$$f'(a) = \frac{p}{1+a} + \frac{q}{1-a} = \frac{p(1-a)-q(1+a)}{(1+a)(1-a)} = \frac{p-q-a}{(1+a)(1-a)}$$

Άρα

$$\left.\begin{array}{l} f'(a)=0 \iff a=p-q \\ f'(a)<0 \iff a>p-q \\ f'(a)>0 \iff a<p-q \end{array}\right\} \text{Άρα, το max πιάνεται στο} \begin{cases} a=p-q, & p> \\ a=0, & p\le q \end{cases}$$

Άρα

$a_1^*(x)=0$, αν $p\le q \Rightarrow V_1(x)=\log x$

$a_1^*(x)=p-q$, αν $p>q \Rightarrow V_1(x)=\log x + p\log(1+p-q)+q\log(1-p+q)$

$$\overset{p+q=1}{=\!=} \log x + p\log 2p + q\log 2q$$

$$= \log x + \underbrace{\log 2 + p\log p + q\log q}_{\text{σταθερό } c}$$

$$V_2(x) = \max_{a\in[0,1]}\left[pV_1(x(1+a))+qV_1(x(1-a))\right] = \log x + c + \max_{a\in[0,1]} f(a)$$

$$= \log x + 2c \quad , \quad a_2^*(x)=a_1^*(x)$$

Θεώρημα

$p\le q$: $V_n(x)=\log x$, $a_n^*(x)=0$, $n=0,1,\dots$, $x>0$

$p>q$: $V_n(x)=\log x + nc$, $a_n^*(x)=p-q$, $n=0,1,\dots$, $x>0$

όπου $c=\log 2 + p\log p + q\log q$

Εδώ βέλτιστη πολιτική είναι SD (στάσιμη ντετερμινιστική)

Μάθημα 17º (4/12/18)

~ Προβλήματα που λύνονται με το επιχείρημα της ανταλλαγής ~

Βέλτιστη επιλογή διάταξης συγκεκριμένου συνόλου αποφάσεων

\# σταδίων = # δυνητικών αποφάσεων

κατάσταση = σύνολο διαθέσιμων αποφάσεων

1. Το πρόβλημα της ελαχιστοποίησης του συνολικού χρόνου παραμονής εργασιών

t εργασίες : $1,2\dots t$ με χρόνους εκτέλεσης $x_1, x_2, \dots, x_t$
Να διαταχθούν ώστε ο συνολικός χρόνος παραμονής να είναι ελάχιστος
Στάδιο n = Υπολειπόμενος αριθμός εργασιών
Κατάσταση $S \subseteq \{1,2\dots t\}$ = Σύνολο διαθέσιμων εργασιών

<u>Εξίσωση Βελτιστοποίησης</u>

$V(\phi)=0$

όσο διαρκεί η i_k όλες οι υπόλοιπες περιμένουν

$$V_n(\underbrace{\{i_1, i_2, \dots, i_n\}}_{S}) = \min_{1\le k\le n}\left[n\cdot x_{i_k} + V_{n-1}(S\setminus\{i_k\})\right]$$

$S=\{i_1, i_2, \dots, i_n\}$, $n=1,2\dots t$

<u>Λύση</u> (Προφανώς πρέπει να κάνω πρώτα αυτή που διαρκεί λιγότερο)

$V_0(\phi)=0$

$V_1(\{i\}) = x_i$, $a_1^*(\{i\})=1$

$V_2(\{i,j\}) = \min[2x_i + x_j, 2x_j + x_i] = x_i + x_j + \min[x_i, x_j] = 2x_i + x_j$, $x_i \le x_j$

$a_2^*(\{i,j\}) = i$, $x_i\le x_j$

<u>Θεώρημα</u>

$V_0(\phi)=0$

$V_n(\{i_1, i_2, \dots, i_n\}) = n\cdot x_{i_1} + (n-1)x_{i_2} + \dots + 1\cdot x_{i_n}$ με $x_{i_1}\le x_{i_2}\le\dots\le x_{i_n}$

