιθ.

α. είτε ντετερμινιστικά: $\tau, 2\tau, 3\tau \ldots$

β. είτε εντελώς τυχαία: στις στιγμές μιας στοχ. διαδ. Poisson(μ)

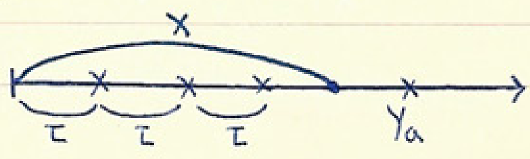
$E[Y_a]$ = μέσος χρόνος αποκάλυψης βλάβης με τη διαδ. α

$E[Y_\beta]$ = -||- β

ⓑ

$$E[Y_\beta] = E[X] + E[\overset{\overset{d}{=} Exp(\mu)}{\boxed{Y_\beta - X}}] = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu}$$

ⓐ



$$E[Y_a] = E\left[\left\lfloor \frac{x}{\tau} + 1 \right\rfloor \cdot \tau\right] = \int_0^{\infty} \left\lfloor \frac{x}{\tau} + 1 \right\rfloor \cdot \tau \cdot \lambda e^{-\lambda x}\, dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \boxed{\int_{n\tau}^{(n+1)\tau} (n+1)\tau \cdot \lambda e^{-\lambda x}\, dx} = \tau \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \boxed{\left[-e^{-\lambda x}\right]_{nT}^{(n+1)T}}$$

$$= T \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\left(e^{-\lambda T n} - e^{-\lambda T(n+1)}\right) = T \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} (\cancel{n}+1) e^{-\lambda T n} - \cancel{\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-\lambda T n}}\right)$$

για $n=0$ δεν με νοιάζει => φεύγουν

$$= T \cdot \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda T n} \overset{\text{Γεωμ σειρά}}{=} \frac{T}{1-e^{-\lambda T}}$$

Έχουμε, $E[Y_a] \le E[Y_b] \iff \frac{T}{1-e^{-\lambda T}} \le \frac{1}{\lambda} + \tau \iff \frac{1}{\lambda} + \tau - \frac{\tau}{1-e^{-\lambda T}} \geq 0$

$$\iff \frac{(1/\lambda + T)(1-e^{-\lambda T}) - T}{1-e^{-\lambda T}} \geq 0 \iff \frac{(1+\lambda T)(1-e^{-\lambda T}) - \lambda T}{\lambda(1-e^{-\lambda T})} \geq 0$$

$$\underset{\substack{\text{θ.θ.ο} \\ \text{αριθ} \geq 0}}{\overset{\text{παρον.} \geq 0}{\iff}} 1 - e^{-\lambda T} - \lambda T e^{-\lambda T} \geq 0 \iff \Pr[N \geq 2] \geq 0 \quad ✓ \text{ ισχύει}$$

$N \sim \text{Poisson}(\lambda T)$

Κεφ 2ο ασκ 11,12,13*
14,15 (έχει γίνει)
campbell
hello

Άρα, καλύτερη η (α)

Μάθημα 5ο (16/10/18)

~ Ανανεωτικές Διαδικασίες Κόστους ~

Ορισμός: $\{N(t)\}$ ανανεωτική διαδικασία, $X_1, X_2, \ldots$ ενδιάμεσοι χρόνοι της $\{N(t)\}$
$S_1, S_2, \ldots$ χρόνοι γεγονότων της $\{N(t)\}$, $\{C(t)\}$ στοχαστική διαδικασία
$C_n = C(S_n) - C(S_{n-1}),\ n \geq 1$
Αν $(X_n, C_n)_{n \geq 1}$ ανεξάρτητες & ισόνομες $\sim F_{X,C}(x,y)$, τότε η $\{C(t)\}$ λέγεται ανανεωτική διαδικασία κόστους

Αλματική Ανανεωτική Διαδικασία κόστους

$\{N(t)\}$ ανανεωτική διαδικασία όπως πριν
$Y_1, Y_2, \ldots$ ανεξ & ισον και ανεξ. από τη $\{N(t)\}$

$$C(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} g(\overset{\text{μήκος κύκλου}}{X_i}, \underset{\text{τυχαίος παράγοντας}}{Y_i})$$

(Το άλμα εξαρτάται από τον τυχαίο παράγοντα)

$\{C(t)\}$: Αλματική ανανεωτική διαδικασία κόστους

↳ είναι αναν. διαδικασία κόστους με $(X_n, C_n) = \{X_n, g(X_n, Y_n)\}_{n \geq 1}$

Παραδείγματα

1. $g(x,y) = 1 \rightarrow C(t) = N(t)$

2. $g(x,y) = y \rightarrow C(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$ σύνθετη αναν. διαδ.

3. $g(x,y) = ax + by$

Στοιχειώδες Ανανεωτικό Θεώρημα με κόστη (ΣΑΘΚ)

$\{N(t)\}$ αναν. διαδ., $X_1, X_2, \ldots$ ενδιαμ. χρόνοι, $S_1, S_2, \ldots$ χρόνοι γεγ.

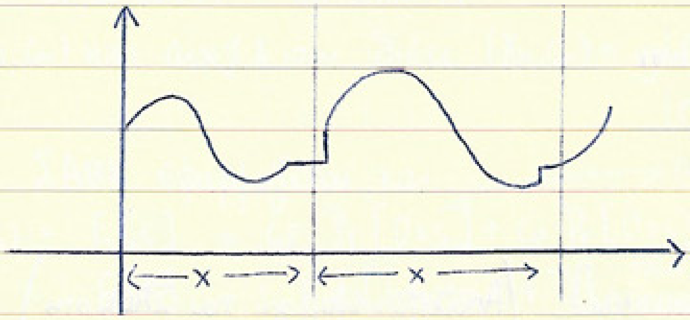
$\{C(t)\}$ αναν. διαδ. κόστους με υποκειμ. αναν. $\{N(t)\}$

↳ $(X_n, C_n) \sim F_{X,C}(x,y)$

1. $\lim_{t\to\infty} \frac{C(t)}{t} = \frac{E[\overset{\text{κόστος σε 1 κύκλο}}{C}]}{E[\underset{\text{διάρκεια 1 κύκλου}}{X}]}$ με πιθ 1

2. $\lim_{t\to\infty} \frac{E[C(t)]}{t} = \frac{E[C]}{E[X]}$

Ντετερμινιστικό Ανάλογο



$C(t)$ περιοδική με περίοδο x

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t c(u)du}{t} = \frac{\int_0^x c(u)du}{x}$$

Αναγεννητικές Διαδικασίες

Ορισμός: $\{X(t)\}$ αναγεννητική διαδικασία $\Leftrightarrow \exists S_1 : \Pr[\overset{\text{όχι τετριμμένος}}{S_1=0}] < 1$ ώστε:

$\Pr[\overset{\text{πεπερασμένος}}{S_1<\infty}] = 1$

(i) $\{X(t) : 0\le t<S_1\}$, $\{X(t) : t\ge S_1\}$ ανεξ

(ii) $\left.\begin{array}{l}\{X(t) : t\ge 0\}\\ \{X(t+S_1) : t\ge 0\}\end{array}\right\}$ στοχ. ισοδύναμες (=ισόνομες) (κάνει Reset)

* Αν έχω μια $\{X(t)\}$ που είναι αναγεννητική, τότε υπάρχουν $S_1, S_2, \dots$ χρόνοι γεγονότων αναν. διαδ. ώστε:

(i) $\{X(t) : 0\le t<S_n\}$, $\{X(t) : t\ge S_n\}$ ανεξ.

