Αν D<i δηλ. έχω αποθήκευση

Αν D>i δηλ. έχω έλλειψη

$c(i) = h\cdot E[(i-D)^+] + p\cdot E[(i-D)^-]$

$d(i,j) = \begin{cases} 0, & s<i\le S \\ K+c(S-i), & i\le s \end{cases}$

Μάθημα 12ο (13/11/18)

Ασκήσεις Κεφ 3ο (σελ 44-46)

4) Αποθήκη

X_n = απόθεμα στην αρχή της περιόδου n

$X_1 = S > 0$

Y_n = ζήτηση την περίοδο n

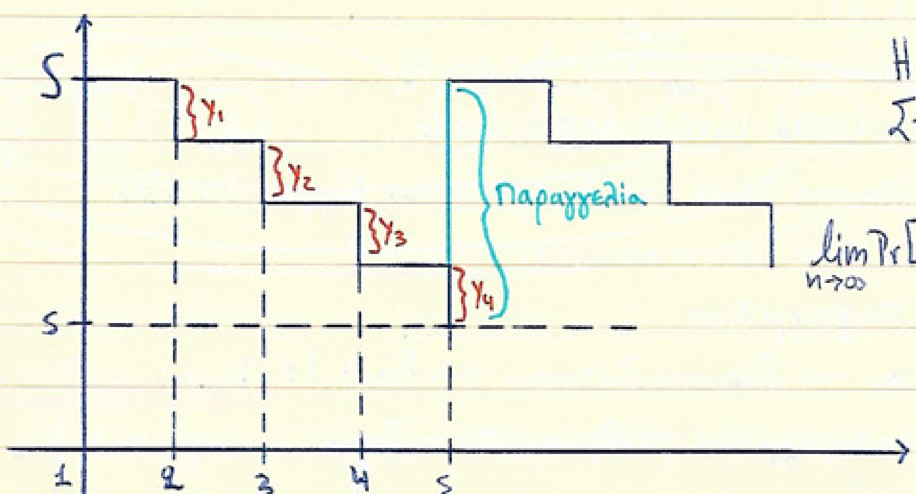
$Y_1, Y_2 \ldots \sim F_Y(x)$ ανεξ

Απόθεμα<s ⟺ Αναπαραγγελία μέχρι S (άμεση παράδοση)

Νδο $\lim_{n\to\infty} Pr[X_n \ge x] = \dfrac{1+m_Y(S-x)}{1+m_Y(S-s)}$, $s\le x\le S$

$m_Y(x)$: αναν. συναρτ. για αναν. διαδ. με ενδιαμ. χρόνους $Y_1, Y_2 \ldots$

Λύση



Η $\{X_n\}$ είναι αναγεννητική

Στιγμές αναγεν. = Στιγμές αναπαρ.

$\lim_{n\to\infty} Pr[X_n \ge x] = \lim_{n\to\infty} \dfrac{E\left[\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_k \ge x\}}\right]}{n}$

$C(n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_k \ge x\}}$ διαδ. αμοιβής

T_n = διάρκεια n-οστού κύκλου

$C_n = C(n) - C(n-1)$: κόστος στον n-οστό κύκλο

$(T_n, C_n), n\ge 1$ ανεξ & ισον.

ΣΑΘΚ εφαρμόσιμο

$$\lim_{n\to\infty} Pr[X_n \geq x] = \frac{E[C_n]}{E[T_n]}$$

$T_n = \min\{n \geq 1 : S - Y_1 - Y_2 - \ldots - Y_n < s\} = \min\{n\geq 1 : S - s < \underbrace{Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n}\}$

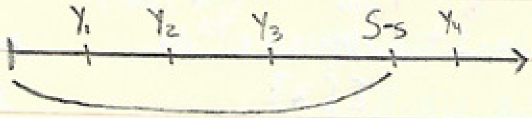
$= 1 + \#$ γεγ. σε χρόνο $S-s$ σε ανανεωτική διαδ. με ενδιάμ. χρόνους Y_i

Ενδιάμ. χρόνοι μιας αναν. διαδ.