$a_n^*(\{i_1, i_2\dots i_n\}) = i_1$

<u>Απόδειξη</u>

Για $n=0,1$ O.K ✓

Έστω ότι ισχύει για $n-1$ και θα δείξω ότι ισχύει για n

Έστω $\{i_1, i_2, \dots, i_n\}$ σύνολο n εργασιών με $x_{i_1}\le x_{i_2}\le\dots\le x_{i_n}$

Τότε, $V_n(\{i_1, i_2, \dots, i_n\}) \overset{\text{εξίσ. βελτ.}}{=} \min_{1\le k\le n}\left[n x_{i_k} + V_{n-1}(\{i_1, i_2, \dots, i_n\}\setminus\{i_k\})\right]$

$$\overset{\text{επαγ. υποθ.}}{=} \min_{1\le k\le n}\Big[n x_{i_k} + \underbrace{(n-1)x_{i_1} + (n-2)x_{i_2} + \dots + (n-k+1)x_{i_{k-1}} + (n-k)x_{i_{k+1}} + (n-k-1)x_{i_{k+2}} + \dots + x_{i_n}}_{f(k)}\Big]$$

Θ.δ.ο $f(k) \geq f(1) \iff n x_{i_k} + \sum_{j=1}^{k-1}(n-j)x_{ij} + \underbrace{\sum_{j=k+1}^{n}(n+1-j)x_{ij}} \geq n x_{i_1} + \underbrace{\sum_{j=2}^{n}(n+1-j)x_{ij}}$

$$\iff n x_{i_k} + \sum_{j=1}^{k-1}(n-j)x_{ij} \geq n x_{i_1} + \underbrace{\sum_{j=2}^{k}(n+1-j)x_{ij}}$$

$$\iff n x_{i_k} + (n-1)x_{i_1} + \sum_{j=2}^{k-1}(n-j)x_{ij} \geq n x_{i_1} + \sum_{j=2}^{k} x_{ij} + \underbrace{\sum_{j=2}^{k}(n-j)x_{ij}}_{\parallel}$$

$$\iff \cancel{n x_{i_k}} + (\cancel{n}-1)x_{i_1} + \cancel{\sum_{j=2}^{k-1}(n-j)x_{ij}} \geq \cancel{n x_{i_1}} + \sum_{j=2}^{k} x_{ij} + \cancel{\sum_{j=2}^{k-1}(n-j)x_{ij}} + (\cancel{n}-k)x_{ij}$$

$$\iff k \cdot x_{i_k} \geq \sum_{j=1}^{k} x_{ij} \iff \sum_{j=1}^{k}(x_{i_k} - x_{ij}) \geq 0$$

Άρα, το min πιάνεται για $k=1$ και έχω το ζητούμενο

Λύση με επιχείρημα ανταλλαγής

Επιχείρημα ανταλλαγής = Χρήση της εξίσωσης βελτιστοποίησης για σύνδεση V_n, V_{n-2}

$$V_n(S) = \min_{i\in S}\left[n x_i + V_{n-1}(S\setminus\{i\})\right] = \min_{i\in S}\min_{j\in S\setminus\{i\}}\left[n x_i + (n-1)x + V_{n-2}(S\setminus\{i,j\})\right]$$

$$= \min_{\substack{(i,j)\in S\times S \\ i\neq j}}\left[n x_i + (n-1)x_j + V_{n-2}(S\setminus\{i,j\})\right]$$

Είναι προτιμότερο να λάβω την i έναντι της j στο στάδιο n

$\iff \cancel{n x_i} + (\cancel{n}-1)x_j + \cancel{V_{n-2}(S\setminus\{i,j\})} \leq \cancel{n} x_j + (\cancel{n}-1)x_i + \cancel{V_{n-2}(S\setminus\{i,j\})}$

$\iff x_i \leq x_j$

Μεταξύ δύο αποφ. i και j που θα ληφθούν στα επόμενα 2 στάδια εκτελώ πρώτα την i με $x_i \leq x_j$

2. Το πρόβλημα της μεγιστοποίησης απόδοσης μιας μηχανής μέχρι τη βλάβη

Μηχανή πρόκειται να επεξεργαστεί t εργασίες $1,2,\dots,t$ με αξίες (αντίστοιχες) $x_1, x_2, \dots, x_t$ και πιθ. επιτυχούς εκτέλεσης (χωρίς βλάβη) $p_1, p_2, \dots, p_t$

Σε περίπτωση ανεπιτυχούς εκτέλεσης της εργασίας j το x_j δεν εισπράττεται και οι υπόλοιπες εργασίες δεν εκτελούνται.