(ii) $\{X(t) : t\ge 0\}$, $\{X(t+S_n) : t\ge 0\}$ στοχ. ισοδ.

Οριακές Κατανομές Αναγεννητικών Διαδικασιών

$\{X(t)\}$ αναγεννητική διαδικασία με χώρο καταστάσεων $\mathbb{R}$, $S_1, S_2, \dots$ χρόνοι αναγέννησης

$F_{X(\infty)}(x) = \lim_{t\to\infty} \Pr[X(t)\le x]$ οριακή συνάρτηση κατανομής (μπορεί να $\exists$ ή $\nexists$)

$$F_X(x) = \lim_{t\to\infty} \frac{E[\int_0^t 1_{\{X(u)\le x\}}du]}{t}$$ (μακροπρόθεσμο μέσο ποσοστό του χρόνου που η $\{X(t)\}\le x$) οριακή αναμενόμενη δειγματική συνάρτηση κατανομής

Προσπαθούμε να συνδέσουμε αυτές τις δύο κατανομές $F_{X(\infty)}, F_X$

Έχω για x σταθερό $C(t) = \int_0^t 1_{\{X(u)\le x\}}du$ είναι αναν. διαδ. κόστους με υποκειμ. ανανεωτική την απαριθμήτρια $\{N(t)\}$ των σημείων αναγέννησης

Πράγματι, $\left(X_n, \underbrace{\int_{S_{n-1}}^{S_n} 1_{\{X(u)\le x\}}du}_{C_n}\right)$ ανεξ, ισον $n\ge 1$

Θεώρημα

1. $F_X(x) = \lim_{t\to\infty} \frac{E[\int_0^t 1_{\{X(u)\le x\}}du]}{t} = \frac{E[\int_0^X 1_{\{X(u)\le x\}}du]}{E[X]}$ (Απόδειξη: εφαρμογή του ΣΑΘΚ στη $C(t) = \int_0^t 1_{\{X(u)\le x\}}du$)

2. Αν X απεριοδική $F_X(x) = F_{X(\infty)}(x)$

Πορίσματα

1. Αν ο χ.κ της $\{X(t)\}$ είναι $\{0,1,2,\dots\}$, τότε:

$$P_X(j) \overset{\text{ορσ}}{=} \lim_{t\to\infty} \frac{E\left[\int_0^t \mathbb{1}_{\{X(u)=j\}}du\right]}{t} = \frac{E\left[\int_0^X \mathbb{1}_{\{X(u)=j\}}du\right]}{E[X]} \overset{\text{απεριοδική } X}{=\!=\!=} \lim_{t\to\infty} Pr[X(t)=j] \overset{\text{ορσ}}{=} P_{X(\infty)}(j)$$

2. $$\lim_{t\to\infty} \frac{E\left[\int_0^t g(X(u))du\right]}{t} = \frac{E\left[\int_0^X g(X(u))du\right]}{E[X]} \overset{X\,\text{απερ}}{=\!=\!=} \lim_{t\to\infty} E[g(X(t))]$$

Εφαρμογή: Συντήρηση / Αντικατάσταση Μηχανήματος

Μηχανή με $O_1, O_2, \dots$ χρόνοι λειτουργίας (operation times)

$D_1, D_2, \dots$ χρόνοι επισκευής (down times)

Χρόνος επιθεωρ./αντικ. → s

Επισκευή
→ λόγω βλάβης: κόστος c_f (cost of faiture)
→ λόγω συντήρησης c_p (cost of pireventive maintenquce)

Μακροπρόθεσμο μέσο κόστος επισκευών ανά χρον. μον. = Ρυθμός κόστους επισκευής

Βέλτιστο $s = ??$

Υπόθεση: $(O_n, D_n)_{n\geq 1}$ ανεξ & ισον $\sim F_{O,D}(x,y)$ συνεχής σ.κ

$$C(s) = \lim_{t\to\infty} \frac{E[\text{κόστος επισκευών στο } (0,t]]}{t}$$

X_n = n-οστός κύκλος μηχανής $= \min(O_n, s) + D_n$

$C_n = c_f \mathbb{1}_{\{O_n \leq s\}} + c_p \mathbb{1}_{\{O_n > s\}}$

$(X_n, C_n)_{n\geq 1}$ ανεξ & ισον διότι $(X_n, C_n) = g(O_n, D_n),\ n \geq 1$
$(O_n, D_n)_{n\geq 1}$ ανεξ & ισον

Το ΣΑΘΚ εφαρμόζεται, και → Δε βάζω δείκτες $O_1, O_2, \dots$ γιατί είναι ισόνομες

$$C(s) = \frac{E[C]}{E[X]} = \frac{c_f \cdot Pr[O \leq s] + c_p \cdot Pr[O > s]}{E[\min(O,s) + D]} = \frac{c_f \cdot F_O(s) + c_p(1 - F_O(s))}{\int_0^\infty \underbrace{(1 - F_{\min(O,s)}(u))}_{Pr[\min(O,s)>u]}du + \int_0^\infty (1 - F_D(u))du}$$

Πάω από S προσθέτει μηδενικό

$$= \frac{c_p + (c_f - c_p)F_O(s)}{\int_0^s (1 - F_O(u))du + \underbrace{\int_0^\infty (1 - F_D(u))du}_{\text{ανεξ. συν. του } s}}$$

→ $c_f \leq c_p$ φθίνουσα συν. του s
→ $c_f > c_p$ αύξουσα συν. του s

1] $c_f \leq c_p \Rightarrow C(s)$ φθίνουσα $\Rightarrow s^* = \infty$

2] $c_f > c_p \xrightarrow{\text{βελτιστοποιώ}} \frac{d}{ds} C(s) = 0 \Rightarrow (c_f - c_p) f_O(s) \left({}_0\int^s (1-F_O(s))du + {}_0\int^\infty (1-F_D(s))du \right)$

$- (c_p + (c_f - c_p)F_O(s))(1-F_O(s)) = 0 \leftarrow$ Δίνει τα υποψήφια βέλτιστα

Εφαρμογή: Εναλλασσόμενη Ανανεωτική Διαδικασία

Μηχανή με χρόνους λειτουργίας $O_1, O_2, \dots$

χρόνους επισκευής (αργίας) $D_1, D_2, \dots$

$(O_n, D_n), n \geq 1$ ανεξ & ισον. $\sim F_{O,D}(x,y)$

P_O = Μακροπρόθεσμο μέσο ποσοστό χρόνου που λειτουργεί η μηχανή = ??

