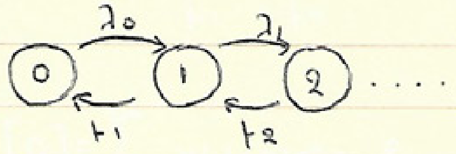
# Μάθημα 22ο (10/1/19)

## Απλές Μαρκοβιανές ουρές

**Ορισμός**: Σύστημα εξυπηρέτησης με $\{Q(t)\}$ (#πελ τη στιγμή t) ΜΑΣΧ γεννήσεως-θανάτου λέγεται απλή μαρκοβιανή ουρά

$\{Q(t)\}$




$\lambda_i$: δεσμ. ρυθμός αφίξεων όταν $\exists$ i πελ

$\mu_i$: -||- αναχωρήσεων -||-

$$p_n = \lim_{t \to \infty} Pr[Q(t)=n] = Pr[Q=n] \quad n \geq 0$$ ← οριακή καταν

ΜΑΣΧ θετ. επαναλ (ευστάθεια) $\Leftrightarrow$ $$B^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \cdots \mu_n} < \infty$$

Τότε, $$p_n = \begin{cases} B, & n=0 \\ B\,\dfrac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \cdots \mu_n}, & n \geq 1 \end{cases}$$

$\lambda^*$ = μέσος ρυθμός αφίξεων

$\mu^*$ = -||- αναχωρήσεων

Το $\lambda^*$ υπολογίζεται θεωρώντας δομή κόστους στην $\{Q(t)\}$

Κόστος 1 για κάθε μετάβαση που είναι άφιξη: $i \to i+1$, $i \geq 0$

**Το γενικό θεώρημα**: Μακροπρόθεσμο κόστος ανά χρον. μονάδα $$= \sum_i p_i \underbrace{c(i)}_{\text{κόστος παραμονής στην } i} + \sum_i \sum_{j \neq i} p_i q_{ij} \underbrace{d(i,j)}_{\text{κόστος ανά μεταβ } i \to j}$$

Έχω $$\lambda^* = \sum_{i=0}^{\infty} p_i \lambda_i$$
$$\mu^* = \sum_{i=1}^{\infty} p_i \mu_i$$

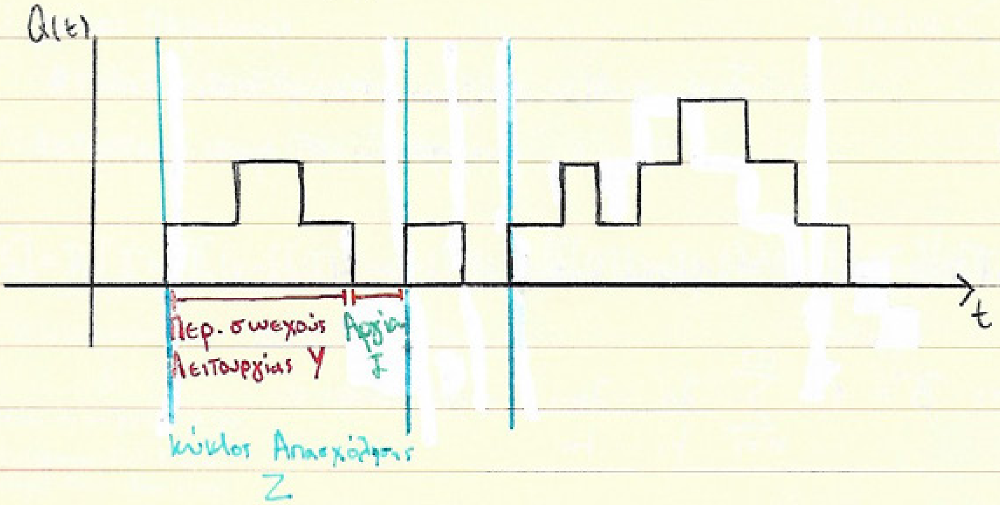
$$\lambda^* = 0 + \sum_{i=0}^{\infty} \underbrace{\sum_{j=i+1}}_{j=i-1 \text{ δεν προσφέρει κάτι}} p_i q_{ij} d(i,j) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i q_{i,i+1} d(i,i+1)$$

$a_n = P_r[Q^- = n]$ = μακροπρόθεσμο ποσοστό αφικνούμενων πελατών που βρίσκουν n $= \dfrac{\text{Ρυθμός αφίξεων πελ που βρίσκουν } n}{\text{Ρυθμός αφίξεων πελ}} = \dfrac{p_n \lambda_n}{\lambda^*}$

$Q^-$: # πελ πριν από αφίξη

Ομοίως $d_n = Pr[Q^+ = n] = \dfrac{p_{n+1}\mu_{n+1}}{\mu^*}$

$Q^+$: # πελ σε στιγμή αναχωρ.




