Απόδειξη

Επαγωγή στο n

$n=0$ $\quad U_0^{\pi^*}(h_0) = U_0^*(x_0) = V_0(x_0) = c(x_0;0)$

εξ. ορισμού $\quad$ πρόταση $\quad$ άμεσο

Έστω ότι ισχύει για $n-1$ $\quad U_{n-1}^{\pi^*}(h_{n-1}) = U_{n-1}^*(x_{n-1}) = V_{n-1}(x_{n-1})$

Έχω $h_n = x_t a_t \dots x_{n+1} a_{n+1} x_n$

$$U_n^{\pi^*}(h_n) = \sum_{a_n} \pi^*_{h_n}(a_n;a)\Big(c(x_n,a_n;n) + \sum_{x_{n-1}} P_{x_n x_{n-1}}(a_n;n)\underbrace{U_{n-1}^{\pi^*}(h_n a_n x_{n-1})}_{\text{επαγ. υποθ.}}\Big)$$

$$U_{n-1}^*(x_{n-1}) = V_{n-1}(x_{n-1})$$

Άρα, $U_n^{\pi^*}(h_n) = c(x_n, a_n^*(x_n);n) + \sum_{x_{n-1}} P_{x_n x_{n-1}}(a_n^*(x_n);n)\underbrace{U_{n-1}^{\pi^*}(h_n a_n^*(x_n) x_{n-1})}_{U_{n-1}^*(x_{n-1}) = V_{n-1}(x_{n-1})}$

Άρα, $U_n^{\pi^*}(h_n) = U_n^*(x_n)$ (λόγω της 2ης ισότητας του ορ. της $U_n^*(x_n)$)

Επίσης, $V_n(x_n) = \inf_{\pi, x_t \dots x_{n+1}, a_{n+1}} U_n^\pi(x_t a_t \dots x_{n+1} a_{n+1} x_n) \le U^{\pi^*}(h_n)$

$$= c(x_n, a_n^*(x_n);n) + \sum_{x_{n-1}} P_{x_n x_{n-1}}(a_n^*(x_n);n) V_{n-1}(x_{n-1})$$

$$= \min\Big(c(x_n,a_n;n) + \sum_{x_{n-1}} P_{x_n x_{n-1}}(a_n;n) V_{n-1}(x_{n-1})\Big)$$

Από λήμμα & τελευταία ισότητα $\Rightarrow V_n(x_n) = \min\Big(c(x_n,a_n;n) + \sum_{x_{n-1}} P_{x_n x_{n-1}}(a_n;n) V_{n-1}(x_{n-1})\Big)$

Άρα, $U_n^*(x_n) = V_n(x_n)$

Μάθημα 15ο (26/11/18)

Εφαρμογές Λύσεων Προβλημάτων ΕΕ με Δ.Π - επαγωγικά επιχειρ.

1. Μοντέλο κατανάλωσης - επένδυσης

Κεφάλαιο $\rightarrow$ Αποδίδει ετήσιο εισόδημα x

Απόφαση $\rightarrow$ ετήσια κατανάλωση a

Ετήσιο εισόδημα x, Ετήσια κατανάλωση a $\Big\} \Rightarrow$ επόμενο ετήσιο εισόδημα $x + \underset{\text{επιτόκιο}}{\theta}(x-a)$

Σκοπός: Μεγιστοποίηση συνολικής κατανάλωσης σε t χρόνια

Μοντελοποίηση ως Δ.Π

Στάδιο n: απομένουν n χρόνια

Κατάσταση x: ετήσιο εισόδημα

Απόφαση a: ετήσια κατανάλωση

Δυναμική Συστήματος: $x \xrightarrow{a} x+\theta(x-a)$

Άμεσο κέρδος: $c(x,a) = a$

Τερματικό κέρδος: $c(x) = 0$

Εξισώσεις Βελτιστοποίησης

$V_n(x)$ = Συνάρτηση βέλτιστης τιμής = Υπολειπόμενη συνολική κατανάλωση για τα επόμενα n χρόνια αν το ετήσιο εισόδημα για τον 1ο χρόνο είναι x

