Η 1η και 2η Φορμουλα Μεταβολης της Περιμετρου

§1. Υποπολλαπλοτητες στον $\mathbb{R}^{n+k}$

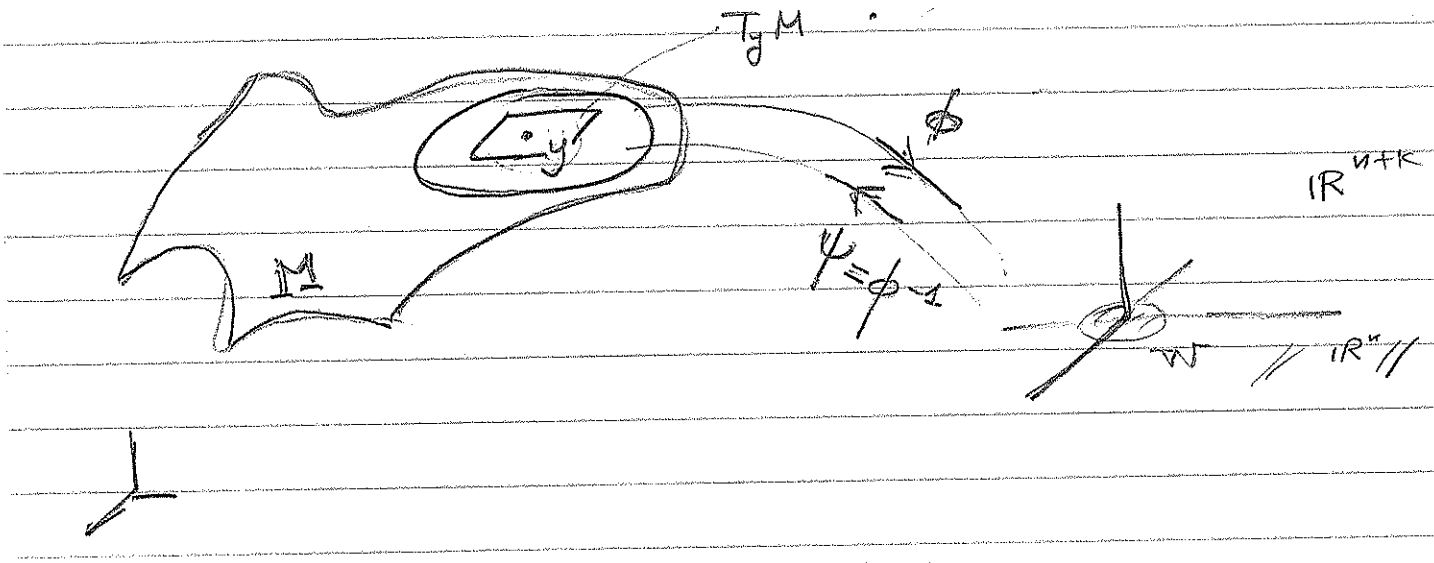
Εστω M n-υποπολλαπλοτητα του $\mathbb{R}^{n+k}$, C^r ομαλοτητος, $r \geq 1$, $k \geq 1$. Δηλαδη:

(εξαρτωμενα απο το y)

$\forall\, y \in M$ $\exists$ ανοιχτα $U, V \subset \mathbb{R}^{n+k}$, $y \in U$, $0 \in V$ και C^r αμφιδιαφορισμο $\phi : U \to V$ με $\phi(y) = 0$ και

$$\phi(M \cap U) = W = V \cap \mathbb{R}^n$$

(Ταυτιζουμε το $\mathbb{R}^n$ με τον υποχωρο του $\mathbb{R}^{n+k}$, $x = (x^1, \dots, x^{n+k})$ με $x^j = 0$, $j = n+1, \dots, n+k$).

