Enjoy
Ασκήσεις με
Διδακτορικό

# Μάθημα 9ο (1/11/18)

## Κεφάλαιο 2ο Σημειώσεων (σελ 32-36)

### Άσκηση 14

$\{N(t)\}$ διαδικασία Poisson

$E[S_{N(t)}] = ??$

$$\underbrace{E[S_{N(t)}]}_{h(t)} = E\left[E[S_{N(t)} \mid S_1]\right] = \int_0^{\infty} E[S_{N(t)} \mid S_1 = x]\, dF_{S_1}(x) \overset{*}{=} \int_0^t E[S_{N(t-x)} + x]\, dF_{S_1}(x)$$

$$= \underbrace{\int_0^t x\, dF_{S_1}(x)}_{\frac{1}{\lambda}\int_0^t \underbrace{x\lambda^2 e^{-\lambda x}}_{\text{πυκνότητα Erlang}(2,\lambda)} dx} + \int_0^t E[S_{N(t-x)}]\, dF_{S_1}(x)$$

$$* \quad E[S_{N(t)} \mid S_1 = x] = \begin{cases} 0, & t \le x \\ E[S_{N(t-x)} + x], & t > x \end{cases}$$

$$= \underbrace{1/\lambda \cdot P(W \le t)}_{D(t)} + \int_0^t h(t-x)\, dF_{S_1}(x), \text{ όπου } W \sim \text{Erlang}(2,\lambda)$$

οπότε η λύση είναι

$$h(t) = D(t) + \int_0^t D(t-x)\, dM_G(x) = \dots = t - \frac{1-e^{-\lambda t}}{\lambda}$$

Υπενθύμιση

$$\left.\begin{matrix} E[X \mid Y] \\ E[X \mid Y = y] = g(y) \end{matrix}\right\} \Rightarrow E\left[E[X \mid Y]\right] = E[g(Y)]$$

2ος τρόπος: Campell

$E[S_{N(t)}] = E\left[E[S_{N(t)} \mid N(t)]\right] = (1)$

$E[S_{N(t)} \mid N(t) = n] = E[S_n \mid N(t) = n] = E[U_{nn}]$ (2)

$g$ μετρ. συνάρτ.

$E[g(S_1, \dots, S_n) \mid N(t) = n]$

$E[g(U_{1n}, \dots, U_{nn})]$

όπου $U_{kn}$ η $k$-οστή

$S \sim U(0,t)$

$$(1) \overset{(2)}{=} t \cdot E\left[\frac{N(t)}{N(t)+1}\right] = t\left[1 - \frac{1}{N(t)+1}\right]$$

$$E\left[\frac{1}{N(t)+1}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+\lambda} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} = \dots$$

$$E\left[\sum_{k=1}^{N(t)} S_k^2\right]$$

$$E\left[\sum_{k=1}^{n} S_k^2 \,\middle|\, N(t) = n\right] = E\left[\sum_{k=1}^{n} U_{kn}^2\right] \xrightarrow[\text{η διάταξη}]{\text{Δε παίζει ρόλο}} E\left[\sum_{k=1}^{n} U_k^2\right] = \sum_{k=1}^{n} E[U_1^2] = n \cdot E[U_1^2] = \dots$$

Άσκηση

$N(t)$ διαδικασία Poisson$(\lambda)$

$E[S_{N(t)+1}] = ??$

$$E\left[\sum_{k=1}^{N(t)+1} X_k\right] = E\left[\sum_{k=1}^{\infty} \overset{\geq 0}{X_k} \, \overset{\geq 0}{\mathbb{1}_{\{k \leq N(t)+1\}}}\right] = \sum_{k=1}^{\infty} E\left[X_k \mathbb{1}_{\{k \leq N(t)+1\}}\right]$$

$$= E[X_k] \sum_{k=1}^{\infty} Pr(N(t)+1 \geq k) = E[X_1] E[N(t)+1]$$

αν $\underline{o} \to \{0,1,\ldots\} \cup \{\infty\}$ $E[X] = \sum_{k=1}^{\infty} Pr(X > k)$

$X_k$, $\mathbb{1}_{\{k \leq N(t)+1\}}$ ανεξάρτητες

$\{k \leq N(t+1)\} \Leftrightarrow \{S_{k-1}(t) = g(X_1, \ldots, X_{k-1})$

Άσκηση 5

$\{N(t), t \geq 0\}$ ανανεωτική διαδικασία.

