Μάθημα 12ο (11/12/18)

1. Το πρόβλημα άσκησης δικαιώματος αγοράς μετοχής

- Ένα κάτοχο δικαιώματος αγοράς μιας μετοχής σε τιμή c μέσα σε t χρον. περιόδους
- Αρχική τιμή μετοχής (t περιόδους πριν την λήξη δικαιωμ.) $= x_t$
- Μοντέλο διακυμ. μετοχής = Τυχαίος περίπατος

Τιμή μετοχής μετά από n περιόδους $=$ Αρχική τιμή $+ \sum_{i=1}^{n}$ (Μεταβολή τιμής στην περίοδο i) $= Y_i \sim F(y)$

ανεξ. ισου — γνωστή κατ.

- Στόχος: Βέλτιστη πολιτική άσκησης δικαιώματος που να μεγιστοποιεί το αναμενόμενο κέρδος

Μοντελοποίηση Δ.Π

- Στάδιο n = # περιόδων μέχρι τη λήξη του δικαιώματος
- Κατάσταση x = τιμή μετοχής την τρέχουσα περίοδο
- Απόφαση = Άσκηση ή όχι
- Άμεσο κέρδος $= \begin{cases} x-c, & \text{άσκηση} \\ 0, & \text{διαφ} \end{cases}$
- Δυναμική $x \xrightarrow{\text{άσκηση}}$ τερματική κατάστ.

$x \xrightarrow{\text{όχι ασκ}} x+Y,\ Y\sim F(y)$

Εξίσωση Βελτιστοποίησης

$V_0(x) = \max[x-c, 0],\ x\in\mathbb{R}$

$V_n(x) = \max[\underbrace{x-c}_{\text{ασκώ}}, \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} V_{n-1}(x+y)\,dF(y)}_{\text{δεν ασκώ}}],\ x\in\mathbb{R},\ n=1,2\ldots$

Ιδιότητες της $V_n(x)$ / εικασίες

1) $V_n(x)$ ↑ ως προς n

2) $V_n(x)$ ↑ ως προς x

3) Για να αποδείξω ότι η βέλτιστη πολιτική είναι κατώφλι, δηλαδή στο στάδιο n:

$x < x_n^*$ δεν ασκώ, $x \geq x_n^*$ ασκώ

αρκεί και πρέπει να υπάρχει x_n^* ώστε

$V_n(x) \geq x-c$ για $x < x_n^*$

$V_n(x) < x-c$ για $x \geq x_n^*$

Άρα, ισοδύναμα υπάρχει x_n^*:

$V_n(x) - x \geq -c$ για $x < x_n^*$

$V_n(x) - x < -c$ για $x \geq x_n^*$

Επομένως, $V_n(x) - x \downarrow$ ως προς x

4] $x_1^* \leq x_2^* \leq \ldots \leq x_n^* \leq \ldots$

<u>Θεώρημα:</u> Βέλτιστη πολιτική: Ασκώ την περίοδο $n \Leftrightarrow x \geq x_n^*$, $x_n^* = \inf\{x : V_n(x) - x \leq -c\}$

<u>Αποδείξεις</u>

1] $V_1(x) = \max[x-c, \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{V_0(x+y)}_{\max[x+y-c,0] \geq 0} dF(y)}_{\geq 0}] \geq \max[x-c, 0] = V_0(x)$

Έστω ότι ισχύει για $n-1$: $V_{n-1}(x) \geq V_{n-2}(x)$

Θ.δ.ο $V_n(x) \geq V_{n-1}(x)$

$V_n(x) = \max[x-c, \int_{-\infty}^{+\infty} V_{n-1}(x+y) dF(y)] \geq \max[x-c, \int_{-\infty}^{+\infty} V_{n-2}(x+y) dF(y)] = V_{n-1}(x)$

2] Για $n=0$ η $V_0(x) = \max[x-c, 0]$ $\uparrow$ ως προς x

Έστω ότι ισχύει για $n-1$, δηλαδή η $V_{n-1}(x)$ $\uparrow$ ως προς x

Θ.δ.ο και η $V_n(x)$ είναι $\uparrow$ ως προς x

Έστω $x < x'$ έχω $x - c < x' - c$

Για κάθε y: $x + y < x' + y \xRightarrow{\text{επαγ. υπόθ}} V_{n-1}(x+y) \leq V_{n-1}(x'+y) \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} V_{n-1}(x+y) dF(y) \leq \int_{-\infty}^{+\infty} V_{n-1}(x'+y) dF(y)$

Άρα, $V_n(x) = \max[x-c, \int_{-\infty}^{+\infty} V_{n-1}(x+y) dF(y)] \leq \max[x'-c, \int_{-\infty}^{+\infty} V_{n-1}(x'+y) dF(y)] = V_n(x')$