ΣΑΘΚ

$$p_0 = \frac{E\left[\begin{matrix}\text{χρονος σε 1 κυκλο}\\ \text{απασχολ. που } Q(t)=0\end{matrix}\right]}{E[\text{κύκλος απασχολ}]} = \frac{E[I]}{E[Z]}$$

$E[I] = 1/\lambda_0$

Άρα, $E[Z] = 1/\lambda p_0$, $E[Y] = E[Z] - E[I]$

<u>Η M|M|1 ουρά</u>

- Poisson($\lambda$) διαδ. αφίξεων
- Exp($\mu$) χρόνους εξυπ
- 1 υπηρ
- $\infty$ χωρητικότητα
- FCFC

$\lambda_i = \lambda,\ i \geq 0$

$\mu_i = \mu,\ i \geq 0$

Ευστάθεια $\iff B^{-1} = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}<\infty \iff B^{-1}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n<\infty$

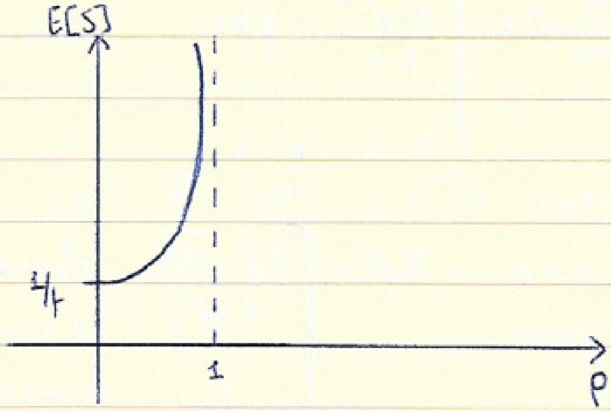
$\overset{\rho=\lambda/\mu}{\iff} \rho<1$

Τότε, $B^{-1}=\frac{1}{1-\rho}$

$$p_n = \begin{cases} B, & n=0 \\ B\frac{\lambda_0\cdots\lambda_{n-1}}{\mu_1\cdots\mu_n} \end{cases} = (1-\rho)\rho^n,\ n\geq 0 \quad (\text{Γεωμετρική})$$

$E[Q]=\sum_{n=0}^{\infty} n(1-\rho)\rho^n=\frac{\rho}{1-\rho}$

$E[S]\overset{\text{Little}}{=\!=}\frac{1}{\mu(1-\rho)}=\frac{1}{\mu-\lambda}$




$a_n=d_n=p_n$

PASTA: $a_n=p_n$

Μεμον. μεταβ: $a_n=d_n$

Κατανομή του χρόνου παραμονής

$$F_S(x)=\Pr[S\leq x]=\sum_{n=0}^{\infty}\Pr[Q^-=n]\underbrace{\Pr[S\leq x\mid Q^-=n]}_{\substack{\text{Πρέπει να περιμένει}\\ n+1\text{ εκθετικούς} \Rightarrow \text{άθροισμα } n+1\\ \text{εκθετικών = Erlang}}}=\sum_{n=0}^{\infty}(1-\rho)\rho^n\int_0^x \underbrace{\frac{\mu^{n+1}}{n!}u^n e^{-\mu u}}_{\text{πυκν. Erlang}(n+1,\mu)}du$$

$$=\int_0^x(1-\rho)\mu e^{-\mu u}\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\rho\mu u)^n}{n!}}_{e^{\rho\mu u}}du=\int_0^x\underbrace{\mu(1-\rho)e^{-\mu(1-\rho)u}}_{\text{πυκν. }\exp(\mu(1-\rho))}du \Rightarrow S\sim \mathrm{Exp}(\mu(1-\rho))$$

$E[I]=1/\lambda$

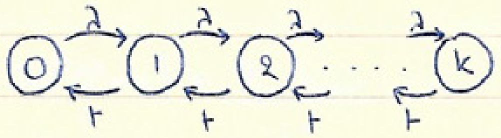
$p_0=\frac{E[I]}{E[Z]} \Rightarrow E[Z]=\frac{1/\lambda}{(1-\rho)}=\frac{1}{\lambda(1-\rho)}$

$E[Y]=E[Z]-E[I]=\frac{1}{\lambda(1-\rho)}-\frac{1}{\lambda}=\frac{\rho}{\lambda(1-\rho)}=\frac{1}{\mu(1-\rho)}$ } ο χρόνος από τη στιγμή που θα βρει το συστ. κενό μέχρι να αδειάσει ξανά

$$\Pr(\#\text{ πελ που εξυπ σε εναν κύκλο απασχόλησης} = 1) = \Pr(Exp(\mu) < Exp(\lambda)) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} \overset{\substack{\text{ευστάθεια} \\ \lambda<\mu}}{>} \frac{\mu}{\mu+\mu} = \frac{1}{2}$$

## Η Μ|Μ|1|k ουρά

$\{Q(t)\}$



Πάντα ευσταθές $\forall \rho = \lambda/\mu$ (πεπερ. χώρος καταστ)

$$B^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{k} \rho^n = \begin{cases} \dfrac{1-\rho^{k+1}}{1-\rho}, & \rho \neq 1 \\ k+1, & \rho = 1 \end{cases}$$

$$p_n = \begin{cases} B, & n=0 \\ B\rho^n, & n \geq 1 \end{cases} = B\rho^n = \begin{cases} \dfrac{(1-\rho)\rho^n}{1-\rho^{k+1}}, & 0 \leq n \leq k, \ \rho \neq 1 \\ \dfrac{1}{k+1}, & 0 \leq n \leq k, \ \rho = 1 \end{cases}$$

$$\lambda^* = \text{πραγμ. ρυθμός αφίξεων} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \lambda_n = \sum_{n=0}^{k-1} p_n \lambda = \lambda(1-p_k) = \lambda\left(1 - \frac{(1-\rho)\rho^k}{1+\rho^{k+1}}\right) = \lambda \frac{1-\rho^k}{1-\rho^{k+1}}$$