$$I(u) = \begin{cases} 1, & \text{αν η μηχανή λειτουργεί τη στιγμή } u \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

$$P_O = \lim_{t \to \infty} \frac{E[{}_0\int^t I(u)du]}{t}$$

Έστω $C(t) = {}_0\int^t I(u)du$

$\{N(t)\}$ η αναν. διαδ. με ενδιαμ. χρ. $X_n = O_n + D_n, n \geq 1$

$C_n = C(S_n) - C(S_{n-1}) = O_n$

Άρα, $(X_n, C_n) = (O_n + D_n, O_n), n \geq 1$

Άρα, $(X_n, C_n) = g(O_n, D_n), n \geq 1$ με $g(x,y) = (x+y, x)$

$(O_n, D_n), n \geq 1$ ανεξ & ισον. οπότε ΣΑΘΚ εφαρμόζεται

$$P_O = \frac{E[C]}{E[X]} = \frac{E[O]}{E[O] + E[D]}$$

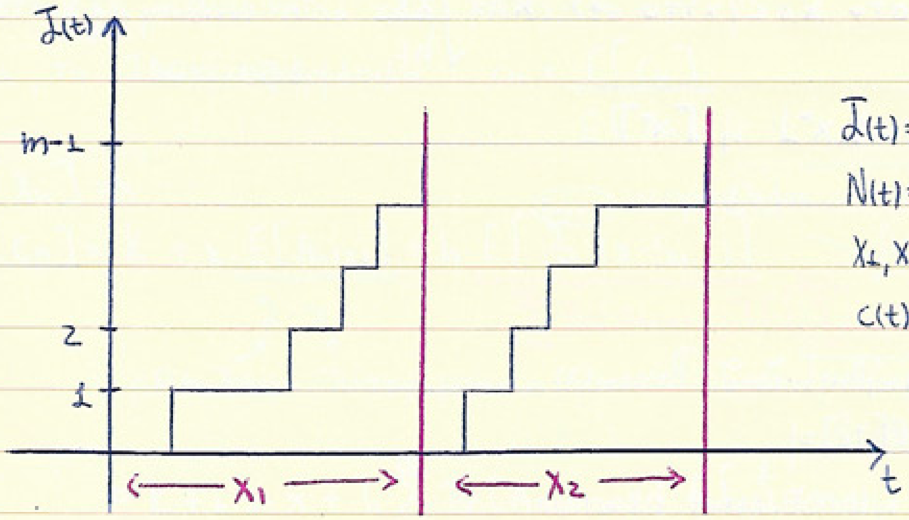
Μάθημα 6ο (23/10/18)

Εφαρμογές-ΣΑΘΚ

- Εκκαθάριση Αποθήκης Ι
  - Αποθήκη
  - Αφίξη προϊόντων με $\{A(t)\}$ αναν. διαδ.
    $Y_1, Y_2, \dots$ ενδιαμ. χρόνοι με $E[Y_i] = \mu$
  - Όταν συσσωρευθούν m προϊόντα εκκαθαρίζεται ακαριαία

- Κόστος ανά εκκαθάριση : K
- Κόστος ανά εκκαθ. προϊόντος : k
- Κόστος αποθήκευσης ανά προϊόν & χρονική μονάδα : h
- Μακροπρόθεσμος αναμ. ρυθμός κόστους ως συνάρτηση του m : c(m)
- Βέλτιστο m?

Λύση



I(t) = # προϊόντων στην αποθήκη
N(t) = # εκκαθαρ. μέχρι το t
$X_1, X_2, \dots$ ενδιαμ. χρόνοι της $\{N(t)\}$.
c(t) : κόστος στο (0, t]

Έστω X_n : χρόνος μεταξύ (n-1)-οστής και n-οστής εκκαθ.
C_n : αντίστοιχο κόστος

$$X_n = \underbrace{Y_{\overbrace{(n-1)\cdot m}^{(n-1)\cdot m \text{ προϊόντα των προηγούμενων κύκλων}}+1}} + \underbrace{Y_{(n-1)m+2}} + \dots + \underbrace{Y_{(n-1)\cdot m+m}}$$
$$= \underbrace{Y_{1,n}}_{\text{1ο προϊόν n-οστού κύκλου}} + Y_{2,n} + \dots + Y_{m,n} = \sum_{i=1}^{m} Y_{i,n}$$

$$C_n = K + k\cdot m + h\cdot \sum_{j=1}^{m-1} \underbrace{\sum_{i=j+1}^{m} Y_{i,n}}_{\text{Χρόνος αποθηκ. j-οστού προϊόντος n-οστού κύκλου}}$$

(X_n, C_n) εξαρτ. $Y_{i,n}$ $1 \le i \le m$

Άρα, (X_n, C_n) είναι ανεξ & ισον. ⇒ το ΣΑΘΚ είναι εφαρμόσιμο

$E[X_n] = m\cdot\mu$

$$E[C_n] = K + k\cdot m + h\mu \cdot \sum_{j=1}^{m-1} (m-j) = K + km + h\mu \frac{(m-1)\cdot m}{2}$$

Άρα, εφαρμόζοντας ΣΑΘΚ έχουμε $c(m) = \frac{E[C_n]}{E[X_n]} = \frac{K}{m\mu} + \frac{k}{\mu} + \frac{h(m-1)}{2}$

Για τη c(x) με $c(x) = \frac{K}{x\mu} + \frac{k}{\mu} + \frac{h(x-1)}{2}$, $x>0$

$$c'(x) = \frac{-K}{\mu x^2} + \frac{h}{2}, \quad x>0$$

$$c''(x) = \frac{2K}{\mu x^3} > 0$$

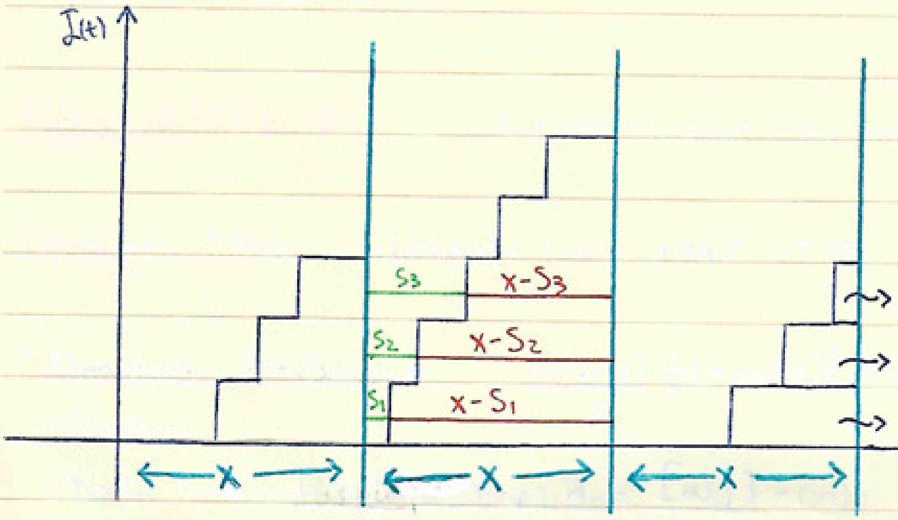
Άρα, c(x) κυρτή με ελαχ. στο $x^*: c'(x)=0 \Rightarrow x^* = \sqrt{\frac{2K}{h\mu}}$ → Είναι βέλτιστο να εκκαθαρίζε την αποθήκη κάθε τόσα αντικείμενα