$V_0(x) = 0 \ , \ x \geq 0$

$V_n(x) = \max_{a \in [0,x]} [a + V_{n-1}(x+\theta(x-a))] \ , \ x \geq 0 \ , \ n=1,2\ldots$

Λύση

$n=0$: $V_0(x) = 0 \ , \ x \geq 0$

$n=1$: $V_1(x) = \max_{a\in[0,x]} [a] = x \ , \ x \geq 0$

$a_1^*(x) = x \ , \ x \geq 0$

Αν μένει 1 χρονιά δεν έχει νόημα να αποταμιεύσω το τρώω όλο

$n=2$: $V_2(x) = \max_{a\in[0,x]} [a + V_1(x+\theta(x-a))] = \max_{a\in[0,x]} [a+x+\theta(x-a)] = (1+\theta)x + \max_{a\in[0,x]} [(1-\theta)a]$

$\underset{\text{παίρνεται στα άκρα}}{\overset{\text{γραμμ} \Rightarrow \text{το max}}{=}} (1+\theta)x + \max_{a\in[0,x]} [(1-\theta)a] = \begin{cases} (1+\theta)x \ , & \theta \geq 1 \\ 2x \ , & \theta \leq 1 \end{cases} = (1+\max[\theta,1])\,x$

$a_2^*(x) = \begin{cases} 0 \ , & \theta \geq 1 \\ x \ , & \theta \leq 1 \end{cases}$ αν επιτόκιο ≤ 1 το τρώω όλο

Εικασία: $V_n(x) = p_n x \ , \ x \geq 0 \ , \ n=1,2\ldots$ (είναι κάτι γραμμικό)

$a_n^*(x) = \begin{cases} 0 \ , & ? \\ x \ , & ? \end{cases}$

Απόδειξη

$n=0$: $V_0(x) = 0 = p_0 \cdot x \ , \ x \geq 0$ OK

$n=1: \; V_1(x) = x = \overset{=1}{p_1} \cdot x \,, \; x \geq 0$ Ok

$n=2: \; V_2(x) = \underbrace{(1+\max[\theta,1])}_{p_2} \cdot x \,, \; x \geq 0$ Ok

Έστω ότι ισχύει για $n-1$. Θ.δ.ο ισχύει για n

$$V_n(x) = \max_{a\in[0,x]} [a + p_{n-1}(x+\theta(x-a))] = p_{n-1}(1+\theta)x + \max_{a\in[0,x]} [(1-\theta p_{n-1})a]$$

$$= p_{n-1}(1+\theta)x + \max_{a\in[0,x]} [(1-\theta p_{n-1})a] = \begin{cases} p_{n-1}(1+\theta)x \,, & \theta p_{n-1} \geq 1 \\ p_{n-1}(1+\theta)a + (1+\theta p_{n-1})x \,, & \theta p_{n-1} \leq 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} p_{n-1}(1+\theta)x \,, & \theta p_{n-1} \geq 1 \\ (p_{n-1}+1)x \,, & \theta p_{n-1} \leq 1 \end{cases} = \underbrace{(p_{n-1} + \max[1, \theta p_{n-1}])}_{p_n} x$$

και $a_n^*(x) = \begin{cases} 0 \,, & \theta p_{n-1} \geq 1 \\ x \,, & \theta p_{n-1} \leq 1 \end{cases}$

Θεώρημα

$V_n(x) = p_n x \,, \; x \geq 0 \,, \; n = 1,2\dots$ όπου

$p_0 = 0$

$p_n = p_{n-1} + \max[1, \theta p_{n-1}] \,, \; n = 1,2\dots$

και

$a_n^*(x) = \begin{cases} 0, & \theta p_{n-1} \geq 1 \\ x, & \theta p_{n-1} \leq 1 \end{cases}$