μακροπρ.
ποσοστό εξυπ. πελ $= \dfrac{\lambda^*}{\lambda} = \dfrac{1-\rho^k}{1-\rho^{k+1}}$

μακροπρ. ποσοσ. χαμένων πελ $= 1 - \lambda^*/\lambda$

$a_n$ = πιθ n πελ σε στιγμή αφιξης πελ $\overset{PASTA}{=} \dfrac{p_n \lambda}{\lambda} = p_n, \quad 0 \leq n \leq k$

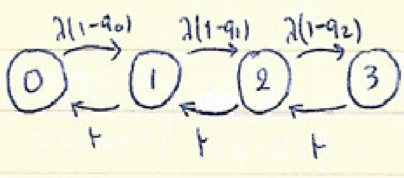
$a_n^{enter} =$ -||- εισόδου πελ $= \dfrac{p_n \lambda_n}{\lambda^*} = \begin{cases} \dfrac{p_n}{1-p_k}, & 0 \leq n \leq k-1 \\ 0, & n = k \end{cases}$ αφού μπήκε δεν είχε k

## Η Μ|Μ|1 ουρά με αποθαρρυνόμενους πελάτες

Όποιος αφικνούμενος βλέπει i κατά την άφιξη του αναχωρεί άμεσα με πιθ $q_i$

$\lambda_i = \lambda(1-q_i), \quad i \geq 0$

$\mu_i = \mu$



Ειδική περ. που δίνει κλειστούς τύπους: $q_i = \frac{i}{i+1}$

Τότε, $\lambda_i = \frac{\lambda}{i+1}$, $i \geq 0$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, bend left, "\lambda/1"] & 1 \arrow[l, bend left, "\mu"] \arrow[r, bend left, "\lambda/2"] & 2 \arrow[l, bend left, "\mu"] \arrow[r, bend left, "\lambda/3"] & \cdots \arrow[l, bend left, "\mu"] \end{tikzcd}$$

$B^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho^n}{n!} = e^{\rho} < \infty \ \forall \rho$ ΠΑΝΤΑ ευσταθής

$p_n = e^{-\rho} \frac{\rho^n}{n!}$, $n \geq 0$ (Poisson($\rho$))

$$\lambda^* = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \lambda_n = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\rho} \frac{\rho^n}{n!} \cdot \frac{\lambda}{n+1} = \frac{\lambda e^{-\rho}}{\rho} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho^{n+1}}{(n+1)!} = \mu \cdot e^{-\rho} \cdot (e^{\rho} - 1) = \mu(1 - e^{-\rho})$$

Εναλλακτικά: $\lambda^* = \mu^* = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \mu_n = \mu(1 - p_0) = \mu(1 - e^{-\rho})$

## Η M/M/1 ουρά με ανυπόμονους

Κάθε πελ. έχει $Exp(\nu)$ υπομονής που αν λήξει πριν αρχίσει η εξυπηρέτηση του αναχωρεί

$\{Q(t)\}$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, bend left, "\lambda"] & 1 \arrow[l, bend left, "\mu"] \arrow[r, bend left, "\lambda"] & 2 \arrow[l, bend left, "\mu+\nu"] \arrow[r, bend left, "\lambda"] & 3 \arrow[l, bend left, "\mu+2\nu"] \arrow[r, bend left, "\lambda"] & 4 \arrow[l, bend left, "\mu+3\nu"] & \cdots \end{tikzcd}$$

$$p_n = \begin{cases} B, & n = 0 \\ B \dfrac{\lambda^n}{\mu(\mu+\nu)\cdots(\mu+(n-1)\nu)}, & n \geq 1 \end{cases}$$

μακροπρ.
Ποσοστό εξυπ. πελατών $= \dfrac{\text{ρυθμός αναχωρ. λόγω εξυπηρ.}}{\text{ρυθμός αφίξεων}} = \dfrac{\sum_{n=1}^{\infty} p_n \cdot \mu}{\lambda} = \dfrac{\mu(1-p_0)}{\lambda}$

ρυθμός αναχωρ $= \sum_{n=1}^{\infty} p_n (\mu + (n-1)\nu)$

## Η M/M/1 ουρά με ταχύτητα εξυπηρέτησης

Ο υπηρέτης δουλεύει με ταχύτητα $v_n$ όταν υπάρχουν $n$ πελάτες στο σύστημα

$X \sim Exp(\mu) \xrightarrow{\text{πραγματικός}} \frac{X}{v_n} \sim Exp(\mu v_n)$

υπολειπ. χρόνος εξυπ (ονομαστικός)

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, bend left, "\lambda"] & 1 \arrow[l, bend left, "\mu v_1"] \arrow[r, bend left, "\lambda"] & 2 \arrow[l, bend left, "\mu v_2"] \arrow[r, bend left, "\lambda"] & 3 \arrow[l, bend left, "\mu v_3"] \arrow[r, bend left, "\lambda"] & 4 \arrow[l, bend left, "\mu v_4"] \end{tikzcd}$$

