03/03/2020
4º Μάθημα

Ασκήσεις [HS]

2) Ποια από τα παρακάτω είναι συντηρητικά πεδία στο $\mathbb{R}^2$;

α) $F(x,y) = (-x^2, -2y^2)$
β) $F(x,y) = (x^2-y^2, 2xy)$
γ) $F(x,y) = (x,0)$

Λύση

F συντηρητικό αν $\vec{\nabla}\times\vec{F}=0$ (αστρόβιλο)

Έστω $F=(F_1,F_2,F_3)$ τότε,

$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & k \\ \partial x & \partial y & \partial z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \partial y & \partial z \\ F_2 & 0 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} \partial x & \partial z \\ F_1 & 0 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} \partial x & \partial y \\ F_1 & F_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \underbrace{-\cancel{\frac{\partial F_2}{\partial z}} + \cancel{\frac{\partial F_1}{\partial z}}}_{\text{δεν εξαρτάται από το } z} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\vec{k}$$

↳ εξωτερικό γινόμενο ενός πεδίου με διαφορικό τελεστή

Τελικά, $\vec{\nabla}\times\vec{F} = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}$

α) $F_1 = -x^2$
$F_2 = -2y^2$

Ελέγχω τη σχέση μου: $\frac{\partial F_2}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial F_1}{\partial y} = 0 \rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{F}=0$
Συντηρητικό

β) $\frac{\partial F_1}{\partial y} = -2y$

$\frac{\partial F_2}{\partial x} = 2y$

$\vec{\nabla} \times \vec{F} \neq 0$

($\underset{=0}{y=0}$ μονο, αρα οχι παντου)

Οποτε δεν ειναι συντηρητικο

γ) $\frac{\partial F_2}{\partial x} = 0$

$\frac{\partial F_1}{\partial y} = 0$

$\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$

Συνεπως, ειναι συντηρητικο.

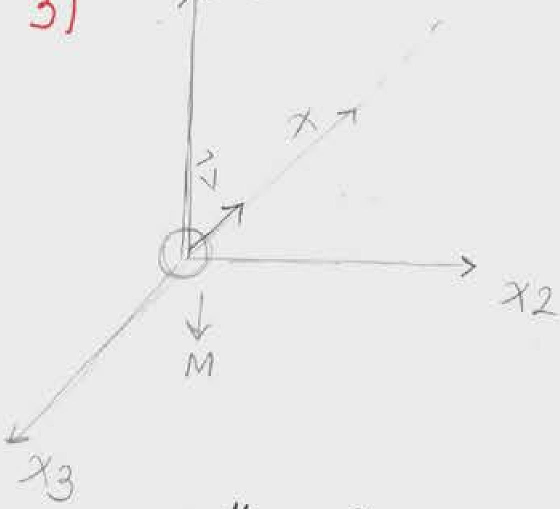
Ενας ισοδυναμος τροπος ειναι να δειξω οτι $\vec{F} = -\nabla \vec{V}$ (γραφεται ως συναρτηση δυναμικου)

Υποθετω C^2

$F_1 = \frac{\partial V}{\partial x}$ $\quad F_2 = \frac{\partial V}{\partial y}$

$\frac{\partial F_1}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x}$

3)



Υποθετω τον προσανατολισμο ορίζοντας ενα μοναδιαιο διανυσμα $\vec{v}$

$x(t) = r(t)\vec{v}$

$r(0) > 0$ (κινειται προς τα εξω)

$r'(0) > 0$

$r'' = -\frac{GM}{r^2}$ (επιβραδυνση)

Λυση

Παρατήρηση: Όταν έχουμε μια εξίσωση $2^{ης}$ τάξης μπορώ να την μετατρέψω σ' ένα σύστημα εξισώσεων $1^{ης}$ τάξης [AK §1.7]

$$y'' = h(y, y') \Leftrightarrow \begin{cases} v = \dfrac{dy}{dt} \\ v\dfrac{dv}{dy} = h(y, v) \end{cases}$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dy}\frac{dy}{dt} = v\frac{dv}{dy}$$

$t \to y(t)$: θεωρώ ότι τοπικά αντιστρέφεται
$t = t(y)$

Γράφουμε λοιπόν, $r'' = -\dfrac{GM}{r^2} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} v = \dfrac{dr}{dt} & (1) \\ v\dfrac{dv}{dr} = -\dfrac{GM}{r^2} & (2) \end{cases} \to \int_{u_0}^{u} v\,dv = -\int_{r_0}^{r} \frac{GM}{r^2}\,dr$$

$$\Rightarrow \dots \Rightarrow u_0^2 + 2GM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) = u^2 \quad (3)$$