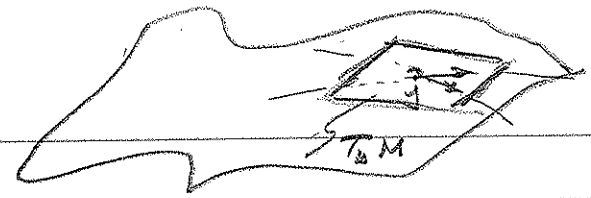


Εστω $\psi = \phi^{-1}$. Τοτε η ψ δινει τοπικη περιγραφη της M ως εξης:

$$\psi : W \to \mathbb{R}^{n+k}, \quad \psi(W) = M \cap V, \quad \psi(0) = y$$

$$\frac{\partial \psi(0)}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial \psi(0)}{\partial x^n} \quad \text{γραμμικα ανεξαρτητα στον } \mathbb{R}^{n+k}$$

Ο εφαπτομενος χωρος T_yM της M στο y οριζεται ως ο υποχωρος του $\mathbb{R}^{n+k}$ που αποτελειται απο $\tau \in \mathbb{R}^{n+k}$



τ.ω.

$\tau = \dot{\gamma}(0)$ για κάποια C^1 καμπύλη, $\gamma:(-1,1)\to\mathbb{R}^{n+k}$, $\gamma(-1,1)\subset M$, $\gamma(0)=y$.

Επεται οτι το συστημα $\left\{\frac{\partial\psi(0)}{\partial x^1},\dots,\frac{\partial\psi(0)}{\partial x^n}\right\}$ αποτελεί βαση του T_yM.

Μια συναρτηση $f:M\to\mathbb{R}^N$ $(N\geq 1)$ λεγεται C^l $(l\leq r)$ στην M εαν $f=\tilde{f}|_U$, οπου $\tilde{f}:U\to\mathbb{R}^N$ μια C^l συναρτηση, U ανοιχτο στον $\mathbb{R}^{n+k}$, $M\subset U$.

Δοθεντος $\tau\in T_yM$, η κατα κατευθυνση παραγωγος $D_\tau f\in\mathbb{R}^N$ οριζεται ως

$$\frac{d}{dt}f(\gamma(t))\Big|_{t=0}$$

$\forall$ C^1 καμπυλη $\gamma:(-1,1)\to M$, $\gamma(0)=y$, $\dot{\gamma}(0)=\tau$.
Ειναι ασκηση να δει κανεις οτι ο ορισμος δεν εξαρταται απο την συγκεκριμενη γ την χρησιμοποιησε για να αντιπροσωπευσει το τ. Ο γραμμικος μετασχηματισμος που επαγει αυτη η διαδικασια ειναι

$$df_y: T_yM\to\mathbb{R}^N,\quad df_y(\tau)=D_\tau f,\ \tau\in T_yM$$

(η καλυτερη γραμμικη προσεγγιση της f στο y).

Στην περιπτωση που $f=M\to\mathbb{R}$ (δηλαδη $N=1$) ορισμενο της κλισης $\nabla^M f$ της f μεσω

$$\nabla^M f(y)=\sum_{j=1}^{n}(D_{\tau_j}f)\,\tau_j,\quad y\in M.$$

εξωτερικό στον $\mathbb{R}^{n+k}$

$\tau_1, \dots, \tau_n$ οποιαδήποτε ορθοκανονική βάση του T_yM. Θέτοντας

$$\nabla_j^M f = e_j \cdot \nabla^M f \qquad \left(e_j = (0,0,\dots,\underset{\uparrow j\text{-θέση}}{1},0,\dots,0),\ e_j \in \mathbb{R}^{n+k} \right) \quad j=1,\dots,n+k$$

Έχουμε

$$\nabla^M f(y) = \sum_{j=1}^{n+k} \nabla_j^M f(y)\, e_j$$

Εάν f είναι ο περιορισμός στον M κάποιας $C^1(U)$ συνάρτησης $\tilde{f}$, U ανοιχτό στον $\mathbb{R}^{n+k}$, $U \supset M$, τότε

$$\nabla^M f(y) = \left(\operatorname{grad}_{\mathbb{R}^{n+k}} \tilde{f}(y) \right)^T,$$

όπου grad είναι το συνήθες Ευκλείδειο $\mathbb{R}^{n+k}$ grad:

$(D_1\tilde{f}, \dots, D_{n+k}\tilde{f})$ στο U και $(\ )^T$ σημαίνει ορθογώνια προβολή του $\mathbb{R}^{n+k}$ επί του T_yM.