Ειδική περ. που δίνει κλειστούς τύπους : $\mu_n = n \rightarrow p_n = e^{-\rho} \frac{\rho^n}{n!}$ , $n \geq 0$

## Μάθημα 23ο (15/1/19)

# ~ Μοντέλα Διαχείρισης Αποθεμάτων ~

## Τύποι Μοντέλων

- Συνεχούς / Περιοδικής επιθεώρησης
- Στοχαστική / Ντετερμινιστική ζήτηση
- Backloging ή όχι (καθυστερημένη παράδοση ή όχι)
- Άμεση παράδοση παραγγελίας
- Συμπληρωματικά ή Αναπληρωματικά προϊόντα

αν πάρω το ένα θα πάρω και το άλλο ή κανένα

αν δε βρω το ένα θα πάρω το άλλο

## Το μοντέλο οικονομικής ποσότητας παραγγελίας με προκαθορισμένες ελλείψεις
## Economic Order Quantity (EOQ) model with planned shortages

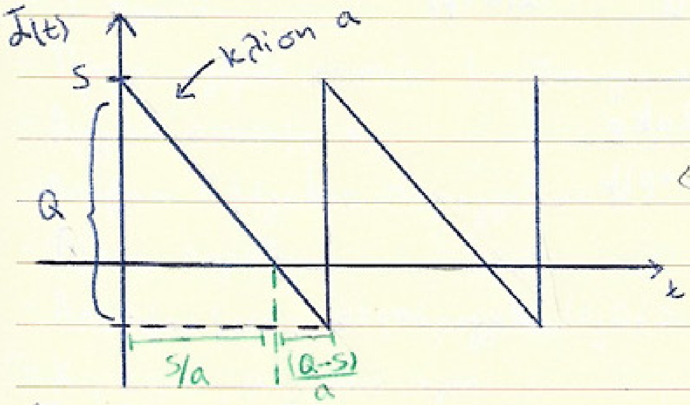
- Συνεχής επιθεώρηση
- Ντετερμ. ζήτηση με ρυθμό $a$ (1 προϊόν)
- Πάγιο κόστος τοποθ. παραγγ: $K$
- Κόστος παραγγ ανά μονάδα προϊόντος : $c$
- κόστος αποθήκ. -ll- & χρον. μον. : $h$
- Κόστος έλλειψης -ll- : $p$

(επιτρέπεται backloging)
- Άμεση παράδοση παραγγελίας
- Πολιτική $(R, Q)$

reorder point (πότε να παραγ)

quantity (πόσο να παραγ)

· Εξέλιξη αποθέματος $I(t)$




← θετ. αποθ ⇒ κόστος αποθήκευσης

← αρν. αποθ. ⇒ κόστος έλλειψης

Όταν φθάνω σε έλλειψη $Q-S$ παραγγέλνω $Q$ και φθάνω σε αποθ. $S$

$c(Q,S)$ = ρυθμός κόστους ανά χρονική μονάδα υπό την πολιτική $(Q,S)$

$$= \frac{\text{κόστος σε 1 κύκλο}}{\text{Διάρκεια κύκλου}} = \frac{K + cQ + h\int_0^{S/a}(S-at)dt + p\int_0^{(Q-S)/a} at\,dt}{Q/a}$$

$$= \frac{K + cQ + hS^2/2a + p(Q-S)^2/2a}{Q/a}$$

Άρα, $c(Q,S) = \frac{aK}{Q} + ac + \frac{hS^2}{2a} + \frac{p(Q-S)^2}{2Q}$

$$\frac{\partial c}{\partial S} = \frac{hS}{a} - \frac{p(Q-S)}{Q} = \frac{(h+p)S}{Q} - p$$

$$\frac{\partial c}{\partial Q} = -\frac{aK}{Q^2} - \frac{hS^2}{2Q^2} + \frac{p2(Q-S)2Q - p(Q-S)^2\cdot 2}{4Q^2}$$

$$= \frac{-aK}{Q^2} - \frac{hS^2}{2Q^2} + \frac{2pQ^2 - 2pQS - pQ^2 - pS^2 + 2pQS}{2Q^2}$$

$$= -\frac{aK}{Q^2} - \frac{(h+p)S^2}{2Q^2} + \frac{p}{2}$$

$$\frac{\partial^2 c}{\partial S^2} = \frac{h+p}{Q} \qquad \frac{\partial^2 c}{\partial S \partial Q} = -\frac{(h+p)S}{Q^2} \qquad \frac{\partial^2 c}{\partial Q^2} = \frac{2aK}{Q^3} + \frac{(h+p)S^2}{Q^3}$$

Το κρίσιμο σημείο είναι όταν $\frac{\partial c}{\partial S} = \frac{\partial c}{\partial Q} = 0 \Rightarrow S^* = \frac{p}{h+p} Q^*$

και $-\frac{ak}{Q^{*2}} - \frac{(h+p)p^2}{2(h+p)^2} + \frac{p}{2} = 0 \Rightarrow \frac{ak}{Q^{*2}} = \frac{ph}{2(h+p)}$