$\max\{n\geq 1 : S-s \geq Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n\} \rightsquigarrow \#$ γεγ. που γίνανε στο $S-s$

$\min\{n \geq 1 : S-s < Y_1 + Y_1 + \ldots + Y_n\} \rightsquigarrow$ το 1ο n που αλλάζει η φορά

δηλ. $\#$ γεγ. στο $S-s+1$



$E[T_n] = 1 + m_Y(S-s)$

$C_n = \min\{n\geq 1 : S - Y_1 - Y_2 \ldots - Y_n < x\}$, οπότε ομοίως $E[C_n] = 1 + m_Y(S-x)$

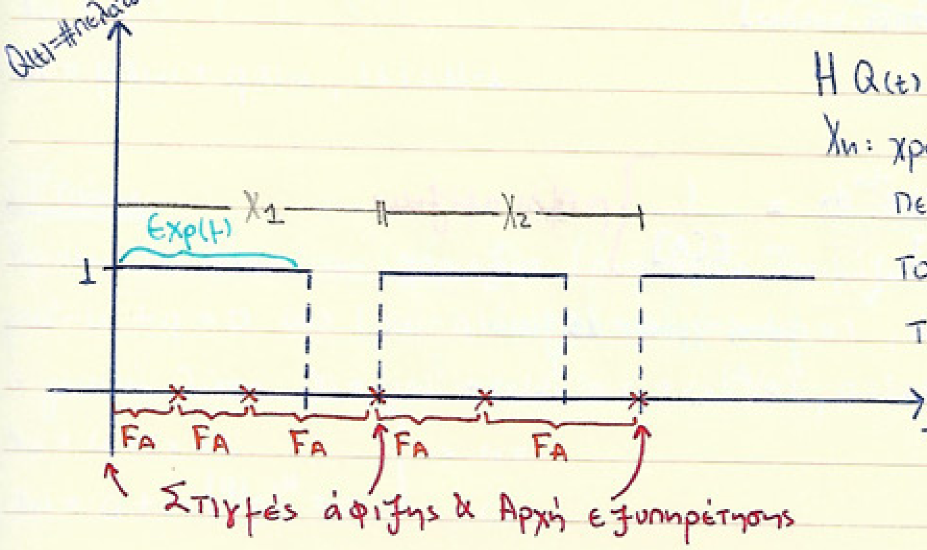
6) Αναν. διαδ. αφίξεων πελατών με κατανομή ενδιάμ. χρόνων $F_A(x)$

1 υπάλληλος

$Exp(\mu)$ χρόνοι εξυπηρ.

Χωρητικότητα 1 (αν πελάτης βρει τον υπηρ. απασχ. φεύγει για πάντα)

Μακροπρόθεσμο μέσο ποσοστό χαμένων πελατών



Η $Q(t)$ είναι αναγεν. με κύκλους.

X_n: χρόνος από τη n-οστή άφιξη πελάτη σε κενό σύστημα μέχρι τον επόμενο πελάτη που βρίσκει το σύστημα κενό

$$\text{Μακροπρόθεσμος μέσος ρυθμός χαμένων πελατών} = \lim_{t\to\infty} \frac{E[\overset{\#\text{χαμ. πελ. στο } [0,t]}{C(t)}]}{t} \overset{\text{ΣΑΘΚ}}{=} \frac{\overbrace{E[C]}^{\text{μέσος αριθμός χαμ. πελ. σε έναν κύκλο}}}{\underbrace{E[X]}_{\text{μέση διάρκεια κύκλου}}}$$

$E[C] = E[N(Y)]$, όπου $\{N(t)\}$ η διαδ. των αφίξεων $Y \sim Exp(\mu)$

$$E[N(Y)] = \int_0^\infty \underbrace{E[N(Y)\,\cancel{|\,Y=y}]}_{E[N(Y)] = m_A(y)} \mu \cdot e^{-\mu y}\, dx \qquad N(Y),\ Y \text{ ανεξ.}$$