<u>Τελική μορφή βέλτιστης πολιτικής</u>

$p_n \uparrow$ επομένως $p_0 < p_1 < p_2 < \dots < \underset{\text{ξοδεύω}}{p_{n^*-1}} < 1/\theta \leq \underset{\text{αποταμιεύω}}{p_{n^*}} < p_{n^*+1}$

Έστω $n^* = \min\{n : p_n \geq 1/\theta\}$

Η βέλτιστη πολιτική είναι: $\begin{cases} \text{κατανάλωσε όλο το ετήσιο εισόδημα} \iff n < n^* \\ \text{επένδυσε} \quad -\text{''}- \quad \iff n \geq n^* \end{cases}$

Έχουμε για $n = 1,2,\dots n^*$ $\; p_n = p_{n-1} + \overset{\max[1,\theta p_{n-1}]}{1} \Rightarrow p_n = n$

για $n = n^*+1, n^*+2, \dots$ $\; p_n = p_n(1+1) \Rightarrow p_n = (1+\theta)^{n-n^*} p_{n^*} = (1+\theta)^{n-n^*} \cdot n^*$

$p_n = \begin{cases} n, & n \leq n^* \\ (1+\theta)^{n-n^*} \cdot n^*, & n > n^*+1 \end{cases}$ και $n^* = \left\lceil \frac{1}{\theta} \right\rceil$ ο πρώτος ακέραιος που ξεπερνά το $1/\theta$

$$a_n^*(x) = \begin{cases} 0, & n \geq n^*+1 \\ x, & n \leq n^* \end{cases}$$

bang-bang policy <=> Σκαλοπάτι στο οποίο περνάω από τη μια ακραία απόφαση στην άλλη

2. Πρόβλημα κατανομής πόρων σε δραστηριότητες

t δραστηριότητες

y διαθέσιμη ποσότητα πόρου

a_n ποσότητα πόρου που διατίθεται για τη δραστηριότητα n

↓

$r_n(a_n)$ όφελος

Πρόβλημα: κατανομή του y στις δραστηριότητες ώστε να μεγιστοποιήσω το συνολικό όφελος

<u>Μοντελοποίηση ως Π.Μ-Γ.Π</u>

$$\max_{a_1,a_2\ldots a_t} \sum_{n=1}^{t} r_n(a_n) \quad \text{υπό} \quad \sum_{n=1}^{t} a_n \leq y, \quad a_n \geq 0, \quad n=1,2\ldots t$$

<u>Μοντελοποίηση ως Δ.Π</u>

Ακολουθιακή κατανομή του πόρου στις δραστηριότητες

Στάδιο: n = # των δραστηρ. που απομένουν

Κατάσταση: x = υπολειπόμενη ποσότητα πόρου για τις υπόλ. δραστ.

Απόφαση: a = ποσότητα πόρων για την τρέχουσα δραστ.

Δυναμική: $x \xrightarrow{a} x-a$

Δομή κόστους: $c(x,a;n) = r_n(a)$

$c(x,0) = 0$

<u>Εξίσωση Βελτιστοποίησης</u>

$V_n(x)$ = Συνάρτηση βέλτιστης τιμής = Βέλτιστη υπολειπ. συνολική ωφέλεια από κατανάλωση x μονάδων του πόρου n: υπολ. δραστ.

$V_0(x) = 0 \quad , \; 0 \le x \le y$

$V_n(x) = \max\limits_{a \in [0,x]} [r_n(a) + V_{n-1}(x-a)] \; , \; x \geq 0 \; , \; n=1,2,\dots$