Στόχος: Βελτιστοποίηση αναμενόμενης συνολικής απόδοσης

Εξισώσεις Βελτιστοποίησης

$V_n(S)$ = αναμενόμενη υπολειπ. απόδοση από τις n εργασίες του S

$V_0(\varphi)=0$

$$V_n(S) = \max_{i\in S}\left[p_i x_i + p_i V_{n-1}(S\setminus\{i\}) + \underbrace{(1-p_i)V_{n-1}(\cdot)}_{0}\right]$$

απορροφ. κατ. βλάβης

$|S|=n$, $n=1,2,\dots t$

Λύση με επιχείρημα ανταλλαγής

$n\geq 2$

$$V_n(S) = \max_{i\in S}\ \max_{j\in S\setminus\{i\}}\left[p_i x_i + p_i p_j x_j + p_i p_j V_{n-2}(S\setminus\{i,j\})\right]$$

Αν οι επόμενες προς εκτέλεση εργασίες είναι οι i,j η i είναι προτιμότερη της j αν:

$p_i x_i + p_i p_j x_j + p_i p_j V_{n-2}(S\setminus\{i,j\}) \geq p_j x_j + p_j p_i x_i + p_j p_i V_{n-2}(S\setminus\{j,i\})$

$\Leftrightarrow p_i x_i(1-p_j) \geq p_j x_j (1-p_i) \Leftrightarrow \dfrac{p_i x_i}{1-p_i} \geq \dfrac{p_j x_j}{1-p_j}$

Άρα, η βέλτιστη πολιτική είναι:

υπολογίζω $p_i x_i/(1-p_i)$ για $i=1,2\dots t$ και διατάσσω τις εργασίες προς εκτέλεση κατά φθίνουσα σειρά των $p_i x_i/(1-p_i)$

$\max\limits_{\pi} \sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_{\pi(i)}$ $\quad \left.\begin{matrix} a_1, a_2, \dots, a_n \\ b_1, b_2, \dots, b_n \end{matrix}\right\}$ πώς πρέπει να τα πολλώ για να πάρω max άθροισμα

~ Πρόβλημα Βέλτιστου Σταματήματος (Optimal Stopping) ~

Σε κάθε στάδιο υπάρχουν 2 αποφάσεις → συνεχίζω / σταματώ → απορροφητική τερματική κατάσταση

Πρόβλημα πώλησης περιουσιακού στοιχείου (Cayley-Moser)

Κατέχω περιουσιακό στοιχείο

Θέλω να το πουλήσω εντός t σταδίων

Σε κάθε στάδιο φθάνει προσφορά $Y\sim F(y)$ σ.κ (F γνωστή, $Y\geq 0$)

Απόφαση : Αποδοχή προσφοράς (σταματώ)
Απόρριψη -"-
Μεγιστοποίηση τιμής πώλησης

Στάδια : χρόνοι μέχρι να μην αξίζει τίποτα
Κατάσταση : τρέχουσα προσφορά
Απόφαση : Αποδοχή ή Απόρριψη
Δυναμική $\lessgtr^{0}_{\text{εποµ. κατ.}}$

Εξίσωση Βελτιστοποίησης

$V_n(x)$ = αναμενόμενη μέγιστη τιμή πώλησης αν η τρέχουσα προσφορά είναι x και απομένουν n περίοδοι

$V_0(x) = 0 \quad , x \geq 0$

$V_n(x) = \max[\underbrace{x}_{\text{αποδεχ.}}, \underbrace{{}_0\int^{\infty} V_{n-1}(y)dF(y)}_{\text{πάω στην εποµ}}], n=0,1\ldots t, x\geq 0$

$V_0(x)=0 \quad , x\geq 0$

$V_1(x) = \max[x,0] = x \quad , x\geq 0$

$a_1^*(x) = x \quad , x \geq 0$

$V_2(x) = \max[x, \underbrace{{}_0\int^{\infty} y dF(y)}_{a_2}] = \begin{cases} x, & x \geq a_2 \\ a_2, & x \leq a_2 \end{cases}$ κ.ο.κ