3] Για $n=0$: $V_0(x) - x = \max[-c, -x]$ $\downarrow$ ως προς x

Έστω ότι ισχύει για $n-1$, δηλαδή ότι $V_{n-1}(x) - x \downarrow$ ως προς x

Θ.δ.ο $V_n(x) - x \downarrow$ ως προς x. Έστω $x < x'$ έχω:

$V_n(x) - x = \max[-c, \int_{-\infty}^{+\infty} [V_{n-1}(x+y) - (x+y)] dF(y) + \int_{-\infty}^{+\infty} y\, dF(y)]$

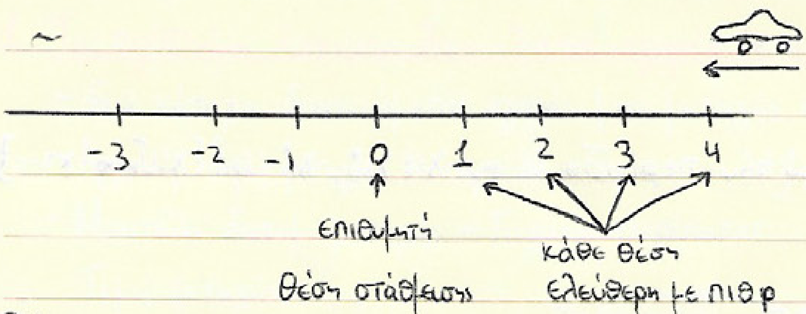
$\overset{\text{επαγ. υπόθ}}{\geq} \max[-c, \int_{-\infty}^{+\infty} [V_{n-1}(x'+y) - (x'+y)] dF(y) + \int_{-\infty}^{+\infty} y\, dF(y)] = V_n(x') - x'$

4] Ουτας στο στάδιο n: Βέλτιστη απόφαση είναι άσκηση δικαιωμ. $\Leftrightarrow V_n(x) \leq x - c$

$\Leftrightarrow V_n(x) - x \leq -c \overset{V_n(x)-x \downarrow}{\Longleftrightarrow} x \geq x_n^*$ όπου $x_n^* = \inf\{x : V_n(x) - x \leq -c\}$

Έχουμε $V_n(x_{n+1}^*) - x_{n+1}^* \overset{1]}{\leq} V_{n+1}(x_{n+1}^*) - x_{n+1}^* = -c \Rightarrow x_{n+1}^* \in \{x : V_n(x) - x \leq -c\} \Rightarrow x_n^* \leq x_{n+1}^*$

2. Το πρόβλημα της στάθμευσης



Βέλτιστη Πολιτική: στάθμευση που να ελαχιστοποιεί την απόσταση από το 0

Στάδιο: Θέση που βρίσκομαι

Κατάσταση → 1 ελεύθερη
→ 0 κατειλ.

Απόφαση: Στάθμευση ή όχι

Εξισώσεις Βελτιστοποίησης

$V_n(x)$ = ελαχ. μέση αποστ. από το 0 αν είμαι στη θέση n και κατάστ. x

$V_0(1) = 0$

$$V_0(0) = \frac{1}{p} \left(\begin{array}{l} \text{Μέση τιμή Geom} \\ Pr[X=n] = \underbrace{p}_{\text{πιθ να είναι κενή}}\underbrace{(1-p)^{n-1}}_{\text{πιθ. να μην είναι κενές όσες πέρασα μέχρι να βρω κενή}}, n \geq 1 \end{array} \right)$$

Αν περάσω το 0 σταματάω όπου βρω

$n = 1, 2 \ldots$

$V_{-n}(1) = n$

$V_{-n}(0) = n + 1/p$

$n \geq 1$

$V_n(1) = \min[n, pV_{n-1}(1) + (1-p)V_{n-1}(0)]$

$V_n(0) = pV_{n-1}(1) + (1-p)V_{n-1}(0)$

Ιδιότητες $V_n(x)$

1) $V_n(1) = \min[\underset{\nearrow}{n}, \underset{\searrow}{V_n(0)}]$

2) $V_n(0)$ ↓ ως προς n

3) Βέλτιστη Πολιτική: Σταθμεύω όταν $n < V_n(0) \iff n \leq n^*$

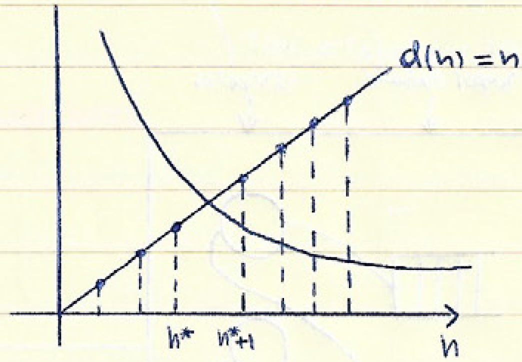
Συνεχίζω όταν $n \geq V_n(0) \iff n \geq n^*+1$