Το βέλτιστο m είναι $m^* = \lfloor x^* \rfloor$ ή $\lceil x^* \rceil$

▸ Εκκαθάριση Αποθήκης II

- Αποθήκη
- Άφιξη προϊόντων σύμφωνα με $\{A(t)\}$ διαδ. Poisson(λ)
  $Y_1, Y_2, \dots$ ενδιαμ. χρόνοι $E[Y_1]=\mu$.
- Κάθε x χρονικές μονάδες η αποθ. εκκαθ. ακαριαία
- Κόστος ανά εκκαθάριση: K
- Κόστος ανά εκκαθ. προϊόντος: k
- Κόστος αποθήκευσης ανά προϊόν & χρον. μον.: h
- Μακροπρόθεσμος αναμ. ρυθμός κόστους ως συνάρτηση του x: c(x)
- Βέλτιστο x?

Λύση



$I(t)$: ύψος αποθέματος τη στιγμή t

$N(t) = \#$εκκαθ. στο $(0,t] = \lfloor t/x \rfloor$

$C(t)$: κόστος στο $(0,t]$

για $E[C_n]$ άθροισα αυτά τα εμβαδά

$X_n = x$

$C_n = K + \kappa A_n(x) + n \cdot \sum_{i=1}^{A_n(x)} (x - S_{n,i})$, όπου $A_n(t) = \#$αφίξεων στο $((n-1)x, (n-1)x + t]$

$S_{n,1}, S_{n,2}, \ldots, S_{n,A(x)}$ είναι οι χρόνοι αφίξεων προϊόντων στο n-οστό κύκλο (μετρώντας από τη στιγμή $(n-1)x$)

$(X_n, C_n), n \geq 1$ ανεξ & ισον. (λόγω ανεξ & στάσιμων προσαυξήσεων της $A(t)$)
↳ εξαρτάται από την $\{A(t): (n-1)x < t \leq n \cdot x$

Άρα, το ΣΑΘΚ εφαρμόσιμο : $c_n = \dfrac{E[C_n]}{E[X_n]}$

$E[X_n] = x$

$$E[C_n] = K + \kappa \cdot \underbrace{E[A_n(x)]}_{\lambda \cdot x} + h \cdot \underbrace{E\Big[\sum_{i=1}^{\boxed{A_n(x)}} (x - S_{n,i})\Big]}_{\sum_{j=0}^{\infty} Pr[A_n(x)=j]\, E\big[\underbrace{\sum_{i=1}^{A_n(x)}(x - S_{n,i}) \mid A_n(x)=j}_{}\big]}$$

$\sim$ πρόβλημα

Δεσμεύω στην τμ $A_n(x)$

ρυθμός Poisson διάστημα μήκους x

στον n-οστό κύκλο ήρθαν j γεγονότα

⇓ campel

$$= K + \kappa \cdot \lambda \cdot x + h \sum_{j=0}^{\infty} Pr[A_n(x) = j] \cdot E\Big[\sum_{i=1}^{j} (x - U_{i=j})\Big]$$, όπου $U_{i=j}$ είναι η i-οστή μικρότερη απο j ανεξ. & ισον. Uniform([0,x])

$$\text{Άρα, } E[C_n] = K + \kappa\lambda x + h \sum_{j=0}^{\infty} Pr[A_n(x) = j]\Big[jx - \underbrace{\sum_{i=1}^{j} \frac{ix}{j+1}}_{\frac{x}{j+1} \cdot \frac{j(j+1)}{2} = \frac{jx}{2}}\Big]$$

$$= K + \kappa\lambda x + h^{x}/_{2}\, E[A_n(x)] = K + \kappa\lambda x + \frac{h\lambda x^2}{2}$$

Άρα, $c(x) = \dfrac{K}{x} + \kappa\lambda + \dfrac{h\lambda x}{2}$, $x > 0$

$c'(x) = -\dfrac{K}{x^2} + \dfrac{h\lambda}{2}$

$c''(x) = \dfrac{2K}{x^3} > 0$

Άρα, $c(x)$ κυρτή με ελάχιστο στο $c'(x^*) = 0 \Rightarrow x^* = \sqrt{2K/h\lambda}$ $\sim$ είναι βέλτιστο να εκκαθαρίζει την αποθήκη κάθε τόσο χρόνο

Δηλαδή, όταν μαζεύονται $\lambda x^* = \sqrt{2K\lambda/h}$ προϊόντα
δηλαδή κάθε $\sqrt{2K/h\mu}$ προϊόντα όπου $\mu = 1/\lambda$
(ίδιο με το I)

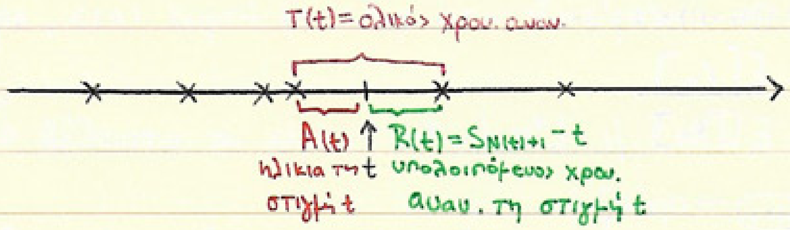
* Εναλλακτικός υπολογισμός της $E[C_n]$

$$E[C_n]=K+kE[A_{n}(x)]+h\cdot E\left[{}_0\int^x A_n(t)dt\right]=K+k\lambda x+h\,{}_0\int^x \underbrace{E[A_n(t)]}_{\lambda t}dt$$

$$=K+k\lambda x+\frac{h\lambda x^2}{2}$$

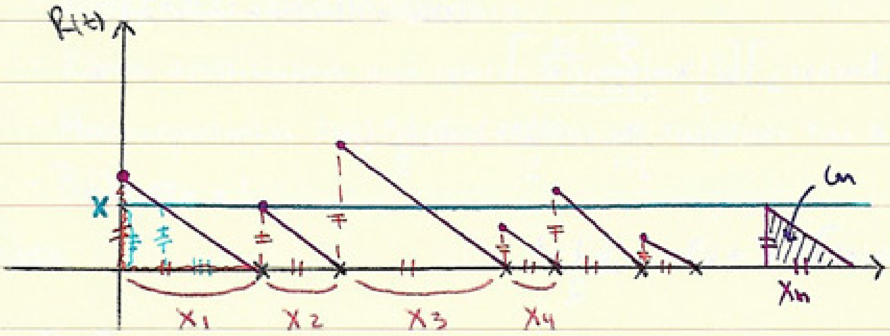
Μελέτη υπολειπόμενου χρόνου ανανέωσης με ΣΑΘΚ

