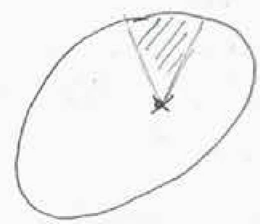
2ος Νόμος Kepler
(Πόρισμα 5)

25.02.2020
2ο Μάθημα

Ισα εμβαδα σε ισους χρονους

$\Longleftrightarrow$

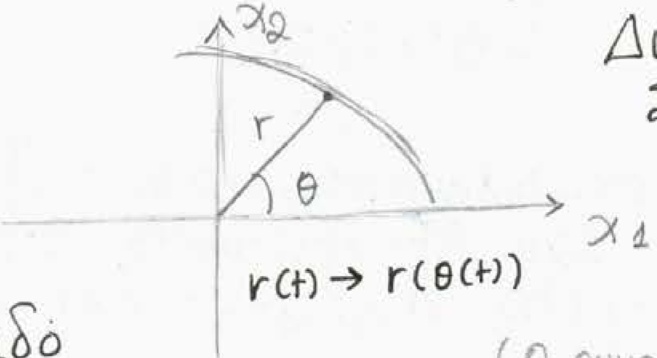
Διατηρηση της Στροφορμης



Σχολια:

Στροφορμη : $h = mr^2\theta'$

Θεωρουμε πολικές συντεταγμενες



Διατηρηση Στροφορμης : $\frac{dh}{dt} = 0$

$mr^2\theta' = $ σταθερο
>0 ή <0
$\theta' > 0$ ή $\theta' < 0$

(θ συναρτηση του r και r συναρτηση του θ
Συγκεκριμενο r
συγκεκριμενο θ)

$A(t)$: εμβαδο

$$\frac{d(A(t))}{dt} = \frac{1}{2} r^2(\theta(t)) \frac{d\theta}{dt} = C_1$$

Αρα το εμβαδο $A(t)$ ειναι γραμμικη συναρτηση

$A(t) = C_1 t + C_2$

$A(t_2) - A(t_1) = C_1(t_2 - t_1)$

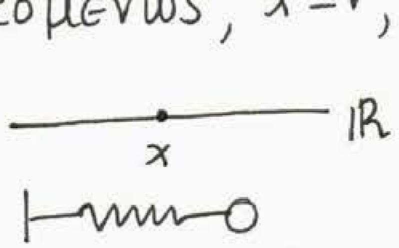
(σε ισα Δt θα κανει ισα εμβαδα)

Παρατηρηση:

$$x'' = \frac{F(x)}{m}$$

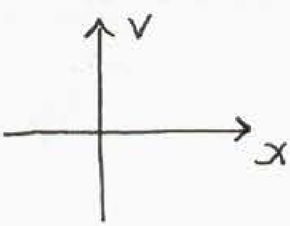
α) Εστω $x \in \mathbb{R}$

Επομένως, $x' = v$, $v' = \frac{F(x)}{m}$



Αρα $\begin{cases} x' = v \\ v' = \frac{F(x)}{m} \end{cases}$

Χώρος φάσης



β) $x \in \mathbb{R}^2$, $\vec{x} = (x_1, x_2)$

$$\vec{x}'' = \frac{\vec{F}(x)}{m}$$

$$x_1'' = \frac{F_1(\vec{x})}{m}, \quad x_2'' = \frac{F_2(\vec{x})}{m}$$

$$x' = v \longrightarrow \begin{cases} x_1' = v_1 \\ x_2' = v_2 \end{cases}$$

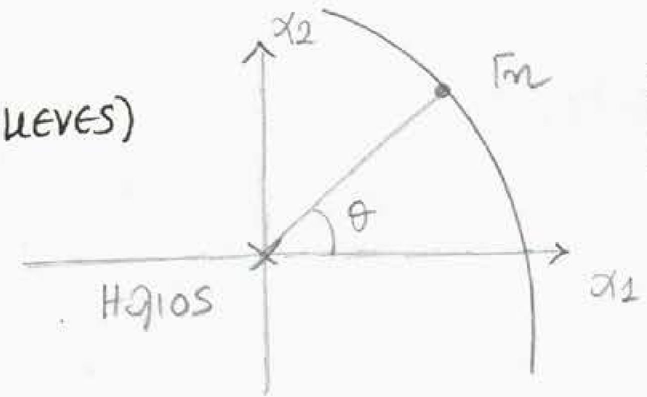
$$\vec{v}' = \frac{\vec{F}(x)}{m} \longrightarrow \begin{cases} v_1' = \dfrac{F_1(x)}{m} \\ v_2' = \dfrac{F_2(x)}{m} \end{cases}$$

Παρατηρω λοιπον οτι εχω αρτιο αριθμο εξισωσεων, δηλαδη και στο $\mathbb{R}^3$ εχω έξι εξισωσεις, Επομενως, εχω ειδικες περιπτωσεις Χαμιλτονιανων συστηματων.

Δ. Ελλειπτικές Τροχιές (Κωνικές Τομές)
$1^{ος}$ Νομος Kepler

Νομος παγκοσμιας ελξης: $\vec{F} = \pm \dfrac{G m M \vec{x}}{|x|^3}$ (ΣΥΝΤΗΡΗΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ)

(πολικες συντεταγμενες)



$r = |x|$

$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$

(ηλιος: αρχη των αξονων)

$$\left.\begin{array}{l} F = -\nabla \vec{V}(x) \\ \vec{V}(x) = -\dfrac{1}{|x|} \end{array}\right\} \text{Συντηρητικό πεδιο}$$

(γραφεται ως συναρτηση δυναμικου)

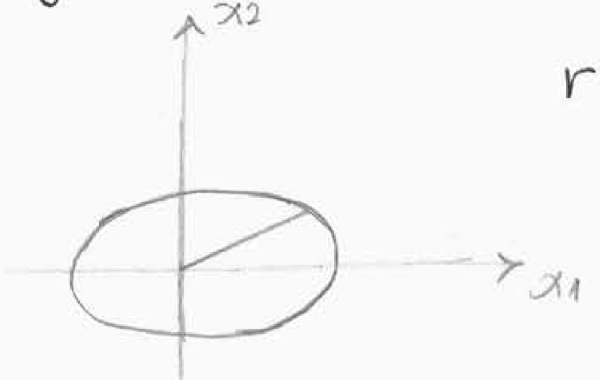
προκυπτει απο το $\dfrac{\partial}{\partial x_1}\left(|x|^{-1}\right)$

$$\vec{F} = -\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3}$$

Υποθετω, οτι $h \neq 0$ η κινηση δινεται απο το νομο

$$x'' = \frac{F}{m}$$

Θα δειξουμε για την περιπτωση των πλανητων



$r(1+\varepsilon\cos\theta) = σταθ = \ell$

οπου ε: εκκεντροτητα

$$\Leftrightarrow x_1^2(1-\varepsilon^2) + x_2^2 + 2\varepsilon x_1 - \ell^2 = 0$$

$\varepsilon < 1$: ελλειψη $\quad \varepsilon = 1$: παραβολη

$\varepsilon > 1$: υπερβολη $\quad \varepsilon = 0$: περιφερεια

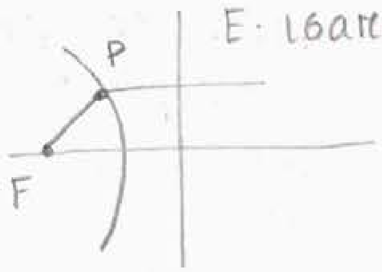
1η λυση :

→ αναλογα με το πως τεμνεις εχεις ελλειψη, υπερβολη, ..