Παρατήρηση (Πρόβλημα Διαφυγής)

Η κίνηση είναι αντιστρέψιμη σε πεπερασμένο χρόνο αν η ταχύτητα (αρχική) δεν είναι αρκετά μεγάλη δηλαδή

$$= \left(u_0^2 - \frac{2GM}{r_0}\right) + \frac{2GM}{r} \Rightarrow u_0^2 < \frac{2GM}{r}$$

Απόδειξη

1) Έστω ότι $u_0^2 \geq \dfrac{2GM}{r}$

Θα δείξω ότι δεν αντιστρέφεται

Λογω αρνητικόν της συνθηκης ανεης εχω οτι

$$u^2 = \left(u_0^2 - \frac{2GM}{r_0} \right) + \frac{2GM}{r} \quad \text{θετικο}$$

i) $u_0^2 - \frac{2GM}{r_0} > 0 \Rightarrow u^2 \geq u_0^2 - \frac{2GM}{r_0} > 0$

$u \neq 0$ αρα $u > 0 \ \forall r$

(διοτι "ξεκινησε" θετικα) $r'(0) > 0$

Εφοσον η ταχυτητα εχει κατω φραγμα και

$$\frac{\partial r}{\partial t} \geq \sqrt{u_0^2 - \frac{2GM}{r_0}}$$

$$\int_{t_0}^{t} \frac{\partial r}{\partial t} \geq \int_{t_0}^{t} \sqrt{u_0^2 - \frac{2GM}{r_0}} \Rightarrow r(t) - r_0 \geq \sqrt{\ \ldots\ } \ (t - t_0)$$

(πάω γραμμικα στο απειρο)

ii) $u_0^2 - \frac{2GM}{r_0} = 0$

Απο (3) $\Rightarrow u = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2GM}{r}} \Rightarrow \sqrt{r}\, dr = \sqrt{2GM}\, dt$$

$$\frac{2}{3} r^{3/2} \Big|_{r_0}^{r} = \sqrt{2GM}\, t$$

$r^{3/2} \sim t^{2/3}$

$r(t) \sim t$

$t \gg 1$

(Δεν κινουμαι πλεον γραμμικα, "φευγω" πιο αργα)

2) Εστω οτι $u_0^2 < \frac{2GM}{r_0}$

$$u^2 = \frac{2GM}{r} - k^2$$

$u = u(r) \mid u(r_0) > 0$

$\exists r^*$ τω $u(r^*) = 0$

Σχολιο: $u(r) = \frac{dr}{dt}$

$u(r^*) = 0 \Rightarrow r^*$ ειναι σημειο ισορροπιας;;

Το $r \to u(r)$ δεν ειναι Lipschitz στο $r = r^*$. Συνεπως το r^* δεν ειναι σημειο ισορροπιας

$$\frac{\partial u}{\partial r}(r^*) = \infty$$

$$u(r^*) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{2GM}{r^*} - k^2} = 0$$

$$u(r) = \sqrt{\frac{2GM}{r} - k^2}$$

$$\frac{du}{dr} = \frac{1}{2}\left(\dots\right)^{-1/2} \cdot \left(-\frac{1}{r^2}\right)(2GM)\Big|_{r=r^*} = \infty$$

$$(1) \Rightarrow \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2GM}{r} - k^2}$$

$$dr = \sqrt{\frac{2GM}{r} - k^2}\, dt$$

$$\underbrace{\int_{r_0}^{r^*} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2GM}{r} - k^2}}}_{= I} = \int dt$$

$$I = \int_{r_0}^{r^*} \frac{\sqrt{r}}{k\sqrt{r^* - r}} = \int_0^T dt = T$$

$T < \infty$

$$T=\int_{r_0}^{r^*}\frac{\sqrt{r}}{k\sqrt{r^*-r}}\,dr \leq \frac{\sqrt{r^*}}{k}\int_{r_0}^{r^*}\frac{1}{\sqrt{r^*-r}}\,dr < \infty$$

(∄ ΣΗΜΙΤΙ)

2.2.3 [ΑΚ]

Θεωρημα Picard (Project)

ΣΕΛ 90

05/03/2020
5º Μάθημα

Γραμμική θεωρία ⇒
Γραμμικοποίηση μη γραμμικών συστημάτων

$x' = Ax, \quad A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}$

Θεωρούμε την περίπτωση όπου $\det A \neq 0$

ΣΙ: $Ax = 0 \Rightarrow x = 0$

Κανονικές Μορφές (Hale-Kocak)