<u>Λύση για συμμετρική - κυρτή περίπτωση</u>

$\underbrace{r_n(x) = r(x)}_{\text{συμμετρική}} \; : \; r(0) = 0$

r γν. αυξ

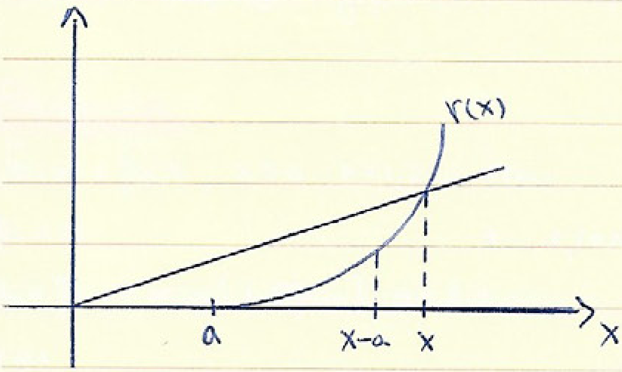
r γν. κυρτή

$V_0(x) = 0 \; , \; 0 \le x \le y$

$V_1(x) = \max\limits_{a \in [0,x]} [r(a)] = r(x)$

$a_1^*(x) = x$

$V_2(x) = \max\limits_{a \in [0,x]} [r(a) + r(x-a)]$



Εδώ βελτιστοποιείται στο $a=0$ ή x

$r(a) = r\left((1 - a/x) \cdot 0 + a/x \cdot x\right) \overset{\text{κυρτή}}{\le} (1 - a/x)\, r(0) + a/x \; r(x)$

$r(x-a) = r\left(a/x \cdot 0 + (1 - a/x) \cdot x\right) \le a/x \cdot r(0) + (1 - a/x)\, r(x)$

$r(a) + r(x-a) \le r(0) + r(x)$

$V_2(x) = r(0) + r(x)$

$a_2^*(x) = 0$ ή x

<u>Βέλτιστη πολιτική για συμμ-κυρτή περ.</u>

$V_0(x) = 0 \; , \; x \geq 0$

$V_n(x) = r(x) \; , \; x \geq 0 \; , \; n=1,2,\dots$

$a_1^*(x) = x \; , \; x \geq 0$

$a_n^*(x) = 0$ ή $x \; , \; x \geq 0 \; , \; n=1,2,\dots$

Σε 1 δραστηριότητα όλος ο πόρος

Λύση για συμ-κοίλη περ.

$V_n(x) = r(x)$: $r(0) = 0$

r γν. αυξ.

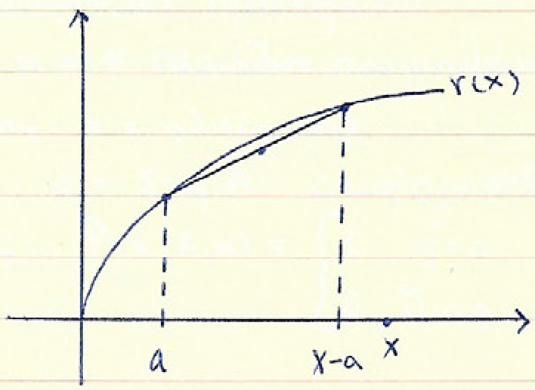
r γν. κοίλη

$V_0(x) = 0 \quad , 0 \le x \le y$

$V_1(x) = \max\limits_{a \in [0,x]} [r(a)] = r(x)$

$a_1^*(x) = x$

$V_2(x) = \max\limits_{a \in [0,x]} [r(a) + r(x-a)]$



Εδώ βελτιστοποιείται στο $a = x/2$

$\frac{1}{2} r(a) + \frac{1}{2} r(x-a) \overset{\text{κοίλη}}{\le} r\left(\frac{1}{2} a + \frac{1}{2}(x-a)\right) = r(x/2) \Rightarrow r(a) + r(x-a) \le 2r(x/2)$

$V_2(x) = 2r(x/2)$

$a_2^*(x) = x/2$

Βέλτιστη πολιτική για συμ. κοίλη περίπτωση

Θεώρημα

$V_0(x) = 0 \quad , x \ge 0$

$V_n(x) = n \cdot r(x/n) \quad , x \ge 0 \quad , n = 1, 2 \ldots$

$a_n^*(x) = x/n \quad , x \ge 0$

Απόδειξη

$n = 0$ ok

$n=1$ ok

$n=2$ ok

Έστω ότι ισχύει για $n-1$: $V_{n-1}(x) = (n-1)\,r(x/_{n-1})$, $x \geq 0$

Θ.δ.ο ισχύει για n — για να τα δω ως κυρτό συνδυασμό διαιρώ με $1+(n-1)$

$$V_n(x) = \max_{a\in[0,x]} \left[r(a) + V_{n-1}(x-a)\right] = \max_{a\in[0,x]} \left[1\,r(a) + (n-1)\,r\left(\tfrac{x-a}{n-1}\right)\right]$$