2η λυση

E · ισαπεχουσα

$$\varepsilon = \frac{d(P,F)}{d(P,E)}$$



→ στην παραβολη οι αποστασεις ειναι ισες

Ορίζουμε, $u(t) = \frac{1}{r(t)} = -V$

Λήμμα 6:

μεταφορική → στροφική

$$E_K = \frac{1}{2} m |x'|^2 = \frac{1}{2} m \Big[\underbrace{(r')^2 + (r\theta')^2}_{(*)} \Big] \quad (1)$$

(*) προηγ. μαθ.

$x(t) = r(t)\,i(t)$, $x'(t) = r'\vec{i} + (i^2\theta')\frac{1}{r}\vec{j}$

$$E_K = \frac{1}{2}\frac{h^2}{m}\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right]$$ (εδώ γίνεται απαλοιφή του χρόνου, u συνάρτηση του θ)

Απόδειξη:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{u}\right)\frac{du}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta}\frac{h}{r^2 m}$$

$\frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{h}{m}$

$$= -\frac{h}{m}\frac{du}{d\theta}$$

$$E_K = \frac{1}{2} m \left[\left(\frac{h}{m}\right)^2 \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + r^2(\theta')^2 \right] =$$

$$= \frac{1}{2} m \left[\text{—\,〃\,—} + \frac{h^2}{(mr)^2} \right] = \frac{1}{2}\frac{h^2}{m}\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right]$$

$E_K = E - V = E + u$ (2) ⇝ Διατήρηση της μηχανικής ενέργειας

(1),(2) ⇒ $\left(\frac{2m}{h^2}\right)(E+u) = \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2$ (1ης τάξης) (3)

Διαφορίζουμε την (3) ως προς θ:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{m}{h^2}$$ (Δεν πάμε στον 2ο Νόμο)

$$u(\theta) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{λυση} \\ \text{ομογενους}}}{C\cos(\theta+\theta_0)} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ειδικη} \\ \text{λυση}}}{\frac{m}{h^2}} \longleftarrow \text{Γενικη λυση} \quad (5)$$

$$\Rightarrow \frac{du}{d\theta} = -C\sin(\theta+\theta_0)$$

⋮ (πραξεις)

$$\xrightarrow{(3)} C = \pm \frac{1}{h^2}\left(2mh^2E + m^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad (4)$$

$$(4),(5): u(\theta) = \frac{m}{h^2}\left[1 \pm \left(1+\frac{2Eh^2}{m}\right)^{\frac{1}{2}} + \cos(\underbrace{\theta+\theta_0}_{=\theta})\right]$$

Χωρις βλαβη της γενικοτητας, $\theta+\theta_0 \simeq \theta$ και $\cos(\theta+\pi) = -\cos\theta$ (κανω καταλληλη αλλαγη εω να φυγει το ενα προσημο)

$$\text{Αρα, } r(\theta) = \frac{h^2/m}{\left(1+\left(\frac{2Eh^2}{m}\right)^{1/2}\cos\theta\right)+1}$$

Κωνικές τομες: $\varepsilon = \left(1+\frac{2Eh^2}{m}\right)^{\frac{1}{2}}$

Παρατηρησεις:

$$u(\theta) > 0 \Rightarrow \left(1+\frac{2Eh^2}{m}\right)^{\frac{1}{2}}\cos\theta > -1$$

Στην περιπτωση του πλανητη το θ παιρνει και την τιμη π

$$\left(1+\frac{2Eh^2}{m}\right)^{\frac{1}{2}}(-1) > -1$$

$\varepsilon < 1$: Ελλειψη

Ασκησεις: 2, 3, 4, 6, 7 (Smale)

2. Ποια ειναι συντηρητικα;

$F = (-x^2, -2y^2)$

$F = (x^2 - y^2, 2xy)$

$$F = \nabla V = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2} \right)$$

$$x^2 - y^2 = \frac{\partial V}{\partial x_1}$$

$$2xy = \frac{\partial V}{\partial y}$$

1.7: Αλικακος

Καλογεροπουλος