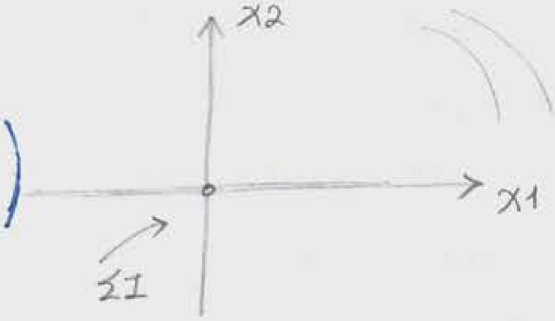
Jordan μορφή
(θεωρία για 2×2)

↳ 2×2 όλη η αλγεβρική θεωρία

$$J = \left\{ \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right\}$$

↑ πραγματικές ↑ μιγαδικές ↑ Jordan block

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$



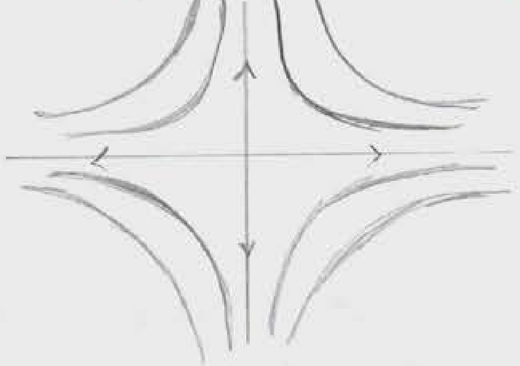
← επίπεδο φάσης (έξω καμπύλες)

Θεώρημα:

Δοθέντος $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, τότε $\exists$ αντιστρέψιμος P τ.ω. ($\det P \neq 0$)

$P^{-1}AP = J$

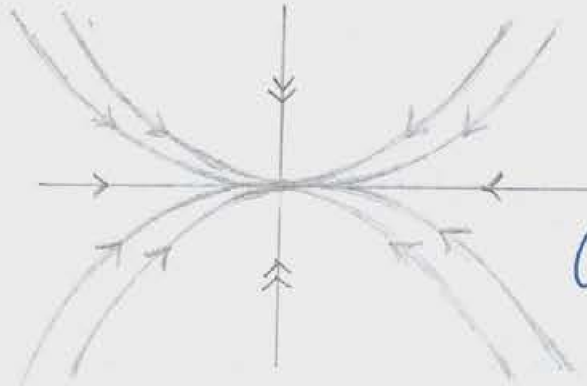
1. Πραγματικές - Διαγωνοποιήσιμος



κανονική

$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$

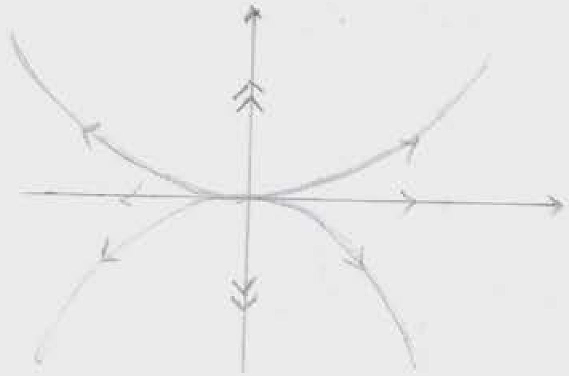
Σάγμα



ευσταθής κομβος

$0>\lambda_1>\lambda_2$

($t\to\infty$ υπερισχυει η e_1 κατευθυνση)



$0<\lambda_1<\lambda_2$

ασταθής κομβος

($t\to\infty$ υπερισχυει η e_2 κατευθυνση)

$$0=\det(A-\lambda I)=\lambda^2-(trA)\lambda+\det A$$

$$\Delta=(trA)^2-4\det A\geq 0$$

$x'=Ax$, A γενικος πινακας

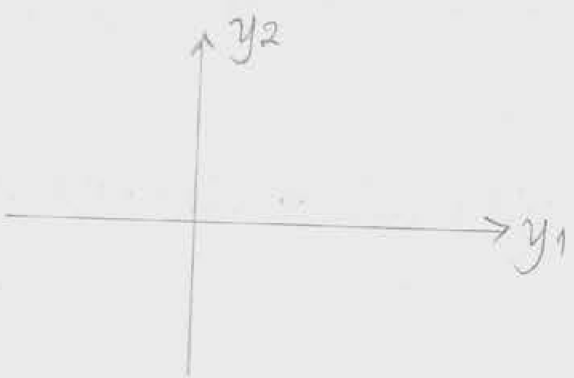
Κάνω εναν μετασχηματισμο

$x(t)=Py(t)$, οπου P οπως στο θεωρημα

$$x'(t)=Py'(t)=APy(t)$$

$$Ax(t)=APy(t)$$

$$y'=P^{-1}APy$$



Παρατηρηση [ΑΚ §10]