Άρα, $Q^* = \sqrt{\frac{2ak(h+p)}{ph}}$ και $S^* = \sqrt{\frac{2akp}{(h+p)h}}$

Θα ελέγξουμε αν όντως είναι ελάχιστα $\Leftrightarrow$ αν $c(Q,S)$ είναι κυρτή

Ο πίνακας Hesse

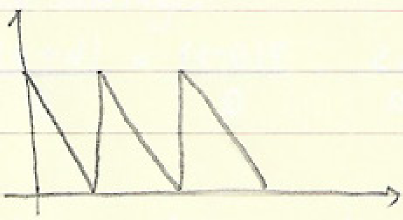
$$\begin{pmatrix} \partial^2 c/\partial S^2 & \partial^2 c/\partial S \partial Q \\ \partial^2 c/\partial S \partial Q & \partial^2 c/\partial Q^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{h+p}{Q} & -\frac{(h+p)S}{Q^2} \\ -\frac{(h+p)S}{Q^2} & \frac{2ak+(h+p)S^2}{Q^2} \end{pmatrix}$$ θετικώς ορισμένος

γιατί $\frac{h+p}{Q} > 0$ και $\underbrace{\frac{h+p}{Q} \cdot \frac{2ak+(h+p)S^2}{Q^2} - \frac{(h+p)^2 S^2}{Q^4}}_{\frac{(h+p)2ak}{Q^4}} > 0$

Άρα $(Q^*, S^*)$ ολικό ελαχ

Αν δεν επιτρέπονται ελλείψεις (κλασικό EOQ)

$S^* = Q^* = \sqrt{\frac{2ak}{h}}$



<u>Στοχαστικό EOQ</u>

- Παράδοση παίρνει T χρον. μον.
- Ζήτηση στη διάρκεια του $T = D \sim \underset{\text{γνωστή}}{\underline{F_D(x)}}$

Προσεγγιστική λύση

$a = \frac{E[D]}{T}$ και παραγγέλνω κατά το EOQ

# Μουτέλο του εφημεριδοπώλη (Newsvendor model)

- 1 προϊόν
- Προγρ. αγοράς επιπλέον μονάδων για την επόμενη περίοδο
- Αρχικό απόθεμα $x$
- Απόφαση: μέγεθος παραγγελίας $a$
- Άμεση παράδοση
- Απόθεμα μετά την παραγγελία $y=x+a$
- $K$, $c$, $h$, $p$ όπως πριν

$K$: πάγιο, $c$: κόστος αγοράς, $h$: κόστος ανά περίσσευμα, $p$: κόστος έλλειψης ανά κομμάτι

- $D$ ζήτηση $\sim \underbrace{F_D(x)}_{\text{γνωστή καταν}}$
- Υπόθεση: $p>c$

<u>Θεώρημα</u>: Η βέλτιστη πολιτική είναι $(s,S)$ "παραγγέλνω αν το απόθεμα είναι κάτω από $s$ ώστε να φθάσω στο $S$"

$$x<s \Rightarrow a^* = S-x$$

$$s \leq x \Rightarrow a^* = 0$$

όπου $S = F_D^{-1}\left(\frac{p-c}{p+Q}\right)$

$s$ η ελάχιστη λύση της $cs + \ell(s) = K + cS + \ell(S)$

όπου $\ell(y) = hE[\underbrace{(y-D)^+}_{\max(0,y-D)}] + pE[\underbrace{(y-D)^-}_{\max(0,D-y)}] = h\int_0^y (y-z)f_D(z)\,dz + p\int_y^\infty (z-y)f_D(z)\,dz$

κόστος λόγω περισ. ή έλλειψης αν μετά την παραγγελία το αποθ. είναι $y$

<u>Απόδειξη</u>

Κόστος αν ληφθεί η απόφαση $a$ (παραγγελία $a$) με απόθ. $x$ είναι

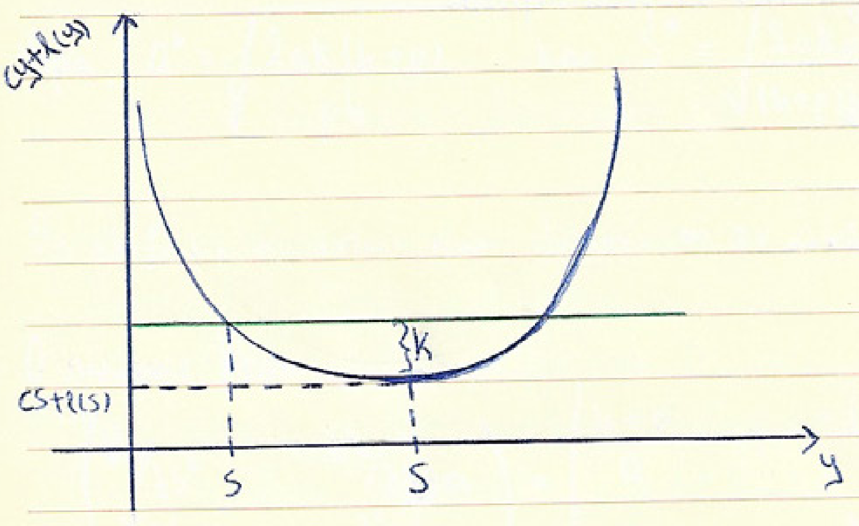
$$c(x,a) = \begin{cases} K + ca + \ell(x+a), & a>0 \\ \ell(x), & a=0 \end{cases} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{αποθ. μετά την} \\ \text{παραγγελία}}}{\overset{y=x+a}{=\!=}} \begin{cases} K + cy + \ell(y) - cx, & y>x \\ \ell(y), & y=x \end{cases}$$