Αποδείξεις

1) ✓ άμεσο

2) $V_n(0) = pV_{n-1}(1) + (1-p)V_{n-1}(0) \le pV_{n-1}(0) + (1-p)V_{n-1}(0)\; V_{-n}(0) = n + 1/p = V_{n-1}(0)$

3) $V_n(1) = \min[\underset{\uparrow}{n}, \underset{\downarrow}{V_n(0)}]$



Προσδιορισμός n^*

1) $V_n(1) = n, \quad n \le n^*$

2) $V_n(0) = pV_{n-1}(1) + (1-p)V_{n-1}(0) = pV_{n-1}(1) + (1-p)pV_{n-2}(1) + (1-p)^2V_{n-2}(0)$

$= pV_{n-1}(1) + (1-p)pV_{n-2}(1) + (1-p)^2pV_{n-3}(1) + (1-p)^3V_{n-3}(0) = \dots$

$= \sum_{j=0}^{n-1} p(1-p)^j V_{n-1-j}(1) + (1-p)^n \underbrace{V_0(0)}_{1/p}$

Αν θέλω να παρκάρω μετά τη θέση 10 δεν με νοιάζει τίποτα αν είμαι στην 15, 18 κτλπ

3) $V_n(0) = pV_{n-1}(1) + (1-p)V_{n-1}(0) = pV_{n-1}(0) + (1-p)V_{n-1}(0) = V_{n-1}(0), \quad n \ge n^*+2$

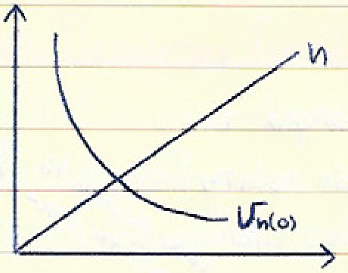
$V_n(0) = V_{n^*+1}(0)$

4) $V_n(1) = V_n(0) = V_{n^*+1}(0), \quad n \ge n^*+1$

Οπότε για $n \le n^*+1$: $V_n(0) = \sum_{j=0}^{n-1} p(1-p)^j(n-1-j) + (1-p)^n \cdot 1/p = \dots = -1/p + n + 2/p\,(1-p)^n$ (1)

$n \ge n^*+1$: $V_n(1) = V_{n^*+1}(0) = -1/p + n^* + 1 + 2/p\,(1-p)^{n^*+1}$ (2)

Άρα, μπορώ να συγκρίνω αναλυτικά τα $V_n(0)$ και n και το n^* χαρακτηρίζεται

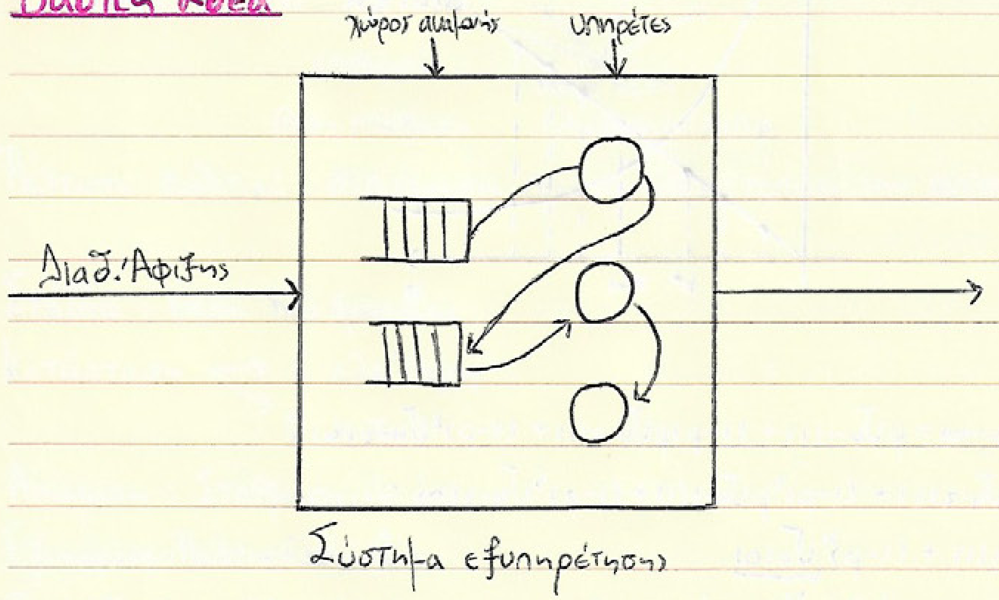


$$\left.\begin{array}{l} V_{n^*}(0) > n^* \\ V_{n^*+1}(0) \le n^*+1 \end{array}\right\} \overset{(1)}{\underset{(2)}{\Longrightarrow}} n^* = \max\{n : 2(1-p)^n > 1\}$$

Μάθημα 20ο (13/12/18)