Άρα, μακροπρόθεσμος μέσος ρυθμός χαμ. πελ. $= \dfrac{\int_0^\infty m_A(y)\mu e^{-\mu y} dy}{E[X]}$

Ομοίως, μακρ. μέσος ρυθμός αφικνούμενων πελ. $= \dfrac{\overset{\text{αυτός που εξυπηρετήθηκε}}{1} + \overbrace{\int_0^\infty m_A(y)\mu e^{-\mu y} dy}^{\text{πόσοι έφυγαν}}}{E[X]}$

Μακρ. μέσο ποσοστό χαμ. πελ $= \dfrac{\int_0^\infty m_A(y)\mu e^{-\mu y} dy}{1 + \int_0^\infty m_A(y)\mu e^{-\mu y} dy}$

5) Όμοια με την 6, αλλά ενδιάμ. χρόνοι αφίξεων $\sim Exp(\lambda)$

χρόνοι εξυπ $\sim F_X(x)$

(πιο εύκολη)

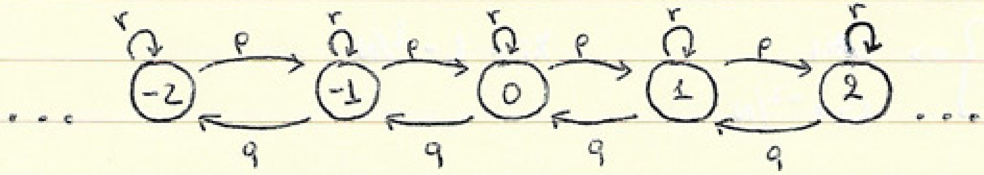
$$\text{Μακροπ. ποσοστό χαμ. πελ} = \frac{\dfrac{\lambda E[X]}{\cancel{E[\text{διαρκ. κύκλου}]}}}{\dfrac{1+\lambda E[X]}{\cancel{E[\text{διαρκ. κύκλου}]}}} = \frac{\lambda E[X]}{1+\lambda E[X]}$$

στην 6 (χρόνος εξυπ.)

$$\text{Μακροπρ. ρυθμός αφικνούμενων πελ.} = \frac{1 + \int_0^\infty m_A(x)\mu e^{-\mu x} dx}{E[X]} = \left.\frac{1}{\underbrace{E[A]}_{\text{μέσος χρόνος αφίξεων}}}\right\} \text{ρυθμός αφίξεων}$$

Ασκήσεις κεφ 4: (σελ 66-69)

2)



$p+q+r=1$

#μεταθ. 3 συμβόλων

1ο → k, 2ο → k, 3ο → n-2k φορές

$$p_{ii}^{(n)} = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{n!}{k!\,k!\,(n-2k)!} \underbrace{p^k q^k r^{n-k}}$$

$$\binom{n}{k}\binom{n-k}{k}$$

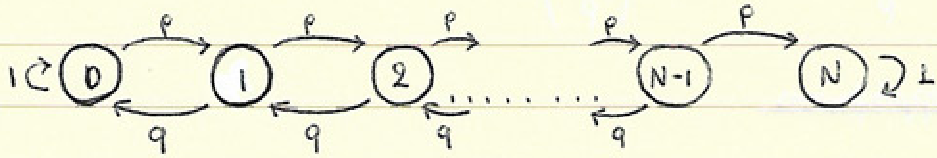
#δεξιά μεταβ.