Γραμμικοι μετασχηματισμοι στο $\mathbb{R}^2$ παιρνουν ευθειες σε ευθειες και περιφερειες σε ελλειψεις

↳ μιγαδική περιπτωση

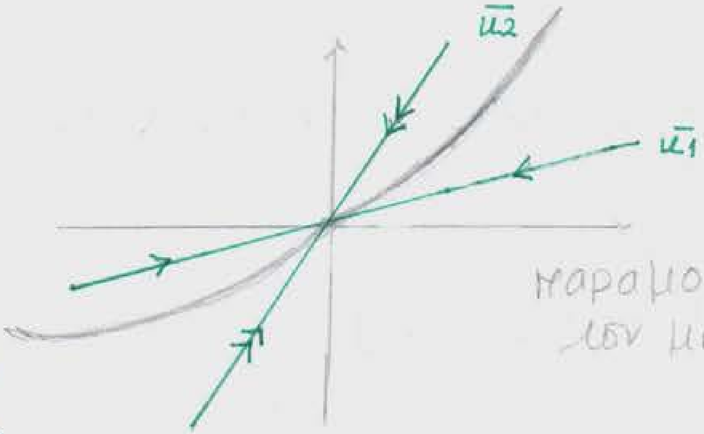
$\lambda_1 \leftrightarrow \bar{u}_1$

$\lambda_2 \leftrightarrow \bar{u}_2$

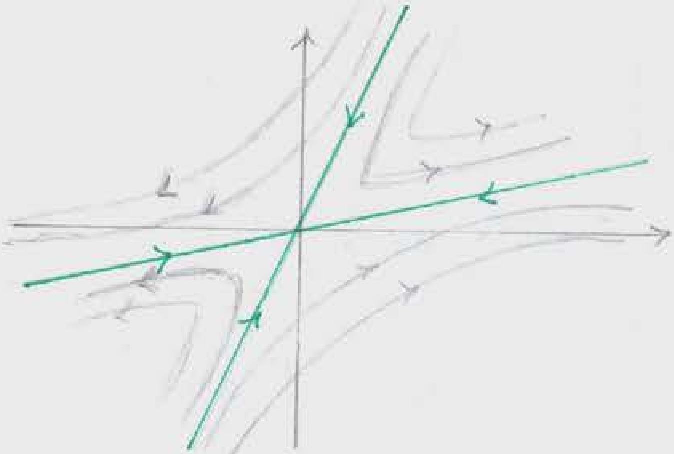
$\lambda_2 < \lambda_1 < 0$

$\longrightarrow$ Διαγωνοποιήσιμη

Ευσταθής κόμβος



παραμόρφωση των μετ/σμών P



Σάγμα

(ασυμπτωτικά ευσταθές διότι $e^{\lambda_2 t} \to 0$ καθώς $t \to \infty$)

Οι λύσεις είναι: $x(t) = c_1 \bar{u}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \bar{u}_2$

Παράδειγμα:

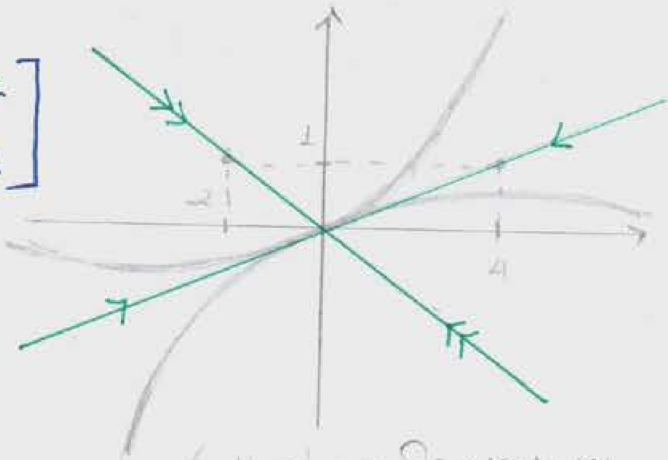
$$x' = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1/2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$\det A = 4 \qquad \lambda_1 = -1$

$trA = -5 \qquad \lambda_2 = -4$ $\qquad \to$ ευσταθής κόμβος

Ιδιοδιανύσματα:

$$\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1/2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = (-1) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$



$-2x_1 + 4x_2 = -x_1$

$x_1 = 4x_2 \to \bar{u}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$

ομοίως $\bar{u}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

(Η λύση δεν τέμνει το ιδιοδιάνυσμα παρά μόνο στο 0 (εφάπτεται))