Ουρές Αναμονής

Βασική Ιδέα



Βασικά Χαρακτηριστικά

- Διακριτές Μονάδες
- Τυχαιότητα

Ονοματολογία κατά Kendall

5 χαρακτηριστικά A/B/c/k ( )

A : διαδικασία αφίξεων

B : χρόνους εξυπηρέτησης

c : #παράλληλων υπηρετών

k : χωρητικότητα συστήματος (= υπηρέτες + χώρος αναμονής)

( ) : πειθαρχεία ουράς

Πειθαρχεία ουράς

(i) First-Come-First-Served (FCFS)
First-In-First-Out (FIFO)
} Ελαχιστοποιεί τη διασπορά του χρόνου παραμονής ενός πελάτη

(ii) Last-Come-First-Served (LCFS)
Last-In-First-Out (LIFO)
(Preemptive ή όχι)

Preemptive: αν έρθει κάποιος αφήνω αυτόν που εξυπηρετώ και ξεκινάω να εξυπ. αυτόν που ήρθε

όχι: Τελειώνω την εξυπηρέτηση

Preemptive →
- Resume (LCFS-PR) συνεχίζω εξυπ. από εκεί που είχε μείνει → κάνει ανάλογο το χρόνο παραμ. στο χρόνο εξυπ.
- όχι: Χάνετε ό,τι έχω κάνει, ξεκινάω από την αρχή

(iii) Service - In - Random - Order (SIRO)
(iv) Shortest - Service - Time - First (SSTF) (όχι preemptive) (ελαχιστοποιεί #πελ σε αναμονή)
preemtive : Shortest - Remain - Time - First (έρχεται κάποιος με λεπτό εξυπ και σε αυτόν να εξυπ. έχουν μείνει 2 λεπτά τον σταματάω και εξυπ τον καινούργιο)

Διαδικασία Αφίξεων / Χρόνοι Εξυπηρέτησης

A, B : ενδιάμεσους χρόνους αφίξεων
Χρόνοι εξυπηρέτησης

GI : General Independent
ανεξ. ισον. ~ A(x) ή B(x)
⇓
αναν. διαδ. αφιξ.

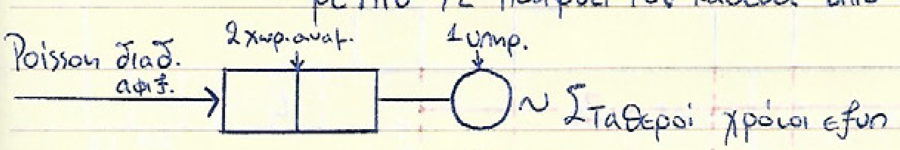
M : Markovian / Memoryless
ανεξ exp

D : Deterministic
σταθεροί

Ek : Erlang-k

Hk : Hyperexp

πχ M|D|1|3 (SIRO)
↳ με πιθ 1/2 παίρνει τον καθένα από το χώρο αναμ.



Βασικές Παράμετροι Συστήματος

c, k

λ = ρυθμός άφιξης

a = 1/λ = μέσος ενδιαμ. χρόνος αφιξ

μ = (Μέγιστος) ρυθμός εξυπηρ.

b = 1/μ = μέσος χρόνος εξυπηρ.