Ενδιάμεσοι χρόνοι $X_i$, $i = 1,2,\ldots$ με $X_i \overset{\text{ανεξ}}{\sim} \mathcal{U}[0,1]$

Υπολογισμός της $m(t) = E[N(t)] = ??$

$$\underbrace{E[N(t)]}_{h(t)} = E[E[N(t) \mid S_1]] \overset{*}{=} \int_0^t 1 + h(t-x)\, dF_{S_1}(x) = F_{S_1}(t) + \int_0^t h(t-x)\, dF_{S_1}(x)$$

$$* \; E[N(t) \mid S_1 = x] = \begin{cases} 0, & t \leq x \\ \underbrace{E[N(t-x)+1]}_{1+h(t-x)}, & t > x \end{cases}$$

Για $t \in [0,1]$, $F_{S_1}(t) = t$

$$m(t) = t + \int_0^t m(t-x)\, dx \;\overset{u=t-x}{=\!=\!=}\; t + \int_0^t m(u)\, du$$

$$\left.\begin{array}{l} m'(t) = 1 + m(t) \\ m(0) = 0 \end{array}\right\} \text{Π.Α.Τ}$$

$$\left[\begin{array}{l} y' + p(t)y(t) = q(t) \\ \text{λύση } \; y(t) = e^{-\int p(t)dt}\left[c + \int q(t) \cdot e^{\int p(t)dt} dt\right] \end{array}\right]$$

ή $(e^{-t} m(t))' = e^{-t} \Rightarrow \ldots \Rightarrow m(t) = e^t - 1$, $t \in [0,1]$

$$\left( \text{Για } t \in (1,2): \; m(t) = 1 + \int_1^t m(t-x)\, dx \;\overset{u=t-x}{=\!=\!=}\; 1 + \int_0^t m(u)\, du \Rightarrow m'(t) = m(t) - m(t-1) \right.$$

$$\left. \Rightarrow \ldots \Rightarrow m(t) = e^t + e^{t-1} - 1 - te^{t-1} \right)$$

## Άσκηση 8

$\{N(t), t\geq 0\}$ αναν. διαδ. με ~~κατανομή ενδιάμεσων~~ χρόνων $F_X(t)$ με πυκνότητα και $E[X]=\mu$ και $h(t)=Pr(N(t)$ περιττός$)$

Ανανεωτική εξίσωση, λύση, $\lim\limits_{t\to\infty} h(t)$ ??

Έστω $\{N'(t)\}$ η αναν. διαδ. που προκύπτει κάθε φορά που συμβαίνει γεγονός στη $N(t)$ με περιττό δείκτη.

Αυτή θα έχει ενδιάμεσους χρόνους $S_i' = X_i + X_{i+1}$

$$Pr(N(t) \text{ περιττός}) = E[\underbrace{Pr(N(t) \text{ περιττός} | S_i')}_{\text{T.μ}}] \overset{*}{=}$$

$$* \; Pr[(N(t) \text{ περιττός}) | S_i' = x] = \begin{cases} P[N(t)=1 | S_1 = x], & t<x \\ P[N(t-x) \text{ περιττός}], & t\geq x \end{cases}$$

$$(1) \overset{*}{=} \int_t^\infty Pr[N(t)=1 | X_1+X_2=x]\, dF_{S_i'}(t) + \int_0^t h(t-x)\, dF_{S_i'}(x)$$

$$= \underbrace{\int_t^\infty Pr[X_1<t | X_1+X_2=x]\, dF_{S_i'}(x)} + \int_0^t h(t-x)\, dF_{S_i'}(x)$$

$$= Pr(\underbrace{X_1<t, X_1+X_1\geq t}_{x_1<t\leq x_1+x_2}) + \int_0^t h(t-x)\, dF_{S_i'}(x) = \underbrace{F_X(t) - \overset{F_{X_1+X_2}(t)}{F_X^{*2}(t)}}_{D(t)} + \int_0^t h(t-x)\, dF_{S_i'}(x)$$

Άρα, η λύση $h(t) = D(t) + \int_0^t D(t-x)\, dM_{S'}(x)$

Για $\lim\limits_{t\to\infty} h(t)$

$$D(t) = 1 - \underset{\geq 0}{F_X^{*2}(t)} - \underset{\geq 0}{(1-F_X(t))}$$

$$\int_0^\infty |D(t)|\, dt \leq \int_0^\infty 1-F^{*2}(t)\, dt + \int_0^\infty 1-F(t)\, dt = 3\mu < \infty$$

Άρα, εφαρμόζεται το θεώρημα

$$\lim_{t\to\infty} h(t) = \frac{\int_0^\infty D(t)\, dt}{E[S']} = \dots = \frac{\mu}{2\mu} = \frac{1}{2}$$

## Άσκηση 9

$N(t)$ αναν. διαδ.

$R(t) = S_{N(t)+1} - t$ υπολειπόμενος χρόνος

Για $x \geq 0$, $h(t) = Pr(R(t) > x)$

(i) Αναν. εξίσ. και νδο $\lim_{t \to \infty} h(t) = 1/\mu \int_x^\infty 1 - F_X(u) du$