$\{N(t)\}$ αναν. διαδ. με κατανομή ενδιαμ. χρόν. $\sim F_X(x)$



$$\lim_{t\to\infty}\frac{E\left[{}_0\int^t R(u)du\right]}{t}$$: Μακροπρόθεσμος αναμενόμενος δειγματικός μέσος υπολειπ. χρον. αναν

$$\lim_{t\to\infty}\frac{E\left[{}_0\int^t \mathbb{1}_{\{R(u)\leq x\}}dx\right]}{t}=F_R(x)$$ ← πιθανότητα ο υπολειπ. χρον. αναν. $\leq x$



(i) $c(t)={}_0\int^t R(u)du$

$$(X_n,C_n)=\left(X_n,\,{}_{S_{n-1}}\int^{S_n}R(u)du\right)=\left(X_n,\,{}_0\int^{X_n}(X_n-u)du\right)=\left(X_n,\,X_n^2/2\right),$$ $n\geq 1$ ανεξ. & ισον.

=> ΣΑΘΚ εφαρμόσιμο

$$\lim_{t\to\infty}\frac{E\left[{}_0\int^t R(u)du\right]}{t}=\frac{E[C_n]}{E[X_n]}=\frac{E[X_n^2]}{2E[X_n]}=\frac{\overset{=\sigma^2}{Var[X_n]}+(\overset{=\mu}{E[X_n]})^2}{2E[X_n]}=\frac{\mu}{2}+\frac{\sigma^2}{2\mu}\geq\frac{\mu}{2}$$

(ii) $c(t)={}_0\int^t \mathbb{1}_{\{R(u)\leq x\}}du$

$C_n=\min(X_n,x)$ → όταν είμαι συνέχεια κάτω από το x => όλος ο χρόνος

Εδώ έχω $(X_n,C_n)=(X_n,\min(X_n,x))$, $n\geq 1$ ανεξ & ισον

Άρα, $$\lim_{t\to\infty} \frac{E\left[\int_0^t 1_{\{R(u)\le x\}}du\right]}{t} = \frac{E[\min(X_n,X)]}{\underbrace{E[X_n]}_{t}} = \frac{\int_0^\infty \overset{=1-F_{\min(X_n,X)}(u)}{Pr[\min(X_n,X)>u]}du}{t}$$

$$= \frac{\int_0^\infty Pr[X_n>u, X>u]du}{t} = \frac{\int_0^x Pr[X_n>u]du}{t}$$

$$= \frac{\int_0^x (1-F_X(u))du}{t}$$

Μάθημα 7ο: (25|10|18)

Μαρκοβιανή Αλυσίδα Διακριτού Χρόνου

Ορισμός: $\{X_n : n=0,1,2\ldots\}$ ΜΑΔΧ $\Leftrightarrow$ (i) $\exists S$ αριθμήσιμο με $Pr[X_n\in S]=1, \forall n\ge 0$

(ii) $Pr[X_{n+1}=j \mid X_0=i_0, X_1=i_1, \ldots, X_{n-1}=i_{n-1}, X_n=i]$

$= Pr[X_{n+1}=j \mid X_n=i], \forall i,j\in S, n\ge 0$

$\pi_j^{(n)} = Pr[X_n=j]$, $j\in S$, $n\ge 0$

$\underline{\pi}^{(n)} = (\pi_j^{(n)} : j\in S)$ → μεταβατική κατανομή τη στιγμή n

$\underline{\pi}^{(0)} = (\pi_j^{(0)} = Pr[X_0=j], j\in S)$ → αρχική κατανομή

Αν $Pr[X_{n+1}=j \mid X_n=i]$ ανεξ. του n $\forall i,j$ τότε $\{X_n\}$ ομογενής

* Από δω και πέρα ΜΑΔΧ → ΜΑΔΧ + ομογενής

$p_{ij} = Pr[X_{n+1}=j \mid X_n=i], \forall i,j\in S$

$\mathbb{P} = (p_{ij})$ → πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης 1ης τάξης

$\underline{\pi}^{(0)}, \mathbb{P}$ → προσδιορίζουν πλήρως την $\{X_n\}$

~ Βασικοί Υπολογισμοί σε Διακριτό Χρόνο ~

1. $Pr[X_0=i_0, X_1=i_1, X_2=i_2, \ldots, X_n=i_n] = \pi_{i_0}^{(0)} \cdot p_{i_0 i_1} \cdot p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{n-1} i_n}$
2. $Pr[X_{m+n}=j \mid X_m=i] \overset{m=0}{=\!=} Pr[X_n=j \mid X_0=i] = p_{ij}^{(n)}$

$\mathbb{P}^{(n)} = (p_{ij}^{(n)})$ ~ πίνακας πιθ. μεταβ. n-οστής τάξης

Έχουμε $p_{ij}^{(n)} = Pr[X_n=j \mid X_0=i] \overset{\text{θ.ο.π}}{=\!=} \sum_{k\in S} Pr[X_m=k \mid X_0=i] Pr[X_n=j \mid \cancel{X_0=i}, X_m=k]$, $0<m<n$

$$\overset{\text{Μαρκ}}{\underset{\text{ιδιοτ}}{=\!=}} \sum_{k\in S} p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(n-m)} \Rightarrow \mathbb{P}^{(n)} = \mathbb{P}^{(m)} \cdot \mathbb{P}^{(n-m)}, \ 0<m<n$$

$\Rightarrow \mathbb{P}^{(n)} = \mathbb{P}^{(1)} \cdot \mathbb{P}^{(n-1)} = \mathbb{P}^2 \cdot \mathbb{P}^{(n-2)} = \ldots = \mathbb{P}^n$

3. $\pi_j^{(n)} = P_r[X_n = j] = \sum_{i \in S} \underbrace{P_r[X_0 = i]}_{\pi_i^{(0)}} \underbrace{P_r[X_n = j \mid X_0 = i]}_{P_{ij}^{(n)}}$

$(\underline{\pi}^{(n)})^T = (\underline{\pi}^{(0)})^T \mathbb{P}^n, n \geq 0$

Επικοινωνια Καταστάσεων

$\{X_n\}$ ΜΑΔΧ με χ.κ S και πίνακα πιθαν. $\mathbb{P} = (p_{ij})$, $i, j \in S$

$i \to j$ (j προσπελάσιμη από την i) αν $i_0, i_1, \ldots i_n \in S : P_{ii_0} \cdot P_{i_0 i_1} \cdot P_{i_1 i_2} \cdots P_{i_n j} > 0$