Βασικές Στοχαστικές Διαδικασίες

$Q(t)$ = #πελατών τη στιγμή t

$Q_q(t)$ = -//- στο χώρο αναμονής

$Q_s(t)$ = -//- -//- εξυπηρέτησης

Συνεχούς χρόνου-παράμετρος t

S_n = χρόνος παραμονής n-οστού πελάτη

W_n = -//- αναμονής -//-

X_n = -//- εξυπηρέτησης -//- $S_n = W_n + X_n$

A_n = -//- άφιξης -//-

D_n = -//- αναχώρησης -//- $D_n = A_n + S_n$

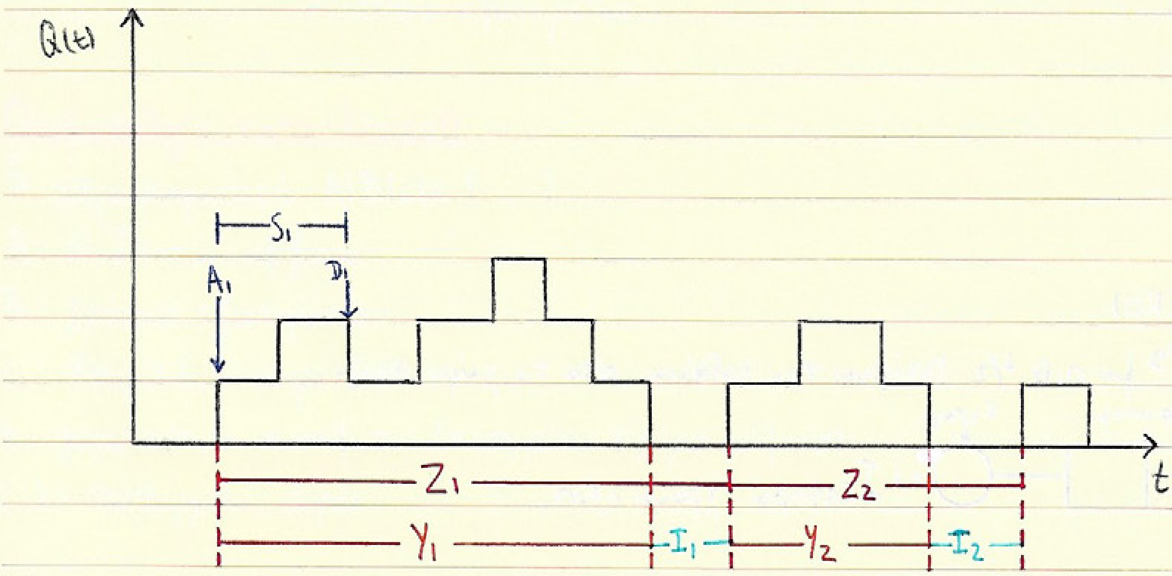
Πελάτες => διακριτό

Z_n = διάρκεια n-οστού κύκλου λειτουργίας συστήματος

(από πελάτη που φθάνει σε κενό σύστημα σε πελάτη που φθάνει σε κενό σύστημα)

Y_n = διάρκεια n-οστής περιόδου συνεχούς λειτουργίας $Z_n = Y_n + I_n$

I_n = -//- αργίας



Τα περισσότερα συστήματα εξυπ. είναι αναγεννητικά με την έννοια ότι η $\{Q(t)\}$ είναι αναγεν. διαδ. (σημεία αναγεν. είναι οι ενάρξεις των κύκλων απασχόλησης)

Επιπλέον οι χρόνοι αναγεν. είναι απεριοδικοί όταν η κατανομή ενδιαμ. χρόνων άφιξης ή/και των χρόνων εξυπ. έχει συνεχές μέρος. (πχ όχι και ραντεβού και σταθ. χρόνους εξυπ.)

Τότε, p_n = πιθανότητα n πελάτες στο σύστημα $= \lim_{t\to\infty} \Pr[Q(t)=n] = \lim_{t\to\infty} \dfrac{E\left[\int_0^t \mathbb{1}_{\{Q(u)=n\}} du\right]}{t}$

ή ποσοστό του χρόνου με n πελάτες στο σύστημα.

$(p_n = \Pr[Q=n],\ n \geq 0)$ κατανομή ισορροπίας του αριθμού των πελατών (ή οριακή ή στάσιμη)

$(F_S(x) = \Pr[S \leq x],\ x \geq 0)$ κατανομή του χρόνου παραμονής ενός πελάτη

Εδώ $F_S(x) = \lim_{n\to\infty} Pr[S_n \le x] = \lim_{n\to\infty} \frac{E\left[\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{S_i \le x\}}\right]}{n}$ Μακροπρόθεσμο μέσο ποσοστό πελ. που έκατσαν λιγότερο από x

Ομοίως $E[Q]$ = Μέσος # πελατών = $\sum_{n=0}^{\infty} n p_n = \lim_{t\to\infty} \frac{E\left[\int_0^t Q(u)du\right]}{t} = \lim_{t\to\infty} E[Q(t)]$

$E[S]$ = μέσος χρόνος παραμ = $\int_0^\infty x\, dF_S(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{E\left[\sum_{i=1}^{n} S_i\right]}{n} = \lim_{n\to\infty} E[S_n]$

μέση τιμή της οριακής καταν | οριακή μέση τιμή | δειγματικός μέσος

Εμφυτευμένες Διαδικασίες σε στιγμές αφίξεων και αναχωρήσεων

$Q_k^- = Q(A_k^-)$ = # πελ. αμέσως πριν την k-οστή άφιξη

$Q_k^+ = Q(D_k^+)$ = # πελ. αμέσως μετά την αναχώρηση του k-οστού πελ.

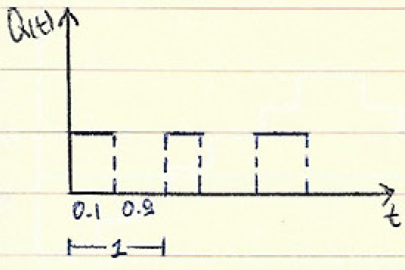
$a_n = Pr[Q^- = n]$ = πιθ. n πελ. αμέσως πριν την άφιξη πελ ή ποσοστό πελ. που βλέπουν n καθώς μπαίνουν