(ii) Αν $A(t) = t - S_{N(t)}$ η $\{A(t) > x\} \Leftrightarrow \{R(t-x) > x\}$

& να βρεθεί το $\lim_{t \to \infty} [P(A(t)) > x]$

(iii) Νδο $Pr[A(t) > x, R(x) > y] \to 1/\mu \int_{x+y}^\infty 1 - F_X(u) du$

(i) $\{R(t) > x\} = \{(t, t+x)$ όχι γεγ$\}$

$\{A(t) > x\} = \{(t-x, t)$ όχι γεγ$\}$

οπότε $\{R(t-x) > x\} = \{$όχι γεγ στο $(t-x, t)\} = \{A(t) > x\}$

$Pr(A(t) > x) = Pr(R(t-y) > x)$

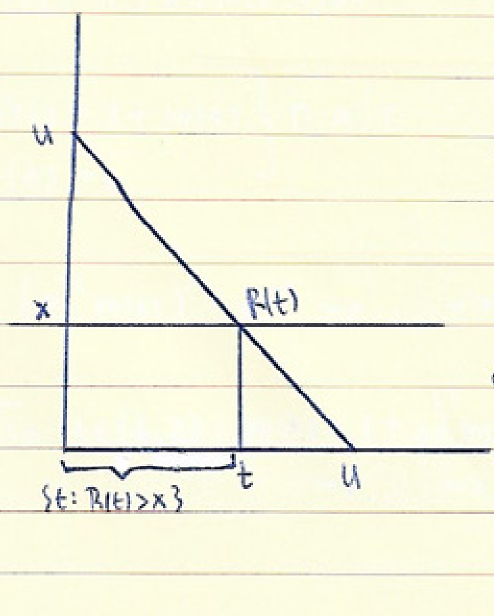
και $\lim_{t \to \infty} Pr(A(t) > x) = \lim_{t \to \infty} Pr(R(t-x) > x) = \lim_{u \to \infty} Pr(R(t) > u)$

(iii) $P(A(t) > x, R(t) > y) = \{$οχι γεγ $(t-x, t) \cap (t, t+y)\}$

$= Pr($όχι γεγ. στο $(t-x, t+y)) = Pr(R(t+x) > t+y)$

(i) $\{R(t) > x\} = \{(t, t+x)$ οχι γεγ$\}$

$$Pr(R(t) > x \mid S_1 = u) = \begin{cases} Pr(R(t-x) > x), & t \geq u \\ 0, & t < u < t+x \\ 1, & u > t+x \end{cases}$$




$h(t) = \int_{t+x}^\infty dF_X(u) + \int_0^t h(t-x) dF_X(u) = \underbrace{1 + F_X(x+t)}_{D(t)} + \int_0^t h(t-x) dF_X(u)$

Για το $\lim_{t \to \infty} h(t)$

Η $D(t)$ γράφεται ως διαφορά μη αρνητικών μονότονων φραγ. διαδ. για σταθερό $x$, η $F(x-t) \uparrow$ ως προς $t$

$\int_0^\infty |D(t)| dt = \int_0^\infty 1 - F_X(x+t) dt = \int_x^\infty 1 - F_X(u) du \leq \int_0^\infty 1 - F_X(u) du = E[X] < \infty$

$\lim_{t \to \infty} h(t) = \frac{1}{E[X]} \int_0^\infty D(t) dt = \int_x^\infty \frac{1 - F_X(u)}{\mu} du$

# Μάθημα 10ο (6/11/18)

## Μαρκοβιανές Αλυσίδες Συνεχούς Χρόνου

**Ορισμός:** $\{X(t)\}$ με αριθμήσιμο χώρο καταστάσεων $S$ λέγεται ΜΑΣΧ με ρυθμούς $q_{ij}$ $i,j \in S$, $q_i = \sum_{j \neq i} q_{ij}$, $i \in S$

$\overset{\text{ορσ1}}{\Longleftrightarrow}$ Μαρκοβιανή ιδιότητα + $Pr[X(t+h)=j \mid X(t)=i] = \begin{cases} q_{ij}h + o(h), & i \neq j \\ 1 - q_i h + o(h), & i = j \end{cases}$ $h \to 0^+$

$\overset{\text{ορσ2}}{\Longleftrightarrow}$ $Exp(q_i)$ χρόνος παραμονής στην $i$, $i \in S$ και δεσμευμένη πιθανότητα η επόμενη κατάσταση $j$ δεδομένου ότι η τρέχουσα είναι $i = \frac{q_{ij}}{q_i}$

$\overset{\text{ορσ3}}{\Longleftrightarrow}$ Για κάθε $i \in S$ υπάρχουν $T_{ik} \sim Exp(q_{ik})$, $k \neq i$ και χρόνος παραμονής στην $i$, $T_i = \min_{k \neq i} T_{ik}$ και η επόμενη κατάσταση είναι η $j$: $T_{ij} = \min_{k \neq i} T_{ik}$

### Ανάλογες έννοιες με τις ΜΑΔΧ

1. Προσπελασιμότητα - Επικοινωνία

   $i \to j \Leftrightarrow \exists i_0, i_1, \ldots, i_n : q_{i i_0} \cdot q_{i_0 i_1} \cdots q_{i_{n-1} i_n} q_{i_n j} > 0$

   Ακριβώς όπως ΜΑΔΧ

2. Περιοδικότητα

   Δεν υπάρχει σαν έννοια στις ΜΑΣΧ

3. Επαναληπτικότητα

   Ακριβώς όπως στις ΜΑΔΧ

### Υπολογισμοί

- $Pr[X(t)=j \mid X(0)=i] = P_{ij}^{(t)}$ — πιθανότητες μετάβασης σε χρόνο t

  $\mathbb{P}^{(t)} = (P_{ij}^{(t)})$

  $\mathbb{P}^{(t)} = e^{Qt} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Q^n t^n}{n!}$