Θ.δ.ο το max πιάνεται στο $a = x/n$

Έχω $\frac{1}{n}\cdot r(a) + \frac{n-1}{n}\, r\left(\frac{x-a}{n-1}\right) \overset{\text{κοίλη}}{\leq} r\left(\frac{1}{n}a + \frac{\cancel{n-1}}{n}\cdot\frac{x-a}{\cancel{n-1}}\right) = r\left(\frac{x}{n}\right)$

$$\Rightarrow r(a) + (n-1)\,r\left(\tfrac{x-a}{n-1}\right) \leq n\cdot r(x/n) \qquad \Rightarrow V_n(x) = n\,r(x/n)$$

$$n\cdot r(x/n) = r(x/n) + (n-1)\,r\left(\frac{x - x/n}{n-1}\right)$$

ή

$r(a) + (n-1)\,r\left(\frac{x-a}{n-1}\right)$

θέλω να μεγιστοποιήσω τη βλέπω συνάρτηση του a

$r'(a) - \frac{(n-1)}{n-1}\, r'\left(\frac{x-a}{n-1}\right) = 0 \Rightarrow a = \frac{x}{n}$

} πιο ασθενές

Μάθημα 16ο (29/11/18)

~ Εφαρμογές ΔΠ για προβλήματα Ε.Ε με στοχαστική δυναμική ~

1. Πρόβλημα προληπτικής συντήρησης - αντικατάστασης μηχανήματος

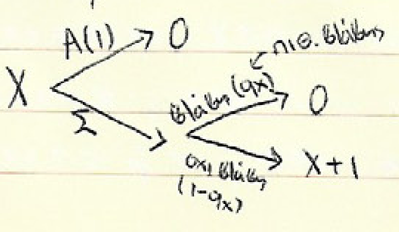
Μηχάνημα που επιθεωρείται στην αρχή κάθε χρον. περιόδου

κατάσταση → ηλικία x

απόφαση → συντήρηση (Σ) ή αντικατάσταση (A)

Προγραμματισμός για t περιόδους

Δυναμική



Κέρδος

A -> κέρδος λ

Σ -> κέρδος $h(x)$ αν δεν χαλάσει

κέρδος γ αν χαλάσει

Τερματικό κέρδος: $r(x)$

Υποθέσεις

(i) $\gamma < \lambda < h(x)$, $x = 0, 1 \dots$

(ii) $h(x) \downarrow$

(iii) $r(x) \downarrow$

(iv) $q_x \uparrow$

Μοντελοποίηση ως πρόβλημα ΔΠ

Στάδιο: n = # περιόδων που απομένουν

Κατάσταση: x = ηλικία μηχ.

Απόφαση: a = Σ ή A

Δυναμική: $P_{xy}(A,n) = \begin{cases} 1, & y=0 \text{ σίγουρη αντικατάσταση} \\ 0, & \text{διαφ} \end{cases}$ $\quad P_{xy}(\Sigma,n) = \begin{cases} 1-q_x, & y=x+1 \text{ να μη πάθει τίποτα} \\ q_x, & y=0 \text{ αντικατάσταση} \\ 0, & \text{διαφ} \end{cases}$

Κέρδος

$r(x,A;n) = \lambda$, $n \geq 1$

$r(x,\Sigma;n) = q_x\gamma + (1-q_x)h(x)$, $n \geq 1$

$r(x;0) = r(x)$

$\max[a,b] = a + \max[0, b-a]$

Εξισώσεις Βελτιστοποίησης

$V_n(x)$ = βέλτιστο συνολικό κέρδος αν υπολειπ. n περίοδοι και η τρέχουσα ηλικία μηχ $= x$