$d_n = Pr[Q^+ = n]$ = -//- μετά την αναχ. πελ ή -//- καθώς βγαίνουν

Γενικά: $(p_n) \ne (a_n) \ne (d_n) \ne (p_n)$

πχ1 D/D/1 $a=1, b=0.1$

$$p_n = \begin{cases} 0.9, & n=0 \\ 0.1, & n=1 \\ 0, & n\ge 2 \end{cases}$$



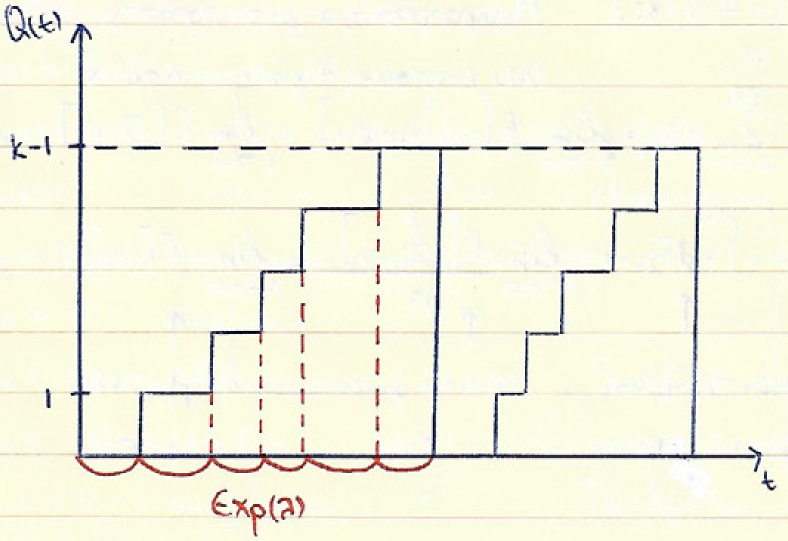
$$d_n = a_n = \begin{cases} 1, & n=0 \\ 0, & n\ge 1 \end{cases}$$

$(p_n) \ne (a_n)$

πχ2 D/D/1, $a=1, b=0.9$

$$p_n = \begin{cases} 0.1, & n=0 \\ 0.9, & n=1 \\ 0, & n\ge 2 \end{cases} \qquad d_n = a_n = \begin{cases} 1, & n=0 \\ 0, & n\ge 1 \end{cases}$$

πχ3 Αποθήκη με Poisson(λ) διαδ. αφιξ. και άμεσες εξυπηρ. όταν μαζευτούν k προϊόντα



$$a_n = p_n = \begin{cases} 1/k, & n=0,1\ldots k-1 \\ 0, & \text{διαφ} \end{cases} \qquad d_n = \begin{cases} 1, & n=0 \\ 0, & \text{διαφ} \end{cases}$$

φεύγουν όλοι μαζί => αφήνουν πάντα 0 πίσω

Μάθημα 21ο (18/12/18)

Ουρές → 4 βασικά αποτελέσματα
Ουρές → Ανάλυση Μέσης Τιμής

λ: ρυθμός αφίξεων
b: μέσος χρόνος εξυπηρέτησης
p_n: πιθανότητα n ατόμων σε συνεχή χρόνο
a_n: -//- μόλις πριν από άφιξη
d_n: -//- αμέσως μετά από αναχώρηση
ρ = ένταση / ρυθμός συνωστισμού $= \lambda b$
(ποσότητα έργου -σε χρόνο- που μπαίνει στο σύστημα ανά χρονική μονάδα)

1ο Βασικό Αποτέλεσμα: Χαρακτηρισμός Ευστάθειας

Θεώρημα

GI|GI|c με κατανομή ενδιάμεσων χρόνων αφίξεων ή εξυπηρετήσεων απεριοδική.
Τότε:

(i) $\rho < c \Leftrightarrow$ ευσταθές $\exists p_n, a_n, d_n > 0$ & $\sum_n p_n = \sum_n a_n = \sum_n d_n = 1$

(ii) $\rho \geq c \Leftrightarrow$ ασταθές : $p_n = a_n = d_n = 0$

2º Βασικό Αποτέλεσμα : Ιδιότητα των μεμονωμένων μεταβάσεων

Θεώρημα

Αν οι αφίξεις και οι αναχωρήσεις γίνονται μεμονωμένα $\Rightarrow (a_n) = (d_n)$

Αιτιολόγηση

$$a_n = \lim_{t \to \infty} \frac{\#\text{αφίξεων στο } (0,t] \text{ που βλέπουν } n \text{ πελάτες}/t}{\underbrace{\#\text{αφίξεων στο } (0,t]/t}_{\text{ρυθμός αφίξεων}}}$$