Θεώρημα

$V_n(x) = \max[x, a_n], \quad x\geq 0$

$a_n^*(x) = \begin{cases} x, & x\geq a_n \leftarrow \text{πουλάω} \\ a_n, & x \leq a_n \leftarrow \text{δεν πουλάω} \end{cases}$

όπου a_n ακολουθία

$a_1 = 0$

$a_n = {}_0\int^{a_{n-1}} a_{n-1}\, dF(y) + {}_{a_n}\int^{\infty} y\, dF(y)$

Απόδειξη

Για $n=1$ ισχύει. Έστω ότι ισχύει για $n-1$ θ.δ.ο ισχύει για n

$V_n(x) = \max[x, \underbrace{{}_0\int^{\infty} V_{n-1}(y)dF(y)}_{a_n}]$

$a_n = {}_0\int^{\infty} V_{n-1}(y)dF(y) = \underbrace{{}_0\int^{a_{n-1}} a_{n-1}\, dF(y)}_{\text{απορ. \& συνεχ.}} + \underbrace{{}_{a_{n-1}}\int^{\infty} y\, dF(y)}_{\text{παίρνω την προσφορά}}$

Παρατήρηση! $a_n \uparrow$

Πράγματι, $a_n \geq {}_0\int^{a_{n-1}} a_{n-1}\, dF(y) + {}_{a_{n-1}}\int^{\infty} a_{n-1}\, dF(y) = a_{n-1}$

Ασκήσεις με Διδακτορικό

hello

Μάθημα 18ο (6/12/18)

Κεφάλαιο 6ο

2) N περιόδους λειτουργίας

Σε κάθε περίοδο το απόθεμα επιθεωρείται και γίνεται παραγγελία

Η αποθήκη έχει χωρητικότητα K

Στη συνέχεια πραγματοποιείται η ζήτηση όπου στην περίοδο i είναι

$D_i \in \{0,1,\dots m_i\}$ με σ.π $d_i(j)$

Η ανικανοποίητη ζήτηση χάνεται (κόστος p ανά μονάδα)

Αυτά που περισσεύουν αποθηκεύονται (κόστος h ανά μονάδα)

c κόστος ανά μονάδα παραγγελίας

Στόχος: εύρεση πολιτικής (μοντελοποίηση) που ελαχιστοποιεί το μέσο συνολικό κόστος

Θεωρούμε την ΜΔΑ $\{T, X, A(x), P_t(\cdot|x_t,a_t), C_k(x_t,a_t)\}$ όπου:

Στάδιο/Περίοδος t: αντιπροσωπεύει το # περιόδων που απομένουν

T χρονικός ορίζοντας $T=\{0,1,2,\dots,N\}$

Καταστάσεις x_t = # προϊόντων στην αποθήκη στην αρχή της περιόδου t, $X=\{0,1,\dots K\}$

Αποφάσεις a_t = Ποσό παραγγελίας μετά την επιθεώρηση $A(x)=\{0,1\dots K-x_t\}$

Πιθανότητες Μετάβασης

Αν $x_t=x$ και $a_t=a$ και $D_t=j$ και έτσι η επόμενη κατάσταση είναι $x_{t-1}=x+a-j$, οπότε

$$P_t(x_{t-1}|x,a)=\begin{cases} d_t(j) & \text{αν } x_{t-1}=x+a-j,\ x_{t-1}\geq 0 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Κόστη

Κόστος παραγγελίας: $c_1(a_t)=c\cdot a_t$

κόστος αποθήκευσης: $$c_2(x_t,a_t)=\begin{cases} h\cdot\sum_{j=0}^{m_t}(x_t+a_t-j)\,d_t(j), & \text{αν } x_t+a_t-j\geq 0 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