- $C$ κλειστή κλάση επικοινωνίας

  $h_i(C) = Pr[T_C < \infty \mid X(0)=i]$, $i \in S$

  $T_C$ ↳ χρόνος απορρόφησης - εισόδου στη $C$

  Το $(h_i(C) : i \in S)$ είναι η ελάχιστη μη αρνητική λύση του:

$$\begin{cases} x_i = 1, & i \in C \\ x_i = \sum_{j \neq i} \frac{q_{ij}}{q_i} x_j, & i \in S \setminus C \end{cases}$$

- $C$ κλειστή κλάση

$m_i(C) = E[T_C \mid X(0) = i], \ i \in S$

Το $(m_i(C) : i \in S)$ είναι η ελαχ. μη-αρνητική λύση του:

$$\begin{cases} y_i = 0, & i \in C \\ y_i = \frac{1}{q_i} + \sum_{j \neq i} \frac{q_{ij}}{q_i} y_j, & i \in S \setminus C \end{cases}$$

## Οριακή Θεωρία ΜΑΣΧ - Εργοδικό Θεώρημα

**Θεώρημα:** Έστω $\{X(t)\}$ ΜΑΣΧ αδιαχώριστη στο $S$ με ρυθμούς $q_{ij}, \ i \neq j$

$$q_i = \sum_{j \neq i} q_{ij}, \ i \in S$$

$\{X(t)\}$ θετικά επαναληπτική $\Leftrightarrow$ Το σύστημα των εξισώσεων ισορροπίας $p_j q_j = \sum_{i \neq j} p_i q_{ij}, \ j \in S$ και οι εξισώσεις κανονικοποίησης $\sum_{j \in S} p_j = 1$

Αν το σύστημα έχει λύση, τότε είναι μοναδική και όλοι οι συντελεστές $> 0$. Τότε:

(i) $p_j = \underbrace{\lim_{t \to \infty} \frac{\int_0^t 1_{\{X(u) = j\}} du}{t}}$ με πιθ 1, $j \in S$

Μακροπρόθεσμο ποσοστό χρόνου που περνάω στη $j$

(ii) $p_j = \underbrace{\lim_{t \to \infty} \frac{E\left[\int_0^t 1_{\{X(u) = j\}} du\right]}{t}}$, $j \in S$

Μακροπρόθεσμο μέσο ποσοστό χρόνου στη $j$

(iii) $p_j = \lim_{t \to \infty} \frac{\int_0^t Pr[X(u) = j] du}{t} = c\text{-}\lim_{t \to \infty} Pr[X(t) = j]$

$= \lim_{t \to \infty} \int_0^t \underbrace{1/t}_{f_{U[0,t]}(u)} \cdot Pr[X(u) = j] du = \underbrace{\lim_{t \to \infty} Pr[X(U_t) = j]}$

οριακή πιθανότητα να βρίσκεται η $\{X(t)\}$ στη $j$ μια ομοιόμορφα επιλεγμένη χρον. στιγμή

(iv) $p_j = \underbrace{\lim_{t \to \infty} \Pr[X(t)=j]}$

οριακή πιθ. της j

(v) $p_j = \dfrac{1}{q_j m_j}$, όπου $m_j$ : ο μέσος χρόνος επανόδου στη j

$\left( p_j = \dfrac{1/q_j}{m_j} \right.$ απο ΣΑΘΚ για διαδ. κόστους 1 χρημ. μονάδας ανά χρον. μονάδα παραμονής στη j $\left. \right)$

(vi) $(p_j : j \in S)$ στάσιμη κατανομή της $\{X(t)\}$: $\Pr[X(0)=j] = p_j,\ j \in S$

$$\Downarrow$$

$$\Pr[X(t)=j] = p_j,\ j \in S$$

## Ερμηνείες

$p_i = \lim_{t \to \infty} \dfrac{\text{χρόνος στην } i \text{ στο } [0,t]}{t}$, με πιθ 1

$q_{ij} = \lim_{t \to \infty} \dfrac{\#\text{μεταβάσεων } i \to j \text{ στο } [0,t]}{\text{χρόνος στην } i \text{ στο } [0,t]}$, με πιθ 1

$p_i \cdot q_{ij} = \lim_{t \to \infty} \dfrac{\#\text{μεταβάσεων } i \to j \text{ στο } [0,t]}{t}$, με πιθ 1

Άρα, $\underbrace{p_j q_j = p_j \sum_{j \neq i} q_{ji}}_{\text{ρυθμός εξόδου από την } j} = \underbrace{\sum_{i \neq j} p_i q_{ij}}_{\text{ρυθμός εισόδου στην } j}$

## Δομή κόστους σε ΜΑΣΧ

$\{X(t)\}$ ΜΑΣΧ με χ.κ $S$, ρυθμούς $q_{ij}$, $q_i$ αδιαχωρ. με οριακή κατανομή $(p_j : j \in S)$