Η συνάρτηση $\ell(y)$ είναι κυρτή

Για κάθε $d$ η $\underset{>0}{h}\cdot\underbrace{(y-d)^+}_{\substack{\text{κυρτή} \\ y<d \text{ είναι } 0 \\ \text{και μετά} \\ \text{ανεβαίνει}}} + \underset{>0}{p}\underbrace{(y-d)^-}_{\text{κυρτή}}$ είναι κυρτή οπότε εύκολα έχουμε και την κυρτότητα της $\ell(y)$

$f(y,d)$ κυρτή για κάθε $d$ ως προς $y$

$D$ τμ $\Rightarrow E[f(y,D)]$ κυρτή




Το πρόβλημα βελτιστοποίησης είναι η ελαχιστοποίηση της $c(x,a)$

$$\min_{y\geq x} c(x, \underset{\substack{\uparrow \\ y-x}}{a}) = \min(l(x), \min_{y>x} K + cy + l(y) - cx)$$

Περ 1η: $x > S \Rightarrow cy + l(y) \uparrow$ στο $(x, \infty)$

Άρα, $\min_{y>x}(k + cy + l(y) - cx) = k + l(x)$

Άρα, το βέλτιστο πιάνεται στο $y^* = x \ (a^* = 0)$

Περ 2η: $x \leq S \Rightarrow c(y) + l(y) \downarrow$ στο $(x, S)$ και $\uparrow$ στο $(S, \infty)$

Άρα, $\min_{y>x}(K + cy + l(y) - cx) = K + cS + l(S) - cx$

Άρα, έχω να βρω το $\min(l(x), \underbrace{k + cS + l(S)}_{cS + l(s)} - cx)$

Άρα, έχω να συγκρίνω $l(x)$, $cS + l(s) - cx \Leftrightarrow cx + l(x), cs + l(s)$

Άρα

$x < s$ βέλτιστο $y^* = S$, $a^* = S - x$

$s \leq x \leq S$ βέλτιστο $y^* = x$, $a^* = 0$

Άρα, η βέλτιστη πολιτική είναι $(s,S)$ και $S$ το ελαχ της $cy+l(y)$

Μένει να αποδείξω ότι $S = F_D^{-1}\left(\frac{p-c}{p+h}\right)$

Έχω $$\frac{d(cy+l(y))}{dy} = c + \frac{d}{dy}\left(hyF_D(y) - h\int_0^y \xi f_D(\xi)d\xi + p\int_y^\infty \xi f_D(\xi)d\xi - py(1-F_D(y))\right)$$
$$= c + hF_D(y) + \cancel{hyf_D(y)} - \cancel{hyf_D(\xi)} - \cancel{pyf_D(y)} - p + pF_D(y) + \cancel{pyf_D(y)}$$

Άρα, $\frac{d}{dy}(cy+l(y)) = 0 \Leftrightarrow c + (h+p)F_D(y) - p = 0 \Leftrightarrow F_D(y) = \frac{p-c}{h+p}$
$$\Leftrightarrow y = F_D^{-1}\left(\frac{p-c}{h+p}\right)$$

1-2 ασκήσει αναλυτική ΣΔΘΚ συνάρτηση-κόστος & μαρκοβιανή

1 Δυναμικό (ευκολό)

1 ουρές-αποθέματα κάτι απλό

## Μάθημα 24ο (17/1/19)

Τελευταίο Μάθημα

Ασκήσεις με Διδακτορικό

### Άσκ 1 Κεφ 8ο

- $N$ εργασίες για διεκπεραίωση
- Εργασία $i$ απαιτεί χρόνο $X_i \sim Exp(\mu_i)$ ανεξ
- Αν η $i$ διεκπ. σε χρόνο $s$ θα υπάρξει αμοιβή $R_i \cdot a^s$, $a \in (0,1)$

Να βρεθεί η διάταξη που μεγιστ. την μέση αμοιβή

### Μοντελοποίηση ως ΜΔΑ

Στάδιο: $T = \{0,1 \dots N\}$

Κατάσταση: # εργασιών που απομένουν στο στάδιο $t$ $(S_t)$

Απόφαση: η εργασία στο στάδιο $t$: $i \in S_t$

Δυναμική/πιθ. μεταβ: $S_t \xrightarrow{i} S_{t-1} = S_t \setminus \{i\}$ με πιθ 1
$$p_t(S_{t-1} | S_t, i) = \begin{cases} 1 & \text{αν } S_{t-1} = S_t \setminus \{i\} \\ 0 & \text{διαφ} \end{cases}$$

Αμοιβή: $r_t(S_t, i) = E\left[R_i a^{X_i + W_t}\right]$ οπου $W_t = \sum_{\ell \in \{1,2 \dots N\} \setminus S_t} X_\ell$ $\quad W_{t-1} = \sum_{\ell \in \{1,2 \dots N\} \setminus (S_t \setminus \{i\})} X_\ell = X_i + W_t$