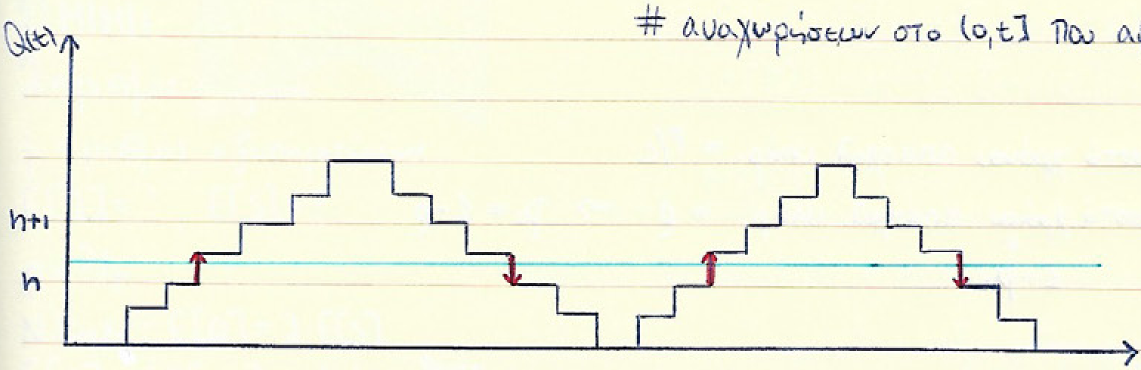
$$d_n = \lim_{t \to \infty} \frac{\#\text{αναχωρήσεων στο } (0,t] \text{ που αφήνουν } n/t}{\underbrace{\#\text{αναχωρήσεων στο } (0,t]/t}_{\text{ρυθμός αναχωρήσεων}}}$$

ρυθμός αφίξεων = ρυθμός αναχωρήσεων

Επίσης οι μεμονωμένες μεταβάσεις $\Rightarrow \forall t$: #αφίξεων στο (0,t] που βλέπουν n

$\parallel$

\# αναχωρήσεων στο (0,t] που αφήνουν $n \pm 1$



Οπότε $a_n = d_n$

3º Βασικό Αποτέλεσμα : PASTA (Poisson Arrivals See Time Averages)

Poisson αφίξεις $\Rightarrow (a_n) = (p_n)$

4º Βασικό Αποτέλεσμα

$$\underset{\#\text{πελατών}}{E[Q]} = \underset{\substack{\text{ρυθμός}\\ \text{αφίξεων}}}{\lambda} \cdot \underset{\text{χρόνος παραμονής πελάτη}}{E[S]}$$

Βασικές Συνέπειες του Ν. Little

(i) Εφαρμογή στο χώρο αναμονής: $\underset{\substack{\#\text{πελατών στο}\\ \text{χώρο αναμονής}}}{E[Q_q]} = \lambda \cdot \underset{\substack{\text{χρόνος}\\ \text{αναμονής}}}{E[W]}$

(ii) Εφαρμογή στο χώρο εξυπηρέτησης: $\underset{\substack{\text{μέσος } \#\text{πελ}\\ \text{στο χώρο εξυπ}}}{E[Q_s]} = \lambda \cdot \underset{\substack{\text{μέσος χρόνος}\\ \text{εξυπ}}}{E[X]} = \lambda \cdot b = \rho$

Άρα, ρ = μέσος αριθμός απασχολημένων υπηρετών

$$I_i(t) = \begin{cases} 1, & \text{αν ο } i \text{ υπηρ απασχολ. τη χρονική στιγμή } t \\ 0, & \text{διαφ.} \end{cases}$$

$$\underbrace{E\left[\sum_{i=1}^{c} I_i\right]}_{\text{μέσος } \#\text{απασχολ. υπηρ.}} = \rho \Rightarrow c \times \text{ποσοστό απασχολ. υπηρ} = \rho$$

REMEMBER

p_0: πιθ. σύστημα κενό

$1-p_0$: πιθ. σύστημα μη-κενό

$GI|GI|c \Rightarrow$ ποσοστό χρόνου απασχολ. υπηρ. $= \rho/c$

$GI|GI|1 \Rightarrow$ ποσοστό $\underset{\substack{\| \\ 1-p_0}}{\text{χρόνου}}$ απασχολ. υπηρ. $= \rho \Rightarrow p_0 = 1-\rho$

Ανάλυση Μέσης Τιμής

$E[Q], E[S] \rightsquigarrow$ προσδιορισμός: 2 εξισώσεις

1) Νόμος Little

2) Σύνδεση $\underset{\substack{\text{χρόνος παραμ.}\\ \text{πελ.}}}{S}, \underset{\substack{\#\text{πελ κατά την}\\ \text{άφιξή του}}}{Q^-} \xrightarrow{\text{PASTA}} Q$

Παραδείγματα (AMT)

1) M|M|1|1

λ = ρυθμός αφίξεων

μ = ρυθμός εξυπηρετήσεων

$E[Q] = ?$, $E[S] = ?$

$\rho = \lambda/\mu$

Ν. Little : $E[Q] = \lambda \cdot E[S]$

$E[S] = Pr[Q^- = 0] \cdot E[S|Q^- = 0] + Pr[Q^- = 1] E[S|Q^- = 1] \overset{PASTA}{=} Pr[Q=0] E[S|Q^-=0] + Pr[Q=1] E[S|Q^-=1]$