$c : S \to \mathbb{R}$

$i \to c(i)$ : κόστος παραμονής στην i ανά χρον. μονάδα

$d : S \times S \setminus \{(i,i) : i \in S\} \to \mathbb{R}$

$(i,j) \mapsto d(i,j)$ : κόστος μιας μετάβασης από $i \to j$

Έστω $\{X_n\}$ η ΜΑΣΧ που αντιστοιχεί στις μεταβάσεις της $\{X(t)\}$ και $\{N(t)\}$ η απαριθμήτρια διαδικασία των μεταβάσεων της $\{X(t)\}$

$$C(t) = \underbrace{\int_0^t c(X(u))\,du}_{\substack{\text{κόστος παραμ. στο } [0,t] \\ \text{στις διαφ. καταστ.}}} + \underbrace{\sum_{j=1}^{N(t)} d(X_{j-1}, X_j)}_{\text{κόστος μετάβασης στο } [0,t]}$$

Τότε, $\underbrace{\lim_{t\to\infty} \frac{C(t)}{t}}_{\text{μακροπρόθεσμος ρυθμός κόστους}} = \sum_{i\in S} \underbrace{p_i c(i)}_{\text{πιθ. να βρίσκεται στην } i \,\cdot\, \text{κόστος παραμ.}} + \sum_{i\in S}\sum_{j\neq i} \underbrace{p_i q_{ij} d(i,j)}_{\#\text{μεταβάσεων από } i\to j \,\cdot\, \text{κόστος μεταβ.}}$ με πιθ 1

$\lim_{t\to\infty} \frac{E[C(t)]}{t} =$ υπό τη συνθήκη: $\sum_{i\in S} p_i |c(i)| + \sum_{i\in S}\sum_{j\neq i} p_i q_{ij} |d(i,j)| < \infty$

## Εξισώσεις γενικευμένης ισορροπίας

$p_j \sum_{i\neq j} q_{ji} = \sum_{i\neq j} p_i q_{ij}$, $j\in S$ ⇝ εξισώσεις (πλήρους) ισορροπίας

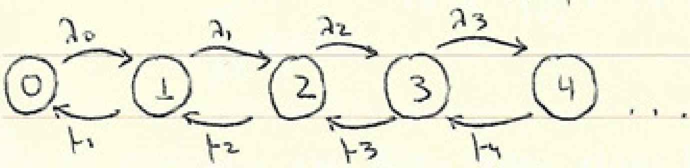
$\forall A\subseteq S$ $\sum_{j\in A}\sum_{j\in A^c} p_j q_{ij} = \sum_{i\in A^c}\sum_{j\in A} p_i q_{ij}$ ⇝ εξισ. γενικευμένης ισορ.

Ισχύουν σε κάθε ΜΑΣΧ

Μόνο στις αντιστρέψιμες ΜΑΣΧ: $p_j q_{ji} = p_i q_{ij}$ ⇝ εξισ. λεπτομ. ισορ.

## Διαδικασίες Γέννησης - Θανάτου

$\{X(t)\}$ διαδ. Γ-Θ με ρυθμούς Γ: $\lambda_i$ $\iff$ $\{X(t)\}$ ΜΑΣΧ στο $\{0,1,2\dots\}$ και
-//- Θ: $\mu_i$




$$q_{ij} = \begin{cases} \lambda_i, & i\geq 0,\ j=i+1 \\ \mu_i, & i\geq 1,\ j=i-1 \\ 0, & \text{διαφ} \end{cases}$$

Από εξισ. γεν. ισορ. για $A=\{0,1\dots j-1\}$ έχω: $p_{j-1}\lambda_{j-1} = p_j \mu_j$, $j\geq 1$

οπότε $p_j = \frac{\lambda_{j-1}}{\mu_j} p_{j-1} = \frac{\lambda_{j-1}}{\mu_j}\cdot\frac{\lambda_{j-2}}{\mu_{j-1}} p_{j-2} = \dots = \frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{j-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_j} p_0$, $j\geq 1$

Η εξίσωση κανονικοποίησης: $\sum_{j=0}^{\infty} p_j = 1 \iff p_0\left(1+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{j-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_j}\right) = 1$

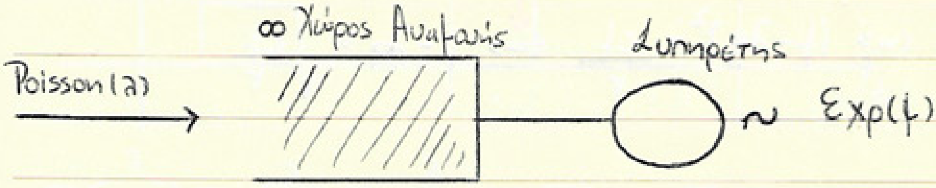
Συνθήκη θετ. επαναλ. $1+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{j-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_j} < \infty$

Τότε, $p_j = \frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{j-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_j} p_0$, όπου $p_0 = \left(1+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{j-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_j}\right)^{-1}$

Μάθημα 11ο (8/11/18)

## ΜΑΔΧ & ΜΑΣΧ με κόστη - Εφαρμογές

### 1. Αποδοχή/Απόρριψη πελατών σε σύστημα εξυπηρέτησης




(M/M/1) ουρά

Διαχειριστής που αφήνει κάθε αφικνούμενο πελάτη να εισέλθει με πιθ q

r : κέρδος από εξυπηρ. πελ.