Σχόλιο:

Οι ιδιοκατευθυνσεις ειναι αναλλοιωτες

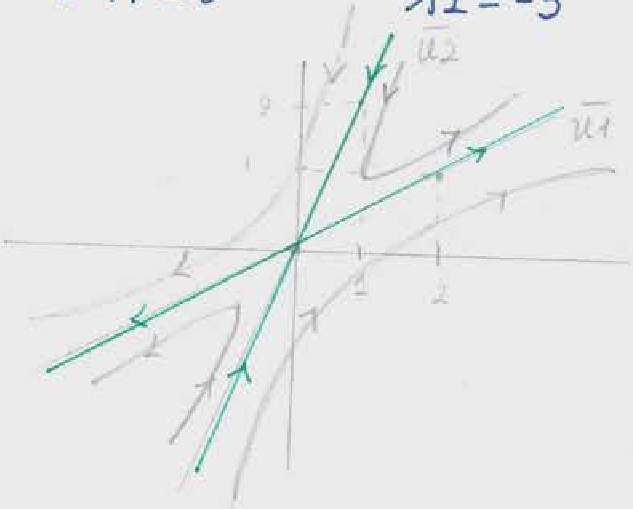
$$x' = Ax$$
$$x(0) = x_0$$
$$x_0 \in [u_i] \Rightarrow x(t) \in [\bar{u}_i]$$

παραδειγμα:

$$x' = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$\det A = -9$ $\quad \lambda_2 = 3$ $\quad u_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$trA = 0$ $\quad \lambda_1 = -3$



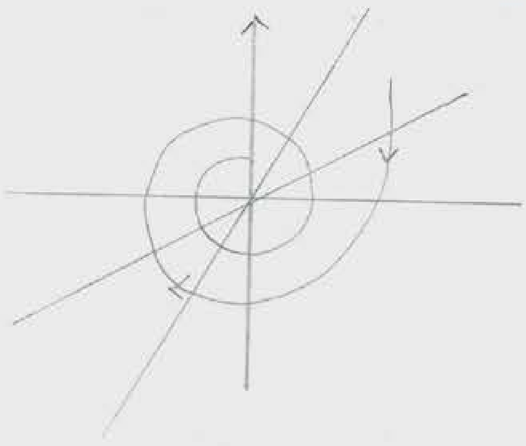
$u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

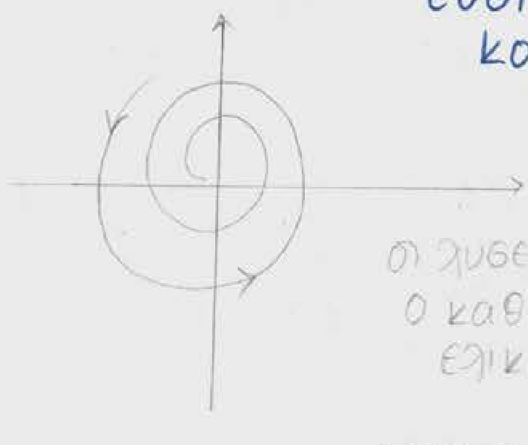
2. Μιγαδικές Ιδιοτιμες

Κανονική Μορφή

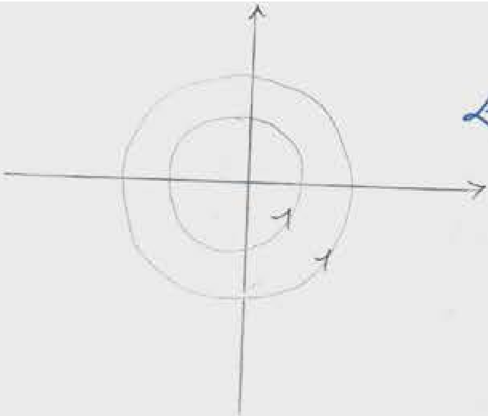
$$x' = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} x \qquad \lambda_\pm = a \pm bi$$