$= p_0 \cdot 1/\mu + p_1 \cdot 0$

Άρα, $\left. \begin{aligned} E[Q] &= \lambda \cdot p_0 \cdot 1/\mu \\ &\parallel \\ 1 \cdot p_1 &+ 0 \cdot p_0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow p_1 = \rho \cdot p_0$

Επίσης $p_0 + p_1 = 1 \Rightarrow p_0 = \dfrac{1}{1+\rho}$, $p_1 = \dfrac{1}{1+\rho}$

Άρα, $E[Q] = \dfrac{\rho}{1+\rho}$, $E[S] = \dfrac{1}{\mu(1+\rho)}$

2) M|M|1

λ = ρυθμός αφίξεων

μ = ρυθμός εξυπηρετήσεων

$E[Q] = ?$, $E[S] = ?$

$\rho = \lambda/\mu$

Ν. Little : $E[Q] = \lambda \cdot E[S]$

$E[S] = (E[Q^-] + 1) \cdot 1/\mu \overset{PASTA}{=} (E[Q] + 1) \cdot 1/\mu$

Άρα, $E[Q] = \lambda \cdot (E[Q] + 1) \cdot 1/\mu \Rightarrow E[Q] = \rho E[Q] + \rho \Rightarrow E[Q] = \dfrac{\rho}{1-\rho}$

$E[S] = \dfrac{\rho}{\lambda(1-\rho)} = \dfrac{1}{\mu(1-\rho)}$

3) M|M|1 ουρά με την k-πολιτική ενεργοποίησης

λ: ρυθμός άφιξης

μ: ρυθμός εξυπηρέτησης

k: κατώφλι (#πελατών) για ενεργοποίηση υπηρέτη αφού το σύστημα μείνει κενό

$E[Q]=?$, $E[S]=?$

N. Little : $E[Q]=\lambda\cdot E[S]$

Έστω ένας αφικνούμενος πελάτης

S : χρόνος παραμονής

Q^- : #πελατών που βρίσκει

I^- : κατάσταση υπηρ. που βρίσκει

Πώς βλέπω
- → #πελ > k λειτουργεί
- → #πελ < k
  - → λειτουργεί
  - → δε λειτουργεί

$$E[S]=\underbrace{Pr[I^-=0]}_{\text{απενεργοποιημένο}}\Big[\underbrace{(k-E[Q^-|I^-=0]-1)\cdot 1/\lambda}_{\text{αυτοί που πρέπει να έρθουν}}+(E[Q^-|I^-=0]+1)\cdot 1/\mu\Big]+\underbrace{Pr[I^-=1]}_{\text{λειτουργεί}}(E[Q^-|I^-=1]+1)\cdot 1/\mu$$

⇓ Περιμένει να μαζευτούν k για να ενεργοποιηθεί & να εξυπηρετηθούν όσοι είναι πριν από αυτόν

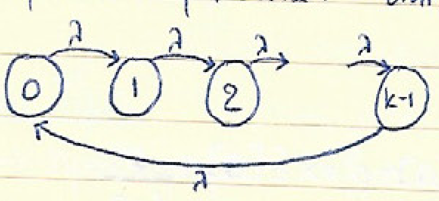
$$=Pr[I^-=0][k-E[Q^-|I^-=0]-1]\cdot 1/\lambda+Pr[I^-=0][E[Q^-|I^-=0]+1]\cdot 1/\mu+Pr[I^-=1][E[Q^-|I^-=1]+1]\cdot 1/\mu$$

$$=Pr[I^-=0][k-E[Q^-|I^-=0]-1]\cdot 1/\lambda+[E(Q^-)+1]\cdot 1/\mu$$

$$\overset{PASTA}{=}Pr[I^-=0](k-E[Q|I=0]-1)\cdot 1/\lambda+\frac{E[Q]+1}{\mu}$$

$Pr[I=0]$ = Ποσοστό χρόνου μη-απασχολ. υπηρ $\overset{E[Qs]=\rho}{=\!=}$ $1-\rho$

$(Q|I=0)$ = στάσιμη κατανομή ΜΑΣΧ ~ Uniform({0,1,...,k-1})



$$E[Q|I=0]=\frac{k-1}{2}$$

Άρα, $E[Q]=\lambda E[S]$

$$E[S]=\frac{E[Q]+1}{\mu}+(1-\rho)\left(k-\frac{k-1}{2}-1\right)\cdot\frac{1}{\lambda}$$

Άρα, $E[Q]=\rho E[Q]+\rho+(1-\rho)\frac{k-1}{2} \Rightarrow E[Q]=\frac{\rho}{1-\rho}+\frac{k-1}{2}$, $E[S]=\frac{1}{\mu(1-\rho)}+\frac{k-1}{2\lambda}$