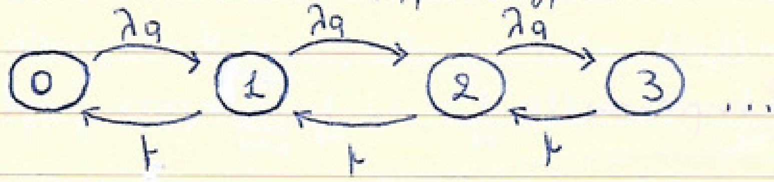
c : κόστος ανά πελάτη & χρον. μονάδα παραμονής στο σύστημα.

Μακροπρόθεσμος μέσος ρυθμός κέρδους ως συνάρτηση του q = ??

Βέλτιστο q??

(Αφιξη Poisson(λ), Πιθ. να μπει q } Poisson(λq) εκθετικοί χρόνοι λq)

$Q(t)$ = # πελατών τη χρον. στιγμή t




$\{Q(t)\}$ ΜΑΣΧ αδιαχώριστη

Έστω $(p_n : n \geq 0)$ η στάσιμη κατανομή

$p_n = \frac{(\lambda q)^n}{\mu^n} p_0, \quad n \geq 1$

Εξίσωση κανονικοποίησης: $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1 \Rightarrow p_0 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda q)^n / \mu^n = 1$

$\{Q(t)\}$ θετικά επαναλ. $\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \left(\lambda q/\mu\right)^n < \infty \Leftrightarrow \lambda q < \mu$

Τότε, $p_0 = 1 - \lambda q/\mu$ και $p_n = \left(1 - \lambda q/\mu\right)\left(\lambda q/\mu\right)^n, \; n \geq 0$

$p(q)$ = μακροπρόθεσμος ρυθμός κέρδους $= \sum_{n=0}^{\infty} p_n c(n) + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m \neq n} p_n q_{n,m} d(n,m)$

$\frac{\text{προκαταβολική}}{\text{πληρωμή}}$ $\sum_{n=0}^{\infty} p_n c n + \sum_{n=0}^{\infty} p_n \lambda q r = -c E[Q] + \lambda q r = -c \frac{\lambda q/\mu}{1 - \lambda q/\mu} + \lambda q r$

κόστος

$$= \lambda q r - \frac{\lambda q c}{\mu - \lambda q}$$

$$p'(q) = \lambda r - \frac{\lambda c(\mu \cancel{- \lambda q}) \cancel{+ \lambda^2 q c}}{(\mu - \lambda q)^2} = \lambda r - \frac{\lambda c \mu}{(\mu - \lambda q)^2}$$

$$p''(q) = -2 \frac{\lambda^2 c \mu}{(\mu - \lambda q)^3} < 0$$

συνθήκη ευστάθειας

$$p'(q) = 0 \iff \cancel{\lambda} r = \frac{\cancel{\lambda} c \mu}{(\mu - \lambda q)^2} \iff (\mu - \lambda q)^2 = \frac{c\mu}{r} \iff \mu - \lambda q = \sqrt{\frac{c\mu}{r}}$$

$$q = \underbrace{\frac{1}{\lambda}\left(\mu - \sqrt{\frac{c\mu}{r}}\right)}_{q^*}$$

Αν $q^* \geq 1 \Rightarrow$ βέλτιστο $q = 1$ (τους αφήνω όλους)
Αν $0 < q^* < 1 \Rightarrow$ βέλτιστο $q = q^*$
Αν $q^* \leq 0 \Rightarrow$ βέλτιστο $q = 0$ (δεν αφήνω κανέναν)

$$\text{Βέλτιστο } q = \begin{cases} 0, & r \leq c/\mu \\ 1, & r \geq c/(\mu - \lambda) \\ q^*, & c/\mu < r < c/(\mu - \lambda) \end{cases}$$

Αν η πληρωμή γινόταν μετά την εξυπηρέτηση

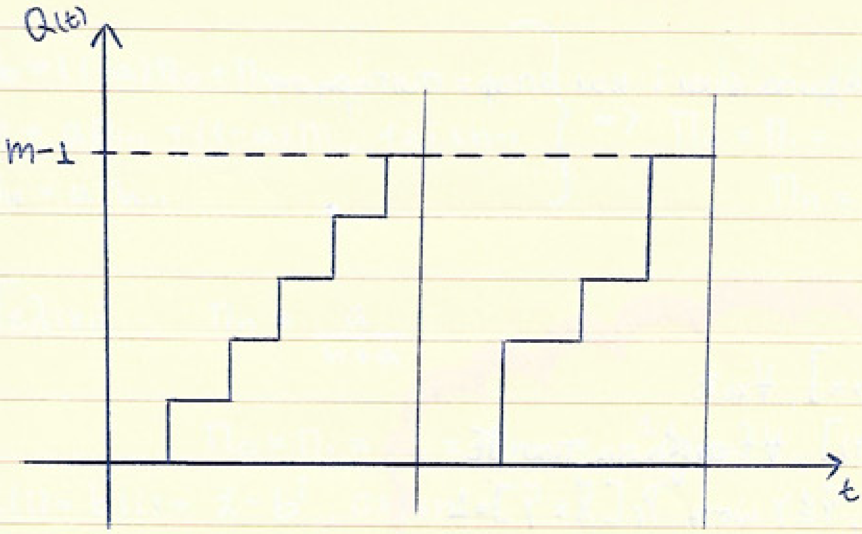
$$p(q) = -\sum_{n=0}^{\infty} p_n c n + \sum_{n=1}^{\infty} p_n \mu r = -c\,E[Q] + \mu r \underbrace{(1 - p_0)}_{\lambda_p/\mu} = -c\,E[Q] + r\lambda_p$$