$\bullet \longrightarrow \bullet + 1$

$\left(\begin{array}{l} n=5 \\ k=1 \end{array} \quad \text{1 δεξ}, \ \text{1 αριστ}, \ \text{3 στο ίδιο} \right)$

Πιθ. κάθε μονοπατιού που σε n μεταβάσεις ξεκινάω από την i επιστρέφω στην i με k δεξιά βήματα

6)



$T = \min\{n \geq 0 : X_n = 0 \text{ ή } N\}$

$q \neq p \quad Pr[X_T = 0] = ??$

$x_i = Pr[X_T = 0 \mid X_0 = i]$

$x_0 = 1$

$x_N = 0$

$x_i = p\,x_{i+1} + q\,x_{i-1}, \ 1 \leq i \leq N-1$

1ος Τρόπος

Βρίσκω τις λύσεις της χαρ. εξίσ. (ουσιαστικά δοκιμάζω λύσεις $x_i = \omega^i$)

$p\omega^2 - \omega + q = 0 \iff (p\omega - q)(\omega - 1) = 0 \iff \omega_1 = 1, \ \omega_2 = q/p$ (Αν είχα $\omega_1 = \omega_2 = 1$ $(p=q)$ δοκιμάζω λύσεις $i\omega^i$)

Η γενική λύση $x_i = c_1\omega_1^i + c_2\omega_2^i = c_1 + c_2 (q/p)^i, \ 0 \leq i \leq N$

$$\left. \begin{array}{l} x_0 = c_1 + c_2 = 1 \\ x_N = c_1 + c_2 (q/p)^N = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} c_1 = \ldots \\ c_2 = \ldots \end{array}$$

Για $p=q=1/2$, $w_1=w_2=1$

$$x_i = c_1 w_1^i + c_2 i w_2^i = c_1 + i c_2$$

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= c_1 + c_2\cdot 0 = 1 \\ x_N &= c_1 + c_2\cdot N = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} c_1 &= 1 \\ c_2 &= -1/N \end{aligned} \qquad x_i = 1 - i/N$$

2ος Τρόπος

$x_0 = 1$

$$\begin{cases} x_i = p x_{i+1} + q x_{i-1}, & 1 \le i \le N \\ x_N = 0 \end{cases}$$

επειδή $p+q=1$ μπορώ να ρίξω την τάξη

$$(p+q)x_i = p x_{i+1} + q x_{i-1}$$

$$p(x_i - x_{i+1}) = q(x_{i-1} - x_i)$$

$$d_i = x_i - x_{i+1} \Rightarrow d_i = \frac{q}{p} d_{i-1} \Rightarrow d_i = \left(\frac{q}{p}\right)^i d_0 \ldots$$

Για μέσους χρόνους απορρόφησης

$y_0 = 0$

$$y_i = 1 + p y_{i+1} + q y_{i-1}, \ 1 \le i \le N \xrightarrow[\text{τάξη}]{\text{ρίχνω}} (p+q) y_i = 1 + p y_{i+1} + q y_{i-1}$$

$$p\underbrace{(y_i - y_{i+1})}_{d_i} = 1 + q\underbrace{(y_{i-1} - y_i)}_{d_{i-1}}$$

$$d_i = 1/p + q/p \cdot d_{i-1}, \quad 1 \le i \le N$$

$$d_i = \frac{1}{p} + \frac{q}{p}\cdot\frac{1}{p} + \frac{q}{p}\frac{q}{p} d_{i-2} = \ldots = \frac{1}{p}\left[1 + \frac{q}{p} + \ldots + \left(\frac{q}{p}\right)^{i-1}\right] + \left(\frac{q}{p}\right)^i d_0$$

$$d_i = \frac{1}{p}\,\frac{1-(q/p)^i}{1-q/p} + \left(\frac{q}{p}\right)^i d_0$$

$$\sum_{i=0}^{N-1} d_i = y_0 - y_N = 0 \Rightarrow \frac{1}{p-q}\sum_{i=0}^{N-1}\left(1 - \left(\frac{q}{p}\right)^i\right) + \frac{1-(q/p)^N}{1-q/p} d_0 = 0$$

$$\Rightarrow d_0 = \ldots \Rightarrow d_i = \ldots \quad 1 \le i \le N-1$$

$$y_j = -\sum_{i=0}^{j-1} d_i$$

Για $p=q=1/2$

$$d_i = 1/p + d_{i-1}$$

$$E[T \mid X_0 = i] = i(N-i)$$