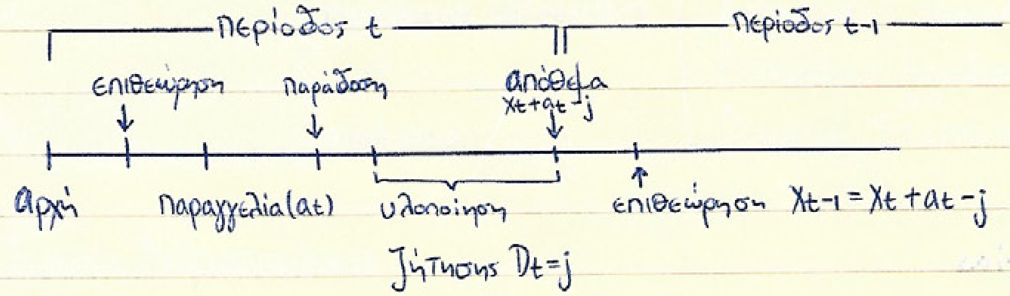
$$=h\cdot E[(x_t+a_t-D_t)^+]$$

κόστος ανικανοποίητης ζήτησης: $c_3(x_t,a_t)=p\cdot E[(x_t+a_t-D_t)^-]$

$c(x_t,a_t)=c_1(a_t)+c_2(x_t,a_t)+c_3(x_t,a_t)$

$x^+=\max\{0,x\}$

$x^-=\min\{0,x\}$



Εξισώσεις Βελτιστοποίησης

$V_t(x)$: ελάχιστο κόστος από τη βέλτιστη πολιτική για τις περιόδους που απομένουν αν το τρέχον απόθεμα είναι x

$$V_t(x_t) = \min_{a_t \in A(x_t)} \{ c(x_t,a_t) + \underbrace{\sum_{j\in X} p_t(j \mid x_t,a_t) V_{t-1}(j)}_{\underset{x \mid x_t,a_t}{E}[V(x)]} \}$$

$$V_0(x) = c_0(x)$$

$$V_t(x) = \min_{a\in\{0,\dots,k-x\}} \{ c_1(a) + c_2(x,a) + c_3(x,a) + E(V_{t-1}[(x+a-D_t)^+]) \}$$

2) N τοποθ. γεώτρησης $\{i_1,\dots,i_N\}$

Έρευνα στην $i_k \xrightarrow{\text{κόστος}} c_k$ με πιθ p_k έχουμε κέρδος $k_k > c_k$

με πιθ $1-p_k$ έχουμε $k_k=0$

Αρχικό κεφάλαιο y χρημ. μονάδες

Ζητούμενη μοντελοποίηση: εύρεση της πολιτικής (μετάθεση των $\{i_1,\dots,i_N\}$) που μεγιστοποιεί το μέσο συνολικό κέρδος

Θεωρούμε την ΜΔΑ $(T, X, A(x), p_t(\cdot \mid x_t,a_t), c_t(x_t,a_t))$

Στάδιο t = # ανεξερεύνητων περιοχών $T=\{0,1,\dots N\}$

Κατάσταση (x_t, S_t) = (κεφάλαιο στην αρχή του σταδίου t, σύνολο υπολειπ. περιοχών στην αρχή του σταδίου t)

$x_t \geq 0$, $S_t \subseteq \{i_1,\dots,i_N\}$ $X=\{(x_t,S_t)\}\cup\{\Delta\}$ Δ: κατάσταση τερματισμού

Η διαδ. της έρευνας μπορεί να σταματήσει:

(i) Να το επιδιώξουμε

(ii) Να χρεοκοπήσουμε $x_t < \min c_t$

(iii) Να έχουν ολοκληρωθεί οι γεωτρήσεις ($S=\phi$)

Αποφάσεις $a_t = (a, \text{stop})$, $a \in S_t$ (η περιοχή που επιλέγουμε)

<u>Πιθανότητες Μετάβασης</u>: Αν στην περίοδο t, το κεφ. είναι x και αποφ. a_t, τότε:

$$(X_{t-1}, S_{t-1}) = \begin{cases} X_t - c_{ik} + k_{ik},\ S_t \setminus \{i_k\} & \text{όταν } a = i_k \text{ με πιθ } p_{ik} \\ X_t - c_{ik},\ S_t \setminus \{i_k\} & \text{-- " --} \quad 1 - p_{ik} \\ \Delta,\ a_t = \text{stop} \text{ ή } S = \emptyset & \text{με πιθ } 1 \text{ ή } X_t < \min c_i,\ i \in S_t \end{cases}$$