ευσταθής
κομβος (εστια)
$a < 0$





οι λυσεις γεινονν στο
0 καθως $t \to +\infty$
ελικοειδεις
τροχια
ΕΛΚΥΣΤΙΚΗ ΕΛΙΑ



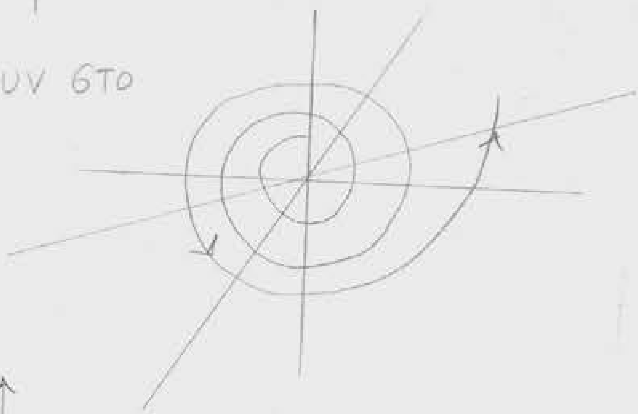
← κανονική

$\alpha=0$

$\beta<0$

Οι λύσεις τείνουν στο $t\to-\infty$

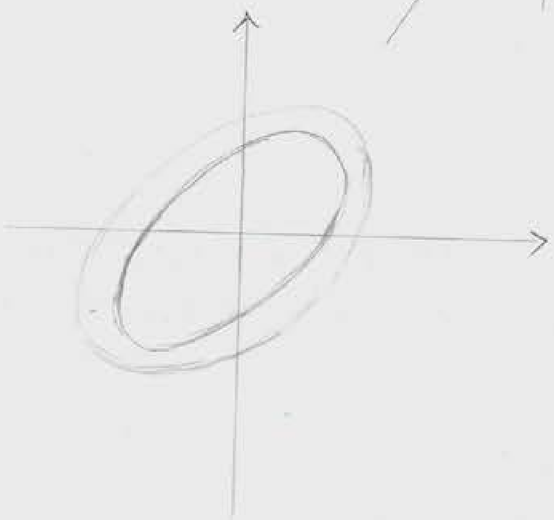
ΑΠΩΘΗΤΙΚΗ ΕΛΙΚΑ



Ασταθής εστία

$\alpha>0$

$\beta<0$



← γενική

$Re\lambda=0$

κέντρο

Γενική περίπτωση (Μιγαδική)

$(trA)^2-4detA<0$

$x(t)=2e^{at}\left[\bar{u}\cos(\beta t+\delta)-\bar{u}\sin(\beta t+\delta)\right]$

$\lambda_\pm=a\pm\beta i \leftrightarrow \bar{u}\pm\bar{u}i$

Παράδειγμα:

$x'=\begin{bmatrix}0 & -2\\ 8 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$ κεντρο

$trA=0$

$detA=16$ $\quad\lambda_{1,2}=\pm4i$

$\Delta^2=-4-16$

για να λύσουμε το πρόβλημα εισάγουμε πολικές συντ/νες

$r'=ar,\ \theta'=-\beta$

σβήνει εκθ. 0
τείνει εκθ → ∞

το πρόσημο του α εξαρτάται από το r(+)

γωνιακή ταχύτητα θ σταθερή στο χρόνο (β<0 δεξιά, β>0 αριστερά)

Παρατήρηση:

(1) $x_1' = -2x_2$

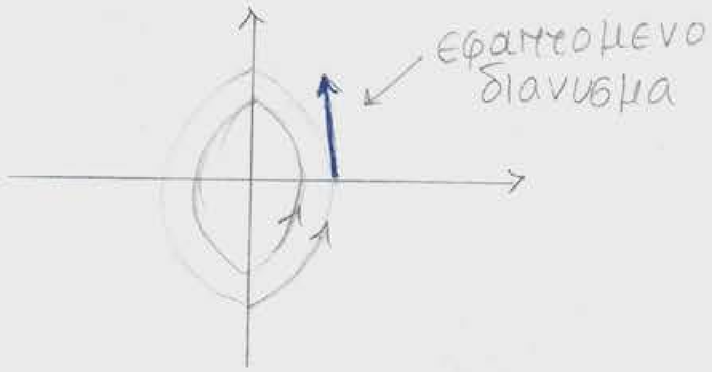
(2) $x_2' = 8x_1$

$$\frac{(2)}{(1)} = \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{8x_1}{-2x_2} = -4\frac{x_1}{x_2}$$

$$x_2 dx_2 + 4x_1 dx_1 = 0$$

$$\frac{x_2^2}{2} + \frac{x_1^2}{1/2} = C$$

(στο y επίπεδο η τροχιά είναι ελικοειδής αν $a \neq 0$ και κυκλική $a = 0$)