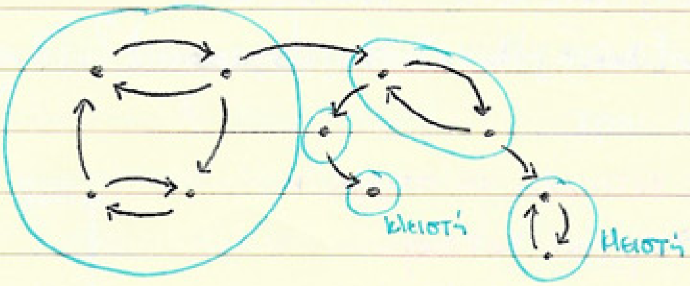
$\Leftrightarrow \exists n : P_{ij}^{(n)} > 0$

$i \to j$ & $j \to i \Leftrightarrow i \leftrightarrow j$ i, j επικοινωνούν

"$\longleftrightarrow$" σχέση ισοδυναμίας

↓

χ.κ διαμερίζεται σε κλάσεις επικοινωνίας



C κλάση επικοινωνίας

C κλειστή $\Leftrightarrow P_{ij} = 0$, $i \in C$, $j \in S \setminus C$

C ανοιχτή $\Leftrightarrow$ C όχι κλειστή

S κλάση επικ $\Leftrightarrow \{X_n\}$ αδιαχώριστη

Χρόνοι Απορρόφησης

$\{X_n\}$ ΜΑΔΧ με χ.κ S, $\mathbb{P} = (p_{ij})$

C κλειστή κλάση επικοινωνίας

$T_C = \inf\{n \geq 0 : X_n \in C\}$ ⇝ χρόνος 1ης εισόδου στο C

$h_i(C) = P_r[T_C < \infty \mid X_0 = i]$ ⇝ πιθ. απορροφ. στο C ξεκινώντας από το i

$m_i(C) = E[T_C \mid X_0 = i]$, $i \in S$ ⇝ μέσος χρόνος απορρόφισης

Υπολογισμός του $\underline{h}(C) = (h_i(C) : i \in S)$

Θεώρημα: Η $\underline{h}(C)$ είναι η ελάχιστη μη αρνητική λύση του συστήματος:
$$\begin{cases} h_i(C) = 1, & i \in C \\ h_i(C) = \sum_{j \in S} P_{ij} h_j(C), & i \in S \setminus C \end{cases}$$

Υπολογισμός του $\underline{m}(C) = (m_i(C) : i \in S)$

Θεώρημα: Η $\underline{m}(C)$ είναι η ελάχιστη μη αρνητική λύση του συστήματος: $\begin{cases} m_i(C) = 0, & i \in C \\ m_i(C) = 1 + \sum_{j \in S} P_{ij} m_j(C), & i \in S \setminus C \end{cases}$

Χρόνοι Επανόδου

$i \in S$

h_i : πιθ. επανόδου στην i

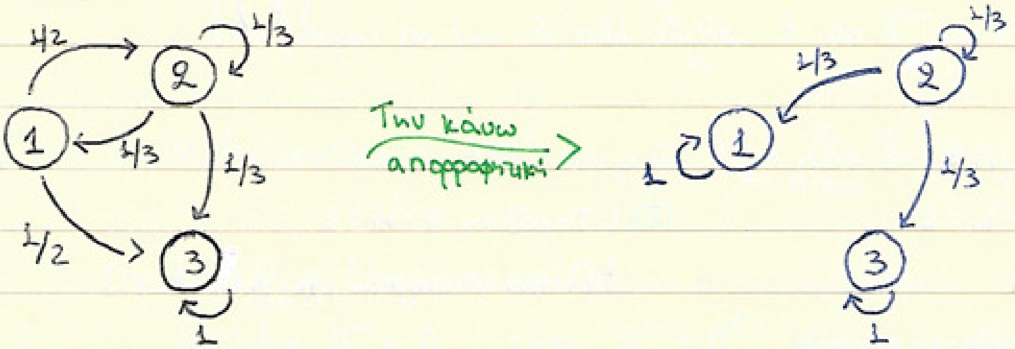
m_i : μέσος χρόνος επανόδου στην i

Υπολογίζουμε τα $\underline{h}(\{i\})$, $\underline{m}(\{i\})$ για την τροποποιημένη ΜΑΔΧ όπου η i έχει γίνει απορροφητική. Μετά

$h_i = \sum_{j \in S} P_{ij} h_j(\{i\})$

$m_i = 1 + \sum_{j \in S} P_{ij} m_j(\{i\})$

Παραδείγματα



$h_1 = ?$ $\quad m_1 = ?$

$h_1(\{1\}) = 1$

$h_2(\{1\}) = \frac{1}{3} h_1(\{1\}) + \frac{1}{3} h_2(\{1\}) + \cancelto{0}{\frac{1}{2} h_3(\{1\})} \Rightarrow h_2(\{1\}) = \frac{1}{2}$

$h_3(\{1\}) = 0$

Άρα, $h_1 = \frac{1}{2} h_2(\{1\}) + \frac{1}{2} h_3(\{1\}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{1}{4}$

Παράδειγμα: "Χρεωκοπία Παίκτη"

Παιχνίδι
- κερδίζω με πιθ. p
- χάνω με πιθ $1-p$

Στοιχηματίζω 1€ σε κάθε γύρο

Στόχος να φύγω με Ν€

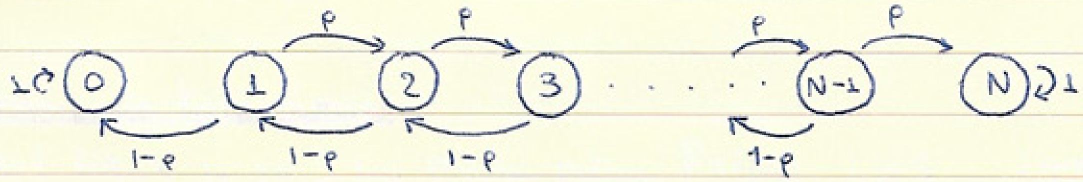
Πιθανότητα να φύγω με Ν€ ?

Μέση διαρκ. του παιχνιδιού?

X_n = περιουσία τη στιγμή n

$\updownarrow$

ΜΑΔΧ



$h_i(\{N\})$ = πιθ. να φύγω με N€, ξεκινάω με i€

Για να βρω λύνω:

$$\left.\begin{array}{l} h_N(\{N\}) = 1 \\ h_0(\{N\}) = 0 \\ h_i(\{N\}) = p\,h_{i+1}(\{N\}) + q\,h_{i-1}(\{N\}),\ 1 \le i \le N-1 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{λύνω}} h_i(\{N\}) = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^{N-i} - \left(\frac{q}{p}\right)^{N}}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{N}}$$

(Μπορεί να είναι και λάθος)

Επαναληπτικοτητα

$\{X_n\}$ ΜΑΔΧ με χ.κ S, $i \in S$

(i) i επαναληπτική $\Leftrightarrow h_i = 1$

i θετ. επαναλ. — $h_i = 1, m_i < \infty$

i μηδενικά επαναλ. — $h_i = 1, m_i = \infty$

(ii) i παροδική $\Leftrightarrow h_i < 1$

(Πλήθος επισκέψεων έχει γεωμ. κατ.)