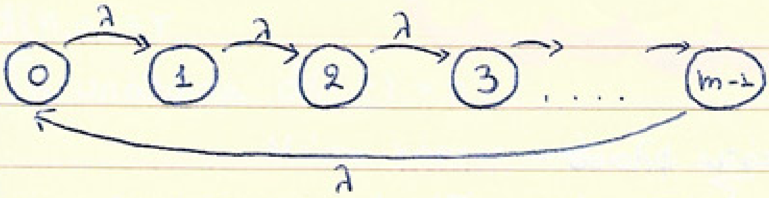
ΣΔ10

## 2. Εκκαθάριση Αποθήκης

- Poisson($\lambda$) διαδ. αφίξεων προϊόντων σε αποθήκη
- Μόλις μαζευτούν $m$ η αποθήκη εκκαθαρίζεται ακαριαία
- $K$: πάγιο κόστος εκκαθάρισης
- $k$: κόστος εκκαθάρισης ανά μονάδα προϊόντος
- $h$: κόστος αποθήκευσης ανά χρον. μον. & μον. προϊόντος

$Q(t)$ = ύψος αποθέματος




$$\left.\begin{array}{l} \lambda p_n = \lambda p_{n-1}, \quad 1 \le n \le m-1 \\ \lambda p_0 = \lambda p_{m-1} \end{array}\right\} \Rightarrow p_n = \sigma\tau\alpha\theta, \quad 0 \le n \le m-1$$

$$p_n = 1/m, \quad 0 \le n \le m-1$$

Μακροπρόθεσμος ρυθμός κόστους $= c(q) = \sum_n p_n c(n) + \sum_n \sum_{l \neq n} p_n q_{nl} d(n,l)$

$c(n) = h \cdot n, \; n \geq 0$

$d(m-1, 0) = K + km$, όλα τα άλλα $d(n,l) = 0$

Άρα, $c(q) = \sum_{n=0}^{m-1} \frac{1}{m} h \cdot n + \frac{1}{m} \lambda (K + km) = \cancel{\frac{1}{m}} h \frac{(m-1) \cdot \cancel{m}}{2} + \frac{1}{m} \lambda (K + km)$

$$= \frac{\lambda K}{m} + \lambda k + \frac{h(m-1)}{2}$$

(Το έχουμε βελτιστοποιήσει στην ανανεωτική θεωρία)

## 3. Πρόβλημα Συντήρησης - Αντικατάστασης Μηχανήματος

Μηχάνημα που επιθεωρείται στην αρχή κάθε μέρας

Δυνατές καταστάσεις: 0, 1, 2 ...

καλύτερη

Αποφ. | κατ = i → συντήρηση $b(i)$ (κόστος)
→ αντικατάσταση $b(i) + r$ (κόστος)

Επομ. κατ. | κατ = i, αποφ → j, αποφ = συντήρηση με πιθ $g_i(j)$
→ 0, αποφ = αντικ.

Συνήθης υπόθεση

$T_i$: επόμενη καταστ. όταν η τρέχουσα είναι $i$ και αποφ = συντήρηση
$(Pr[T_i = j] = g_i(j),\ j \geq 0)$

$T_i \leq_{st} T_{i+1},\ i \geq 0$

↳ στοχ. αύξουσα

$X \leq_{st} Y \Leftrightarrow Pr[X>x] \leq Pr[Y>x],\ \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow E[f(X)] \leq E[f(Y)],\ \forall f$ αύξουσα που $\exists E$

$\Leftrightarrow \exists (\tilde{X}, \tilde{Y})$ με $\tilde{X} \overset{d}{=} \tilde{Y},\ \tilde{Y} \overset{d}{=} Y$ ώστε $Pr[\tilde{X} \leq \tilde{Y}] = 1$