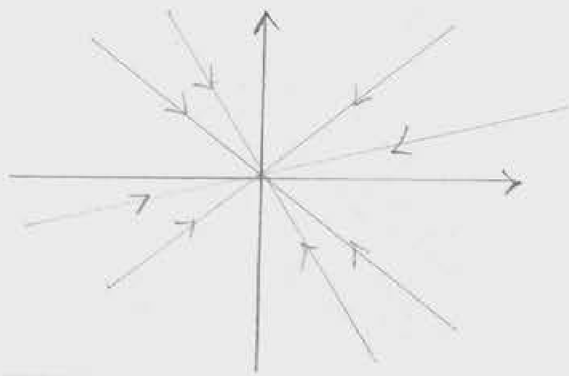
Γενικά, $x' = Ax$, $x'(t)$ εφάπτεται στην καμπύλη της. Αν η λύση διέρχεται από το x_0 τότε το εφαπτόμενο στο σημείο αυτό είναι Ax_0

Δηλαδή στην περίπτωση αυτή

$$A\begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 8x_1 \end{bmatrix}$$

3. Ίσες Ιδιοτιμές (Νόθος Κόμβος)

i) Διαγωνοποιήσιμη

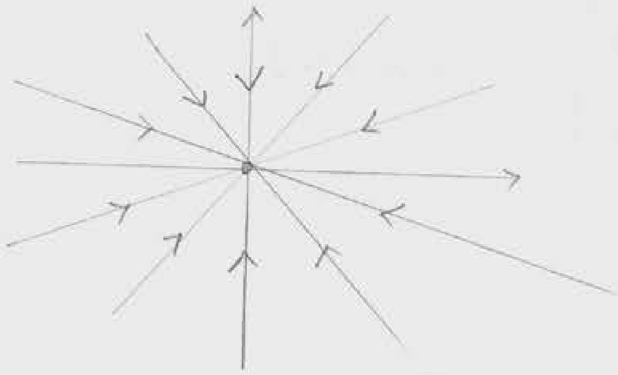


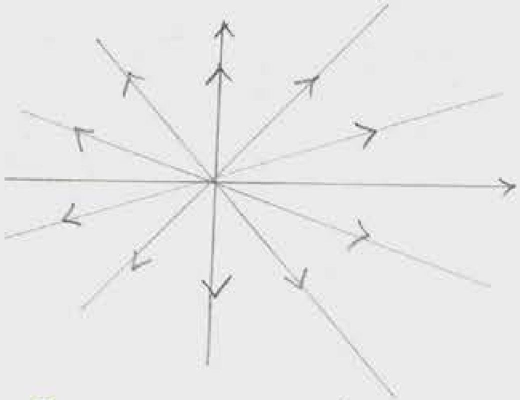
κανονική

Γενική: ευθείες πάνω σε ευθείες

$$x' = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} x$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$$

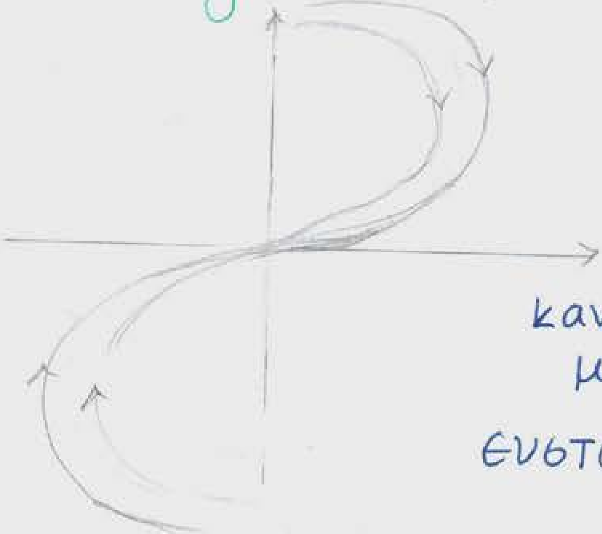




$\lambda < 0$ ευσταθής νοθος κομβος

$\lambda > 0$ ασταθής νοθος κομβος

ii) Μη Διαγωνοποιήσιμη - Jordan block



κανονική μορφή ευσταθής

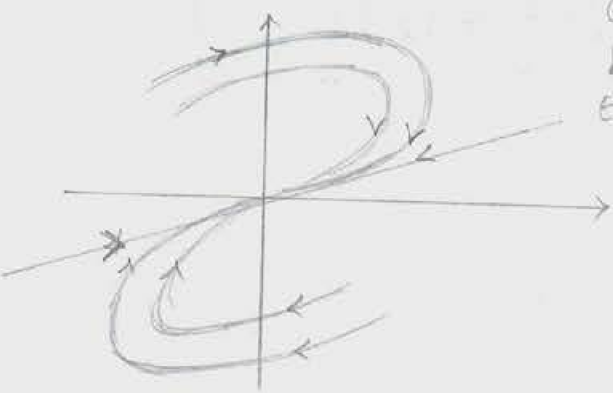
Γενικά

λ ιδιοτιμη

$\updownarrow$

$$\bar{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Γενική περιπτωση



ευσταθες

Εαν $\lambda > 0$ τοτε $y_1(t) \to 0$ και $y_2(t) \to 0$ καθως $t \to +\infty$, ενω αν $\lambda > 0$ τοτε εχουμε $y_1(t) \to 0$ και $y_2(t) \to 0$ καθως $t \to \infty$