! Οι έννοιες αυτές ισχύουν για όλη την κλάση επικοινωνίας της i (δηλαδή, αν i επαναληπτική και $i \leftrightarrow j$ τότε j επαναληπτική)

Περιοδικότητα

$\{X_n\}$ ΜΑΔΧ χ.κ S, $i \in S$

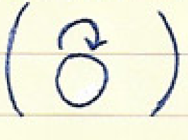
$d(i) = \text{ΜΚΔ}\{n : P_{ii}^{(n)} > 0\}$

Αν $d(i) = 1 \Leftrightarrow$ i απεριοδική

$d(i) > 1 \Leftrightarrow$ i περιοδική με περίοδο $d(i)$

! Επίσης, η περιοδικότητα είναι ιδιότητα κλάσης

Αν $p_{ii} > 0$, τότε i απεριοδική



Οριακή Συμπεριφορά ΜΑΔΧ

Θεώρημα: $\{X_n\}$ αδιαχ. ΜΑΔΧ με χ.κ S, $\mathbb{P}=(p_{ij})$

Η $\{X_n\}$ θετικά επαναλ. $\Leftrightarrow$ το σύστημα $\begin{cases} \pi_j = \sum_{i\in S} \pi_i p_{ij}, \ j\in S & \binom{\text{εξισ.}}{\text{ισορ.}} \\ \sum_{j\in S} \pi_j = 1 & \binom{\text{εξισ.}}{\text{κανον.}} \end{cases}$ έχει λύση.

Αν το σύστημα έχει λύση, τότε επιπλέον

(i) είναι μοναδική

(ii) $\pi_j > 0$, $j\in S$

(iii) $\pi_j = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}_{\{X_k=j\}}}{n}$ με πιθ 1, $j \in S$ ← μετράει πόσες φορές πήγα στη j

(iv) $\pi_j = \lim_{n\to\infty} \frac{E\left[\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}_{\{X_k=j\}}\right]}{n}$

(v) $\pi_j = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} Pr[X_k=j]}{n} = c\text{-}\lim_{n\to\infty} Pr[X_n=j]$, $j\in S$

(αn μπορεί να μην $\exists$, αλλά $\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{n}$ $\exists$, αν $\exists^{\text{αν}}$ και τα δύο είναι ίσα).

(vi) Αν επιπλέον η $\{X_n\}$ απεριοδ. $\pi_j = \lim_{n\to\infty} Pr[X_n=j, j\in S]$

(vii) $\pi_j = 1/m_j$ ← μέσος χρόνος επανόδου στη j

(viii) Αν $\underline{\pi}^{(0)} = \underline{\pi}$, τότε $\underline{\pi}^{(n)} = \underline{\pi}$ ← λύση του συστήματος

(ix) Η $\underline{\pi}$ είναι αριστερό ιδιοδιάνυσμα του $\mathbb{P}$ με ιδιοτιμή 1 $\underline{\pi}^T = \underline{\pi}^T \mathbb{P}$

Μάθημα 8ο (30/10/18)

ΜΑΔΧ ΜΕ ΔΟΜΗ ΚΟΣΤΟΥΣ

1. Οριακή / Στάσιμη κατανομή

$\{X_n : n \geq 0\}$ ΜΑΔΧ αδιαχώριστη

S χ.κ, $\mathbb{P}=(p_{ij})$ πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης

$\left.\begin{matrix} \pi_j = \sum_{i\in S} \pi_i P_{ij} \\ \sum_{j\in S} \pi_j = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ π_j : μακροπρόθεσμο ποσοστό χρόνου που η $\{X_n\}$ περνάει στη j, $j\in S$

p_{ij} : μακροπρόθεσμο ποσοστό των μεταβάσεων προς τη j μετά από κάθε επίσκεψη στην i

$\pi_i \cdot p_{ij}$: μακροπρόθεσμο ποσοστό μεταβάσεων $i \to j$ ανά χρονική μονάδα

Εξίσωση ισορροπίας για τη j

$$\underbrace{\pi_j \cdot \overset{=1}{\boxed{\sum_{i\in S} P_{ij}}}}_{\substack{\text{μακροπρ. ρυθμός} \\ \text{μετάβασης } j\to\bullet}} = \underbrace{\sum_{i\in S} \pi_i P_{ij}}_{\substack{\text{μακροπρ. ρυθμός} \\ \text{μετάβασης } \bullet\to j}}$$

2. Εξισώσεις γενικευμένης ισορροπίας για την (π_j)

(π_j) στάσιμη κατανομή της $\{X_n\}$

$$\Updownarrow$$

$$\forall A\subseteq S \quad \sum_{j\in A}\sum_{i\in A^c} \pi_j P_{ij} = \sum_{i\in A^c}\sum_{j\in A} \pi_j P_{ij}$$

3. Ερμηνεία π_j/π_i

$1/\pi_i$: μέσος χρόνος επανόδου στην i

Επισκέψεις στην i -> Ανον. διαδ.

π_j/π_i : μέσος αριθμός επισκέψεων στην j μεταξύ δύο διαδ. επισκέψεων στην i

$\Big($ $\pi_j = 0.3$ -> 3 στις 10 επισκέπτομαι την j
$\pi_i = 0.1$ -> 1 στις 10 -||- i $\Big)$

4. Δομή κόστους σε ΜΑΔΧ

$\{X_n\}$ ΜΑΔΧ με χ.κ S, $\mathbb{P}=(p_{ij})$ αδιαχώριστη

$c: S \to \mathbb{R}$

$i \to c(i)$: κόστος παραμονής (επίσκεψης) της i

$d: S\times S \to \mathbb{R}$

$(i,j) \to d(i,j)$: κόστος μετάβασης από την $i \to j$

c = Μακροπρόθεσμος μέσος ρυθμός κόστους : $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{E\left[\sum_{k=0}^{n-1} c(X_k) + \sum_{k=0}^{n-1} d(X_k, X_{k+1})\right]}{n}$

Θεώρημα

Αν $\{X_n\}$ είναι στάσιμη κατανομή $(\pi_j : j\in S)$ και $\sum_{i\in S} \pi_i |c(i)| < \infty$, $\sum_{i\in S}\sum_{j\in S} \pi_i P_{ij} |d(i,j)| < \infty$, τότε
$c = \underbrace{\sum_{i\in S} \pi_i c(i)}_{\substack{\text{μέσο κόστος} \\ \text{παραμονής}}} + \underbrace{\sum_{i\in S}\sum_{j\in S} \pi_i P_{ij} d(i,j)}_{\substack{\text{μέσο κόστος} \\ \text{μεταβάσεως}}}$, δηλαδή $c = E[c(X_k)] + E[d(X_k, X_{k+1})]$, όπου