$V_0(x) = r(x)$

$V_n(x) = \max[\lambda + V_{n-1}(0),\ q_x(\gamma + V_{n-1}(0)) + (1-q_x)(h(x) + V_{n-1}(x+1)]$

$= \lambda + V_{n-1}(0) + \max[0,\ q_x\gamma + q_x V_{n-1}(0) + (1-q_x)h(x) + (1-q_x)V_{n-1}(x+1) - \lambda - V_{n-1}(0)]$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας θέτω $\gamma = 0$

$V_0(x) = r(x)$

$V_n(x) = \lambda + V_{n-1}(0) + \max[0,\ \underbrace{(1-q_x)(h(x) + V_{n-1}(x+1) - V_{n-1}(0)) - \lambda}_{U_n(x)}]$ (*)

Θεώρημα

$V_n(x) \downarrow \quad \forall n=0,1\ldots$

Εξαρτάται από στάδιο και ηλικία

Η βέλτιστη πολιτική είναι $a_n^*(x) = \begin{cases} \Sigma, & x \le c_n \\ A, & x \ge c_{n+1} \end{cases}$

Απόδειξη

$n=0 \quad V_0(x) = r(x) \downarrow$ ισχύει

Έστω ότι ισχύει για $n-1$ δηλαδή $V_{n-1}(x)\downarrow$

Θ.δ.ο ισχύει και για n, δηλαδή ότι $V_n(x-1) - V_n(x) \ge 0$, $x \ge 1$

Περίπτωση Ι: $U_n(x) \ge 0$, $U_n(x-1) \ge 0$

$$V_n(x-1) - V_n(x) = (1-q_{x-1})(h(x-1) + V_{n-1}(x) - V_{n-1}(0)) - (1-q_x)(h(x) + V_{n-1}(x+1) - V_{n-1}(0))$$

$h(x)\downarrow \Rightarrow h(x-1) \ge h(x)$

$$\ge (1-q_{x-1})(h(x) + V_{n-1}(x) - V_{n-1}(0)) - (1-q_x)(h(x) + V_{n-1}(x+1) - V_{n-1}(0))$$

$V_{n-1}(x)\downarrow \Rightarrow V_{n-1}(x) \ge V_{n-1}(x+1)$

$$= (q_x - q_{x-1})\underbrace{(h(x) + V_{n-1}(x+1) - V_{n-1}(0))}_{\frac{U_n(x)+\lambda}{1-q_x} \text{ από } (*)} \ge 0$$

Περίπτωση ΙΙ: $U_n(x-1) \ge 0$, $U_n(x) < 0$

$$V_n(x-1) - V_n(x) = \cancel{\lambda} + \cancel{V_{n-1}(0)} + U_n(x-1) - \cancel{\lambda} - \cancel{V_{n-1}(0)} \ge 0$$

Περίπτωση ΙΙΙ: $U_n(x-1) < 0$, $U_n(x) \ge 0$

Αδύνατη γιατί: $U_n(x) = \underbrace{(1-q_x)}_{\searrow}\underbrace{(h(x) + V_{n-1}(x+1) - \overset{\text{σταθ.}}{V_{n-1}(0)})}_{\searrow} - \overset{\text{σταθ}}{\lambda}$ είναι $\downarrow$ ως προς x

(γινόμενο θετ. φθινουσών => φθίνουσα)

Περίπτωση ΙV: $U_n(x-1) < 0$, $U_n(x) < 0$

$$V_n(x-1) - V_n(x) = \lambda + V_{n-1}(0) - \lambda - V_{n-1}(0) = 0 \ge 0$$

Άρα, σε κάθε περίπτωση $V_n(x)\downarrow$

Έχουμε $V_n(x)\downarrow$ και $U_n(x)\downarrow$

Άρα, $a_n^*(x) = \Sigma \iff U_n(x) \ge 0 \iff x \le c_n$

2. Ένα μοντέλο στοιχηματικής Πολιτικής

Παίκτης που παίζει σε διαδοχικούς γύρους τυχαιού παιχνιδιού (t γύρους)

$$\text{Σε κάθε γύρο} \begin{cases} \to \text{κερδίζει με πιθ. } p \\ \to \text{χάνει με πιθ. } q = 1-p \end{cases}$$