$\to$ Γραμμική παραμορφωση του παραπανω σχηματος οπου $\lambda < 0$. Τα βελη αντιστρεφονται αν $\lambda > 0$ και ο κομβος ειναι ασταθης

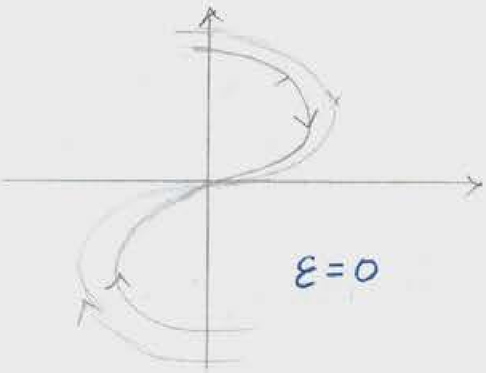
Γενική λυση:

$$x(t) = (c_1 + c_2 t) e^{\lambda t} \bar{u} + c_2 e^{\lambda t} \bar{v}$$

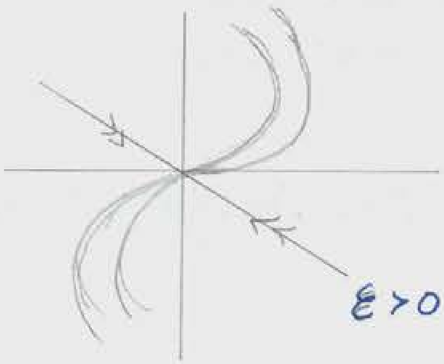
$\hookrightarrow$ γραμ. ανεξ απο το $\bar{u}$

Παραδειγμα

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} -1/2 & 1 \\ \varepsilon & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad 0 \leq \varepsilon << 1$$



$\varepsilon = 0$



$\varepsilon > 0$

Γενικη λυση:

$$\lambda^2 - (trA)\lambda + detA = 0$$

$$\lambda^2 + \lambda + \left(\frac{1}{4} - \varepsilon\right) = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\varepsilon}$$

Λυνω το συστημα για δυο κατευθυνσεις

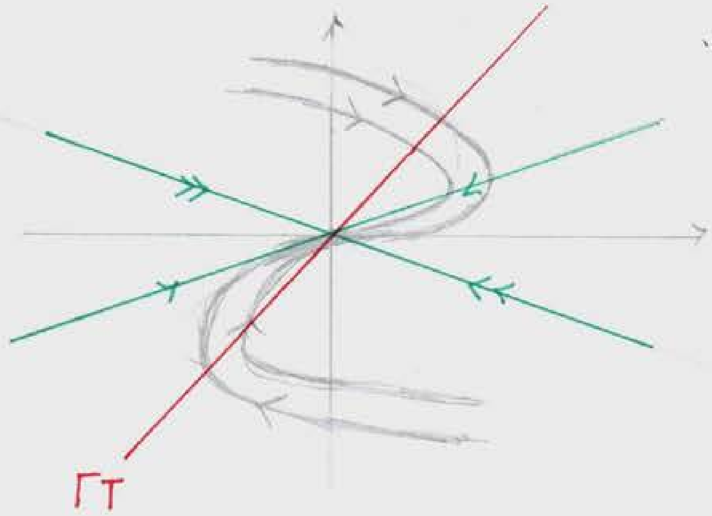
$$\begin{bmatrix} -1/2 & 1 \\ \varepsilon & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \left(-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\varepsilon}\right) \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$-\frac{1}{2} y_1 + y_2 = \left(-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\varepsilon}\right) y_1$$

$$y_2 = \pm \sqrt{\varepsilon}\, y_1$$

Γραμμικα ανεξ. ιδιοδιανυσματα:

$$\bar{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{\varepsilon} \end{bmatrix} \text{ και } u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{\varepsilon} \end{bmatrix}$$



$\varepsilon << 1$

(Το σχήμα "ανοίξε" με αυτη τη διαταραχη)

Παρατήρηση :

Που αλλαξουν κατευθυνση οι λυσεις;

Αλλαζω κατευθυνση στο $y_1' = 0$

$$y_1' = -\frac{1}{2} y_1 + y_2 = 0$$

$$y_2 = \frac{1}{2} y_1$$ γεωμετρικος τοπος αλλαγης