Εξίσωση βελτιστοποίησης

$$V_t(S_t) = \max_{i\in S_t}\left[R_i E[a^{X_i+W_t}] + V_{t-1}(S_t\setminus\{i\})\right] = \max_{i\in S_t}\left[R_i E[a^{X_i+W_t}] + \max_{j\in S_t\setminus\{i\}}\left[R_j E[a^{X_i+W_{t-1}}] + V_{t-2}(S_t\setminus\{i,j\})\right]\right]$$

$$= \max_{i\in S_t}\max_{j\in S_t\setminus\{i\}}\left[R_i E[a^{X_i+W_t}] + R_j E[a^{X_i+X_j+W_t}] + V_{t-2}(S_t\setminus\{i,j\})\right]$$

Χρησιμοποιώντας το επιχειρ. της ανταλλαγής επιλέγουμε την $i$ από την $j$ $\Leftrightarrow$

$$R_i E[a^{X_i+W_t}] + R_j E[a^{X_j+X_i+W_t}] \geq R_j E[a^{X_i+W_t}] + R_i E[a^{X_i+X_j+W_t}]$$ $V_t(S_t)$

$$\overset{X_i \text{ ανεξ}}{\Leftrightarrow} R_i\left[E[a^{X_i}] - E[a^{X_i+X_j}]\right] \geq R_j\left[E[a^{X_j}] - E[a^{X_j+X_i}]\right]$$

$$\Leftrightarrow \frac{R_i E[a^{X_i}]}{1-E[a^{X_i}]} \geq \frac{R_j E[a^{X_j}]}{1-E[a^{X_j}]}$$

## Ασκ 2 | Κεφ 8

N εργασίες προς δίκη

Εργασία $i$ απαιτεί χρόνο $X_i$

Κόστος $c_i$ όσο η εργασία $i$ δεν έχει δίκη

Εύρεση βελτ. διάταξη που να ελαχ. το συνολικό αναμ. κόστος

Στάδιο $T = \{0,1,2\dots N\}$

Κατάσταση $S_t$: εργασίες που απομ. στο στάδιο $t$

Απόφαση: $i\in S_t$

Δυναμική: $S_t \xrightarrow{i} S_t\setminus\{i\}$ με πιθ 1

Κόστος: $C_t(S_t,i) = \sum_{j\in S_t} c_j X_i$

Εξίσωση βελτιστοποίησης

$$V_t(S_t) = \min_{i\in S_t}\left(\sum_{j\in S_t} c_j X_i + V_{t-1}(S_t\setminus\{i\})\right) = \min_{i\in S_t}\min_{j\in S_t\setminus\{i\}}\left[\sum_{j\in S_t} c_j X_i + \sum_{\ell\in S_t\setminus\{i\}} c_\ell X_j + V_{t-2}(S_t\setminus\{i,j\})\right]$$

Χρησιμοποιώντας το επιχειρ. της ανταλλαγής επιλέγω την $i$ μεταξύ των $i$ και $j$ $\Leftrightarrow$

$$\sum_{j\in S_t} c_j X_i + \sum_{\ell\in S_t\setminus\{i\}} c_\ell X_j \geq \sum_{k\in S_t} c_k X_j + \sum_{m\in S_t\setminus\{j\}} c_m X_i \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \frac{c_j}{X_j} \leq \frac{c_i}{X_i}$$

Ασκ2 | Κεφ 7ο (μοιάζει με πρόγραμμα κατανομής πόρων)

Κεφάλαιο $y$

$N$ προσπάθειες για κατασκευή συστήματος

Αν επενδύσω $x$ σε μια προσπαθ. τότε το σύστημα κατασκ με $p(x)$

$[\,p(0)=0\ ,\ p(y)<1\ ,\ p(x)\uparrow$ στο $[0,y]\,]$

Εύρεση βέλτιστης πολιτικής επένδυσης

Διατύπωση ως ηγο

$$\min_{x_1,x_2\ldots x_N} \prod_{i=1}^{N} (1-\underset{\uparrow}{p(x_i)})$$

πιθ. να πετύχει

Περιορισμός

$$\sum_{i=1}^{N} x_i \le y$$

Για να το κάνω σαν το πρόβλημα κατανομής πόρων

Έχουμε ότι

$$\min \prod_{i=1}^{N}(1-p(x_i)) \sim \min \sum_{i=1}^{N} \log(1-p(x_i))$$

$$= \max \sum_{i=1}^{N} \underbrace{-\log(1-p(x_i))}_{f(x_i)}$$

Μοντελοποίηση ως Δ.Π

Στάδιο $n$ = απομένουν $n$ το πολύ προσπάθειες

Κατασταση $x_n$: Υπολειπόμενη περιουσία στο στάδιο $n$

Απόφαση $a_n$: Τμήμα της περιουσίας που θα χρησιμοποιήσουμε στο στάδιο $n$

Δυναμική: $x_n \xrightarrow{a_n} x_{n-1} = x_n - a_n$ με πιθ 1

Κόστος: $c_n(x_n, a_n) = -\log(1-p(a_n))$

$$V_n(x_n) = \max_{a_n\in(0,x_n)} \left(-\log(1-p(a_n)) + V_{n-1}(x_n-a_n)\right)$$

Υπενθύμιση Προβλ. καταν. πόρων

$\max \sum_{i=1} f(x_i)\ ,\ \sum x_i = y$

Λυση: Αν $f(0)=0$, $f\uparrow$ κυρτη ...