Έστω ότι ακολουθείται η πολιτική κάτω φλοιού

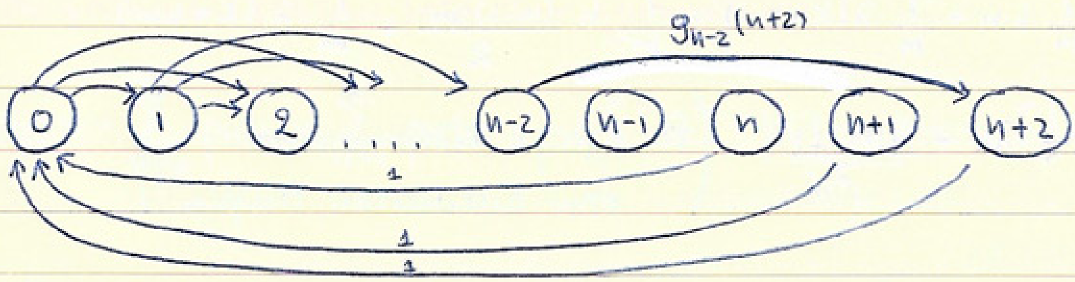
Συντήρησε $\Leftrightarrow$ Τρέχουσα καταστ. $i \leq n-1$

Αντικατέστησε $\Leftrightarrow$ -//- $i \geq n$

Μέσο κόστος ανά χρον. μονάδα υπό την πολιτική $(n) = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i(n) c(i) + \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \pi_i(n) p_{ij}(n) d(i,j)$

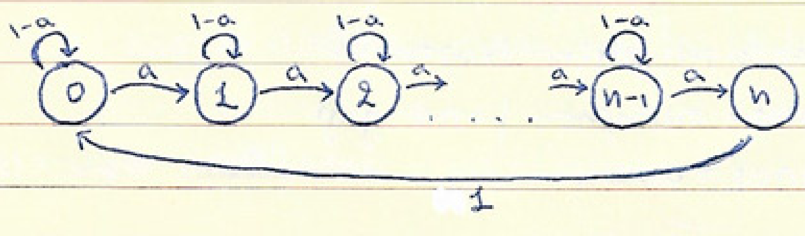
$\pi_i(n)$: στασ. πιθ. της κατάστασης $i$ υπό την πολιτική $n$

$p_{ij}(n)$: πιθ. μετάβασης $i \to j$ -//-




## Ειδική Περίπτωση

$$g_i(j) = \begin{cases} 1-a, & j=i \\ a, & j=i+1 \end{cases} \quad a \in (0,1),\ b(i) = 1-b^i,\ b \in (0,1)$$



$$\left.\begin{array}{l}\pi_0=(1-a)\pi_0+\pi_n\\ \pi_i=a\pi_{i-1}+(1-a)\pi_i,\ 1\le i\le n-1\\ \pi_n=a\pi_{n-1}\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\pi_0=\pi_1=\dots=\pi_{n-1}=\text{σταθ.}\\ \pi_n=a\cdot\end{array}$$

Τελικά, $\pi_n = \dfrac{a}{n+a}$

$\pi_0=\pi_1=\dots=\pi_{n-1}= 1/n+a$

$c(i)=b(i)=1-b^i,\ 0\le i\le n$

$d(n,0)=r$

Τα υπόλοιπα $d(\cdot,\cdot)=0$

Άρα, $c(n)=$ Μέσο κόστος ανά χρον. μονάδα υπό την πολιτική του $n$ $= \sum_{i=0}^{n-1} \dfrac{1}{n+a}(1-b^i)+\dfrac{a}{n+a}(1-b^n)+\dfrac{a}{n+a}\cdot 1\cdot r = \dots$

4. Έλεγχος αποθέματος υπό την πολιτική $(s,S)$

Αποθ -> επιθ. στην αρχή κάθε μέρας

Ζήτηση την μέρα $n$ = $D_n$ διακριτή τμ γνωστή με $P_D(i)>0,\ 0\le i\le S$

Ύψος αποθέματος στο τέλος της μέρας $n$: $X_n$

Πολιτική αναπλ.: $(s,S)$

Όταν πέσει το αποθ. $\le s$ παραγγέλνω $S$-αποθ.

$p$ -> κόστος έλλειψης ανά μοναδ. προϊόντος

$h$ -> κόστος αποθήκευσης ανά μοναδ. προϊόντος & χρον. μονάδα

$c$ -> κόστος αγοράς ανά μον. προϊόντος

$K$ -> πάγιο κόστος παραγγελίας

Αρχή περιόδου Ζήτηση -> Ικανοπ. Ζήτησης -> Αποθ. / Έλλειψη

Τέλος περιόδου, Αναπαραγγελία -> Άμεση Παράδοση

$\uparrow$
$X_n$

$g(s,S)$ = μέσο κόστος ανά χρον. μονάδα υπό την $(s,S)$

$$=\sum_{i=0}^{S}\pi_i c(i)+\sum_{i=0}^{S}\sum_{j=0}^{S}\pi_i p_{ij} d(i,j)$$

$$X_{n+1}=\begin{cases}(S-D_{n+1})^+, & X_n<s\\ (X_n-D_{n+1})^+, & X_n\ge s\end{cases}$$

Αν $D<i$ δηλ.
έχω αποθήκευση

Αν $D>i$ δηλ.
έχω έλλειψη

$$c(i) = h \cdot E[(i-D)^+] + p \cdot E[(i-D)^-]$$

$$d(i,j) = \begin{cases} 0, & s<i\leq S \\ K+c(S-i), & i\leq s \end{cases}$$