Τώρα δοθείσας διανυσματικού πεδίου $X = (X^1, \dots, X^{n+k})$, δηλαδή διανυσματικής συνάρτησης $X : M \to \mathbb{R}^{n+k}$, με $X^j \in C^1(M)$, $j=1,\dots,n+k$, ορίζουμε

$$\operatorname{div}_M X = \sum_{j=1}^{n+k} \nabla_j^M X^j \quad \text{στον } M$$

(Τονίζουμε ότι δεν απαιτούμε $X_y \in T_yM$). Τότε στο $y \in M$ έχουμε

$$\operatorname{div}_M X = \sum_{j=1}^{n+k} e_j \cdot \left(\nabla^M X^j \right) = \sum_{j=1}^{n+k} e_j \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} (D_{\tau_i} X^j)_{\tau_i} \right)$$

$X(y) \in T_yM$

εσωτερικό στον $\mathbb{R}^{n+k}$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(D_{\tau_i} X\right) \cdot \tau_i \qquad \left(X = \sum_{j=1}^{n+k} X^j e_j \text{ χρησιμοποιήθηκε} \right)$$

όπου $\tau_1, \dots, \tau_n$ κάποια ορθοκανονική βάση του T_yM.

Το <u>θεώρημα της απόκλισης</u> λέει:

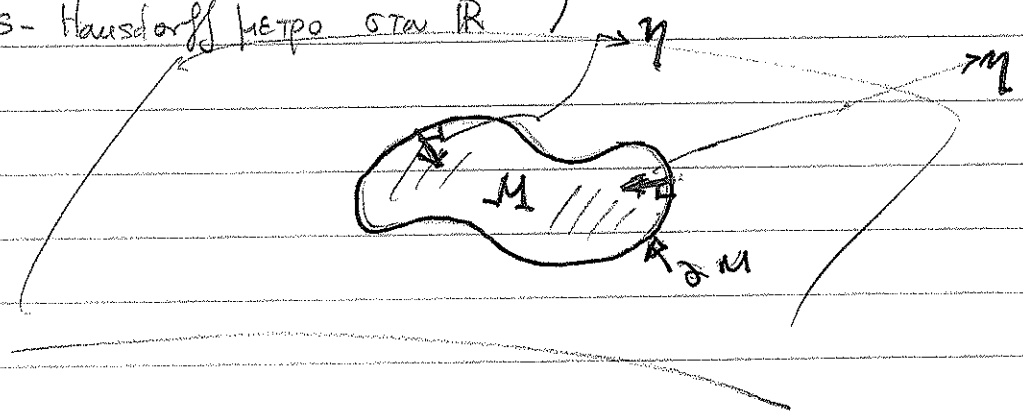
Έστω $\overline{M}$ ένα φραγμένο (συμπαγής) πολλαπλότητα, $\partial M = \overline{M} \setminus M$, και $X_y \in T_yM \ \forall y \in M \implies$

$$(1) \quad \int_M \operatorname{div}_M X \, dH^n = -\int_{\partial M} X \cdot \eta \, dH^{n-1}$$

$X(y) \in T_yM$

όπου η η έξω μοναδιαία "co-normal" του ∂M, δηλαδή $|\eta| = 1$, $\eta \perp \partial M$ και εφαπτόμενο στο M.

(H^s = s-Hausdorff μέτρο στον $\mathbb{R}^{n+k}$)



<u>Σχόλιο</u>

Η M δεν χρειάζεται να είναι πραγματοποιήσιμη πολλαπλότητα.

Στη περίπτωση που η M είναι τουλάχιστον C^2 ορίζαμε την <u>2η θεμελιώδη μορφή</u>

της M στο y ως τον διγραμμικό μετασχηματισμό

$$B_y : T_yM \times T_yM \longrightarrow (T_yM)^{\perp}$$

μέσω

$$(2) \quad B_y(\tau,\eta) = -\sum_{\alpha=1}^{k} (\eta \cdot D_\tau \nu^\alpha)\nu^\alpha \Big|_y$$

όπου $\tau, \eta \in T_yM$, $\nu^1, \dots, \nu^k$ (τοπικά ορισμένα) διανυσματικά πεδία με $\nu^\alpha(z)\cdot\nu^\beta(z) = \delta_{\alpha\beta}$, $\nu^\alpha(z) \in (T_zM)^{\perp}$ $\forall z$ σε κάποια περιοχή του y.