Τα παίρνω κατευθείαν έτσι δεν τα ξανά λύνω

Χρησιμοποιώντας τη λύση στο προβλ. κατανομής πόρων έχουμε:

(i) Αν $f(x) = \log(1-p(x))$ κοίλη $\Rightarrow \underset{\text{κυρτή}}{-f(x)}$

Έχουμε ότι $f(0)=0$, $f(x)\uparrow$ διότι

$p(x)\uparrow \Rightarrow 1-p(x)\downarrow \Rightarrow \log(1-p(x))\downarrow$

$\Rightarrow -\log(1-p(x))\uparrow$

οπότε η βέλτιστη απόφαση είναι $a_{n^*}^* = y$ για κάποιο $n^*\in\{1,2\ldots N\}$ και $a_n^* = 0\ \forall n\neq n^*$ $[\ a^* = (0,0\ldots,\overset{n^*\text{ καταστ.}}{y},0\ldots 0)$

(ii) Αν $f(x) = \log(1-p(x))$ κυρτή $\Rightarrow -f(x)$ κοίλη, τότε η βέλτιστη απόφαση $a_n^* = \frac{y}{N}$ ισοπίθανα στις $N$ εργασίες

## Ασκ 4 | Κεφ 7ο

N πονταρίσματα

Σε κάθε γύρο ποντάρουμε κλάσμα της περιουσίας μας: y

Πιθ. νίκης γνωστή σε κάθε γύρο σύμφωνα με σκ $F_X(0)=0$, $F_X(1)=1$

(τμ $X \in [0,1]$)

Να βρεθεί πολιτική πονταρίσματος ώστε να μεγιστοπ. ο λογάριθμος της τελικής περιουσίας

Στάδιο $t \in \{0, \ldots N\}$ = # σταιχ που απομένουν

Κατάσταση $(x_t, s_t)$ = (περιουσία στο στάδιο t, πιθ. νίκης στο στάδιο t)

Δυναμική $p_t((x_{t-1}, s_{t-1}) | (x_t, s_t), a_t) = \begin{cases} p, & x_{t-1} = x_t + a_t x_t = x_t(1+a_t) \\ 1-p, & x_{t-1} = x_t - a_t x_t = x_t(1-a_t) \end{cases}$

Αμοιβή

$c_t((x_t, s_t), a_t) = 0$

$c_0((x_0, s_0)) = \log x_0$

Εξίσωση βέλτιστης τιμής

$v_0(x) = \log x$

$v_t(x,s) = \max\limits_{a \in [0,1]} \Big[ \underbrace{s}_{\text{πιθ νίκης}} \cdot {}_0\int^1 v_t(x(1-a_t), p)\, dF_X(p) + (1-s) \cdot {}_0\int^1 v_{t-1}(x(1-a), p)\, dF_X(p) \Big]$

Λύση

$v_1(x,s) = \log x + \max\limits_{a \in [0,1]} \underbrace{\left[ s \log(1+a) + (1-s) \log(1-a) \right]}_{h(a)}, \quad x > 0$

μεγιστ. $h(a)$ (σω, πργ)

$h'(a) = 0$ και $h'' < 0 \Rightarrow \ldots \Rightarrow a^* = \begin{cases} 2s-1, & s \geq 1/2 \\ 0, & s < 1/2 \end{cases}$

Άρα, η βελτ. αποφ. στο στάδιο 1 είναι η $a_1^*(s) \begin{cases} 2s-1, & s \geq 1/2 \\ 0, & \text{διαφ} \end{cases}$

Τότε, $v_1(x,s) = \begin{cases} \log x + \log 2 + s \log s + (1-s) \log(1-s), & s \geq 1/2 \\ \log x, & \text{διαφ} \end{cases} = u(s) + \log x$

Υποθέτουμε ότι στο στάδιο t βέλτιστη απόφαση θα είναι

$a_n^*(s) = \begin{cases} 2s-1, & s \geq 1/2 \\ 0, & \delta\iota\alpha\varphi \end{cases}$ και $V_t(x,s) = \log x + c_t(s)$

Το δείχνουμε με επαγωγή

Για $t = 1$ ισχύει. Υποθέτουμε ότι ισχύει για $t-1$ και τότε

$$V_t(x,s) = \max\left\{ s \cdot \int_0^1 \log(x(1+a)) + c_{t-1}(p)\, dF_x(p) + (1-s) \int_0^1 \log(x(1-a)) + c_{t-1}(p)\, dF_x(p) \right\}$$

$$= V_1(x,s) + \int_0^1 c_{t-1}(p)\, dF(p)$$

Έτσι η βέλτιστη απόφαση είναι όπως στην $V_1$: $a_t^*(s) = \begin{cases} 2s-1, & s \geq 1/2 \\ 0, & s < 1/2 \end{cases}$