<u>Κέρδος</u>

$$r_t((x_t, s_t), a_t) = \begin{cases} x_t, & \text{αν } a_t = \text{stop} \\ p_a(k - c_a) - (1 - p_a)c_a = p_a k_a - c_a, & \text{αν } a_t = a \end{cases}$$

$r_0(x_0, \phi) = x_0 \qquad r_t(\Delta) = 0$

$V_t(x, S)$ = μέγιστο τελικό κεφάλαιο κάτω από τη βέλτιστη πολιτική για τις περιόδους που απομένουν αν το τρέχον κεφ είναι x και οι περιοχές που δεν έχουν εξερευνηθεί είναι στο S

$V_t(\Delta) = 0$

$$V_t(x, S) = \max\{x + \xcancel{V_{t-1}(\Delta)}^{\,0},\ \max_{i \in S:\, x \geq c_i} \{p_i k_i - c_i + p_i V_{t-1}(k_i - c_i + x, S \setminus \{i\}) + (1 - p_i) V_{t-1}(x - c_i, S \setminus \{i\})\}\}$$

<u>Κεφάλαιο 5º</u>

2) $$p_{ij} = \begin{cases} a_{j-i}, & \text{αν } j \geq i \\ a_{N+1+j-i}, & \text{αν } j < i \end{cases}$$

$a_0, \dots, a_N > 0$, $\sum_{i=0}^{N} a_i = 1$

κόστος c_0 στην κατάσταση 0

κόστος c στην $j > 0$

$(X_n)_{n \geq 0}$ ΜΑΔΧ στο $\{0, 1, \dots N\}$ με πίνακα πιθ. μεταβ. $P = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_N \\ a_N & a_0 & \dots & a_{N-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_1 & & & a_0 \end{pmatrix}$

Η X_n είναι αδιαχ. και πεπερ. => θετ. επαναλ => έχει μοναδική στάσιμη κατανομή π

Ο πίνακας πιθ. μεταβ. p είναι διπλά στοχ => $\pi_j = \frac{1}{|S|} = \frac{1}{N+1}$, $j \in S$

Ζητάμε

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} E[c(X_n)] = \sum_{j \in S} c(j)\pi_j = c_0 \pi_0 + c \sum_{\substack{j \neq 0 \\ j \in S}} \pi_j = c_0 \cdot \frac{1}{N+1} + \frac{N}{N+1} c$$

1) Μηχανή παράγει 2 προϊόντα στην περίοδο n

Κάθε προϊόν είναι μη ελαττωμ. με πιθ. p ανεξ.

Σταθερή ζήτηση ίση με 1 μονάδα προϊόντος σε κάθε περίοδο

$X_n = \#$ προϊόντων την $n^{οστή}$ μέρα

(i) Νδο η $(X_n)_{n\geq 0}$ είναι ΜΑΔΧ και να βρεις πιν. πιθ. μετάβ.

Αν $X_n = k \neq 0$, τότε

$$X_{n+1} = \begin{cases} k+1 & \text{με πιθ } p^2 \\ k & \text{με πιθ } 2p(1-p) \\ k-1 & \text{με πιθ } (1-p)^2 \end{cases}$$

Αν $X_n = 0$, τότε $X_{n+1} = \begin{cases} 1, & \text{με πιθ } p^2 \\ 0, & \text{με πιθ } 1-p^2 \end{cases}$

Η (X_{n+1}) εξαρτάται από τη X_0, X_n μόνο από την $X_n \Rightarrow (X_n)$ είναι ΜΑ

$P(X_{n+1} \in A \mid \underset{\sigma(X_0,\dots,X_n)}{\overset{\shortparallel}{\Phi_n}}) = P(X_{n+1} \in A \mid \sigma(X_n))$ με πιθ 1

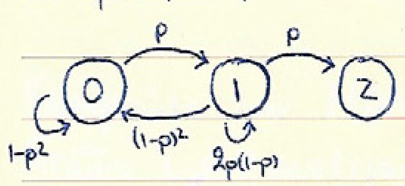
$D = \#$ μη ελλατ. προϊόντων

$X_{n+1} \mid \Phi_n = (X_{n+1}) \mathbb{1}_{\{D=2\}} + X_n \cdot \mathbb{1}_{\{D=1\}} + (X_{n-1}) \cdot \mathbb{1}_{\{D=0\}} = \mathcal{L}(X_n, D)$ με πιθ 1

(ii) Ικανή & αναγκαία συνθήκη θετ. επαναλ.