$X_k \sim (\pi_i : i\in S)$, $(X_{k+1} \mid X_k = i) \sim (p_{ij} : j\in S)$

Ιδέα Απόδειξης

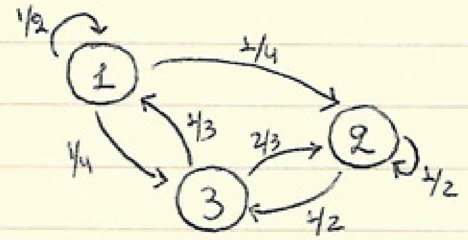
Εφαρμογή του ΣΑΘΚ για την ανανεωτική διαδικασία των επισκέψεων σε κάποια κατάσταση "0"

$$c = \frac{\sum_{i\in S} \pi_i/\cancel{\pi_0}\, c(i) + \sum_{i\in S}\sum_{j\in S} \pi_i/\cancel{\pi_0}\, P_{ij}\, d(i,j)}{1/\cancel{\pi_0}}$$

Παράδειγμα

Έστω μεταφορικό μέσο που κινείται μεταξύ 3 πόλεων

ΜΑΔΧ "Μεταβάσεις"



i	c(i)
1	1
2	1
3	2

$$\begin{array}{c|ccc} i \backslash j & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \end{array} \quad d(i,j)$$

$\pi_1 = 1/3 \cdot \pi_3 + 1/2 \cdot \pi_1$ (1)

$\pi_2 = 1/4 \cdot \pi_1 + 1/2 \cdot \pi_2 + 2/3 \cdot \pi_3$ (2)

$\pi_3 = 1/2 \cdot \pi_2 + 1/4 \cdot \pi_1$ (3)

$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$ (4)

Μπορώ να πετάξω μια αφού είναι γραμμικά εξαρτημένες

$(1) \Rightarrow \pi_3 = 3/2 \cdot \pi_1$

$(3) \Rightarrow 3/2 \cdot \pi_1 = 1/4 \cdot \pi_1 + 1/2 \cdot \pi_2 \Rightarrow \pi_2 = 5/2 \cdot \pi_1$

$(4) \Rightarrow \pi_1 + 5/2 \cdot \pi_1 + 3/2 \cdot \pi_1 = 1 \Rightarrow \pi_1 = 1/5$, $\pi_2 = 1/2$, $\pi_3 = 3/10$

$$c = \overset{\pi_1}{1/5} \cdot \overset{c(1)}{1} + \overset{\pi_2}{1/2} \cdot \overset{c(2)}{1} + \overset{\pi_3}{3/10} \cdot \overset{c(3)}{2} + \overset{\pi_1}{1/5} \cdot \overset{p_{11}}{1/2} \cdot \overset{d(1,1)}{1} + \overset{\pi_1}{1/5} \cdot \overset{p_{12}}{1/4} \cdot \overset{d(1,2)}{2} + \ldots + \overset{\pi_3}{3/10} \cdot \overset{p_{33}}{0} \cdot \overset{d(3,3)}{1} = \ldots$$

~ Μαρκοβιανές Αλυσίδες Συνεχούς Χρόνου (ΜΑΣΧ) ~

Ορισμός: $\{X(t) : t \geq 0\}$ ΜΑΣΧ με ρυθμούς q_{ij} $\Leftrightarrow$

(i) S χ.κ αριθμήσιμος

(ii) $Pr[X(s+t)=j \mid X(u) : 0 \leq u < s, X(s)=i] = Pr[X(s+t)=j \mid X(s)=j] \overset{\text{αν δεν εξαρτάται}}{\underset{\text{από το s ομογενής}}{=}} P_{ij}(t)$

(iii) $q_{ij} = p_{ij}'(0) = \begin{cases} \lim_{h\to 0^+} P_{ij}(h)/h , & i \neq j \\ \lim_{h\to 0^+} \frac{P_{ii}(h)-1}{h} , & i = j \end{cases}$ ⊛

$$\circledast\; P_{ij}'(0^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{P_{ij}(h) - P_{ij}(0)}{h} \qquad P_{ij}(0) = \begin{cases} 0, & i\neq j \\ 1, & i=j \end{cases}$$

ή ισοδύναμα $P_{ij}(h) = \begin{cases} q_{ij}(h) + o(h), & i\neq j \\ \underbrace{1 + q_{ii}\cdot h}_{1-q_i h} + o(h), & i=j \end{cases}$ με $\frac{o(h)}{h} \to 0$ καθώς $h \to 0^+$

$q_i = -q_{ii} = \sum_{j\neq i} q_{ij}$

Άρα, $P_{ij}(h) = \begin{cases} q_{ij}\cdot h + o(h), & i\neq j \\ 1 - q_i h + o(h), & i=j \end{cases}$

Χρόνοι Παραμονής

Έστω $\{X(t)\}$ ΜΑΣΧ με ρυθμούς q_{ij}, $q_i = \sum_{i\neq j} q_{ij}$

(i) T_i : χρόνος παραμονής στην i ??

(ii) $\Pr[X(T_i)=j \mid X(0)=i]$??

(i) $\Pr[T_i \leq x] = F_{T_i}(x)$

Τότε, $\Pr[x < T_i \leq x+h \mid T_i > x] = 1 - P_{ii}(h) + o(h) = q_i h + o(h)$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0^+} \frac{\Pr[x < T_i \leq x+h]}{h\cdot \Pr[T_i > x]} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1 - P_{ii}(h) + o(h)}{h}$$

$$\Rightarrow \frac{F_{T_i}'(x)}{1 - F_{T_i}(x)} = q_i \Rightarrow \frac{(1 - F_{T_i}(x))'}{1 - F_{T_i}(x)} = q_i$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(-\log(1 - F_{T_i}(x))\right) = q_i \Rightarrow -\log(1 - F_{T_i}(x)) + \cancelto{0}{\log(1 - F_{T_i}(0))} = q_i x$$

$$\Rightarrow F_{T_i}(x) = 1 - e^{-q_i x},\; x \geq 0 \qquad \Rightarrow T_i \sim \underline{Exp(q_i)}$$

→ συχνότητα εξόδου από την i

$1/q_i$ περίοδος χρόνων που κάθεται στην i

Είναι αυτό που περιμέναμε αφού έχουμε Μ.Α,
δηλαδή αμνήμονη ιδιότητα

(ii) $\Pr[X(T_i)=j \mid X(0)=i] = \lim_{h\to 0^+} [X(h)=j \mid X(0)=i, X(h)\neq i] = \lim_{h\to 0^+} \frac{\Pr[X(0)=i, \cancel{X(h)\neq i}, X(h)=j]}{\Pr[X(0)=i, X(h)\neq i]}$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{\cancel{\Pr[X(0)=i]}\; \overbrace{\Pr[X(h)=j \mid X(0)=i]}^{P_{ij}(h)} / h}{\cancel{\Pr[X(0)=i]}\; \Pr[X(h)\neq i \mid X(0)=i] / h} = \frac{q_{ij}}{q_i}$$