Απόφαση σε κάθε γύρο = κλάσμα της περιουσίας που θα στοιχηματίσει

Σκοπός: Μεγιστοποίηση της ωφέλειας από την τελική του περιουσία

$U(x)$: ≥ 0, $\uparrow$, κοίλη

$U(x) = \log x$

Μοντελοποίηση

Στάδιο: n = # γύρων που απομένουν

Κατάσταση: x = η τρέχουσα περιουσία

Απόφαση: a = ποσοστό της περιουσίας που θα στοιχηματίσει

Δυναμική

$$x \xrightarrow{a} \begin{cases} \xrightarrow{\text{κερδ.}(p)} x(1+a) \\ \xrightarrow[q=1-p]{\text{χάνει}} x(1-a) \end{cases}$$

κέρδος: $r(x;0) = \log x$

$r(x,a;n) = 0, \; n \geq 1$

Εξισώσεις Βελτιστοποίησης

$V_n(x)$ = Βέλτιστη ωφέλεια από την τελική περιουσία όταν η τρέχουσα είναι x και απομένουν n στοιχηματικοί γύροι

$V_0(x) = \log x$

$$V_n(x) = \max_{a \in [0,1]} \left[p V_{n-1}(x(1+a)) + q V_{n-1}(x(1-a)) \right]$$

Εύρεση Βέλτιστης Πολιτικής

$V_0(x) = \log(x)$

$$V_1(x) = \max_{a \in [0,1]} \left[p \log(x(1+a)) + q \log(x(1-a)) \right]$$

$$= \log x + \max_{a \in [0,1]} \underbrace{\left[p \log(1+a) + q \log(1-a) \right]}_{f(a)}$$

$$f'(a) = \frac{p}{1+a} + \frac{q}{1-a} = \frac{p(1-a)-q(1+a)}{(1+a)(1-a)} = \frac{p-q-a}{(1+a)(1-a)}$$

Άρα

$$\left.\begin{array}{lll} f'(0)=0 & \Leftrightarrow & a=p-q \\ f'(0)<0 & \Leftrightarrow & a>p-q \\ f'(0)>0 & \Leftrightarrow & a<p-q \end{array}\right\} \text{Άρα, το max πιάνεται στο} \begin{cases} a=p-q, & p\geq q \\ a=0, & p\leq q \end{cases}$$

Άρα

$a_1^*(x)=0$, αν $p\leq q \Rightarrow V_1(x)=\log x$

$a_1^*(x)=p-q$, αν $p>q \Rightarrow V_1(x) = \log x + p\log(1+p-q) + q\log(1-p+q)$

$$\overset{p+q=1}{=} \log x + p\log 2p + q\log 2q$$

$$= \log x + \underbrace{\log 2 + p\log p + q\log q}_{\text{σταθερό } c}$$

$$V_2(x) = \max_{a\in[0,1]}\left[pV_1(x(1+a)) + qV_1(x(1-a))\right] = \log x + c + \max_{a\in[0,1]} f(a)$$

$$= \log x + 2c \quad , \quad a_2^*(x) = a_1^*(x)$$

Θεώρημα

$p\leq q$: $V_n(x) = \log x$, $a_n^*(x)=0$, $n=0,1,\dots$, $x>0$

$p>q$: $V_n(x) = \log x + nc$, $a_n^*(x) = p-q$, $n=0,1,\dots$, $x>0$

όπου $c = \log 2 + p\log p + q\log q$

Εδώ βέλτιστη πολιτική είναι SD (στάσιμη ντετερμινιστική)