Εξετάζουμε πότε η (X_n) είναι αδιαχώριστη

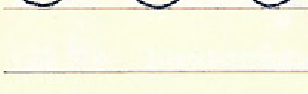
Για $p \in (0,1)$ η (X_n) είναι αδιαχ $\Leftrightarrow \forall i,j \ \exists n_0 \ p_{ij}^{(n_0)} > 0$



Έστω $x > 0$ $\quad p_{i\,i+k}^{(n)} > p_{i,i+1} p_{i+1,i+2} \dots p_{i+k-1,i+k} > 0$ για $n \geq k$

$\quad p_{i\,i-k}^{(n)} \geq \dots\dots > 0$ για $n \geq k$

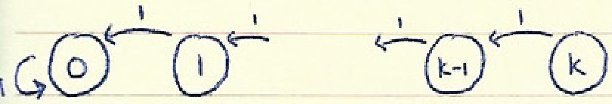
• Για $p=1$ $\quad X_{n+1} = X_n$ με πιθ 1



Η (X_n) δίνεται αδιαχ $S = \{0, 1 \dots\}$ παροδικό

$\Rightarrow$ όχι θετ. επαναλ.

• Για $p=0$ αν $X_0=k>0$ με πιθ 1 τότε



$S=\{1,\dots,k\}\cup\{0\}$
↑ παροδικό ↑ απορροφ.

X_n δεν είναι αδιαχ.

Οπότε για $p\in(0,1)$ η (X_n) είναι αδιαχωρ.

Θεώρημα: Αν (X_n) αδιαχ. τότε είναι θετ. επαναλ. $\iff$ Υπάρχει ($\pi=\pi P$) στάσιμη κατανομή και είναι μη μηδενική

Για $p\in(0,1)$

$\pi_0=(1-p^2)\pi_0+(1-p)^2\pi_1 \quad (*)$

$\pi_n=p^2\pi_{n-1}+2p(1-p)\pi_n+(1-p)^2\pi_{n+1}$ για $n\geq 1$

$\sum \pi_n=1$

Λύση: με εξίσωση διαφορών

$(1-p)^2\pi_{n+1}+(2p(1-p)-1)\pi_n+p^2\pi_{n-1}=0$ είναι ομογενής Σ.Δ $2^{ης}$ τάξης

Η χαρακτ. εξίσ. είναι $(1-p)^2\cdot T^2+(2p(1-p)-1)T+p^2=0$

Η γενική λύση είναι: $\pi_n=\begin{cases} c_1\lambda_1^n+c_2\lambda_2^n, & \lambda_1\neq\lambda_2 \text{ ρίζες της χ.ε} \\ c_1\lambda_1^n+c_2\cdot n\cdot\lambda_1^n, & \lambda_1 \text{ διπλή ρίζα}\end{cases}$

Έχουμε ότι για $p=1/2$ η χ.ε έχει μοναδική λύση $\lambda_1=1/2$

για $p\neq 1/2$, $p\in(0,1)$ έχει διπλή λύση $\lambda_1=1$, $\lambda_2=\left(\frac{p}{1-p}\right)^2=a$

Χρησιμοποιώ την $\sum\pi_n=1$

Για $p\in(0,1)$: $\pi_n=c_1+a^nc_2$ θα πρέπει $c_1=0$

$c_2\cdot\sum a_n=1 \iff \sum_{n=0}^{\infty}a_n=1/c_2 \iff c_2=1-a \Rightarrow \pi_n=(1-a)a^n\sim Geo(1-a)$

Για $p=1/2$: $\pi_n=c_1(1/2)^n+c_2\cdot n(1/2)^n$

Λόγω της $\sum\pi_n=1$ θα πρέπει $c_1=c_2=0 \Rightarrow \pi_n=0 \ \forall n\geq 1$

$\Rightarrow \pi_0=0$ από $(*)$

$\Rightarrow X_n$ μηδενικά επαναληπτική