<u>Γεωμετρική Ερμηνεία του B</u>

Έστω $\tau \in T_yM$ με $|\tau| = 1$ και $\gamma : (-1,1) \to \mathbb{R}^{n+k}$ μία C^2 καμπύλη με $\gamma(0) = y$, $\gamma(-1,1) \subset M$ και $\dot\gamma(0) = \tau$. Τότε

$$B_y(\tau,\tau) = (\ddot\gamma(0))^{\perp},$$

δηλαδή η κάθετη συνιστώσα (ως προς M) της καμπυλότητας της γ στο 0, όταν γ θεωρείται καμπύλη στον $\mathbb{R}^{n+k}$ (κατά συνέπεια ο B_y μετράει την "κάθετη καμπυλότητα" του M στην κατεύθυνση τ).

<u>Απόδειξη</u>

$$\nu^\alpha(\gamma(t)) \cdot \dot\gamma(t) \equiv 0, \quad |t| < 1 \qquad (\cdot \text{ στο } \mathbb{R}^{n+k})$$

(εφ' όσον $\dot\gamma(t) \in T_{\gamma(t)}M$ και $\nu^\alpha(\gamma(t)) \in (T_{\gamma(t)}M)^{\perp}$)

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \left[\nu^\alpha(\gamma(t)) \cdot \dot\gamma(t) \right] = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\nu^\alpha(y) \cdot \ddot\gamma(0) = -(D_\tau \nu^\alpha) \cdot \tau .$$

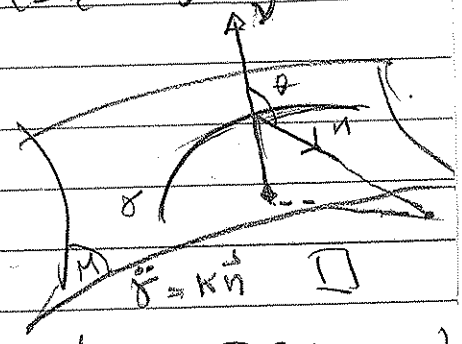
Πολλαπλασιάζοντας με ν^α:

$$\nu^\alpha(y)\, \nu^\alpha(y) \cdot \ddot\gamma(0) = -\tau \cdot (D_\tau \nu^\alpha) \cdot \nu^\alpha \quad \Leftrightarrow$$

(αθροίσμα ως προς α)

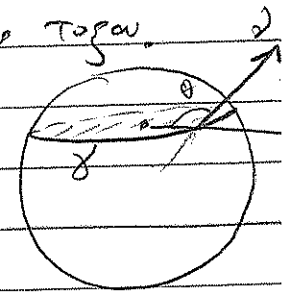
$$(\ddot\gamma(0))^\perp = B_y(\tau,\tau).$$

(Do Carmo p. 142)



$\square$

Σημ. Η παράμετρος t δεν είναι αναγκαστικά μήκος τόξου.
Αρκεί $\dot\gamma(0) = \tau$, $|\tau| = 1$.

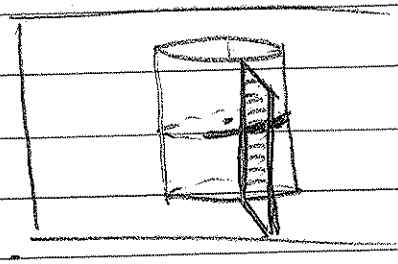


Άσκηση 1

Έστω $\tau, \eta \in T_yM$ και $\varphi : U \to \mathbb{R}^{n+k}$, C^2
U ανοιχτό στον $\mathbb{R}^2$, $U \ni \bar{0}$, $\varphi(U) \subset M$, $\varphi(0) = y$.
$\varphi = \varphi(x^1, x^2)$, $\frac{\partial\varphi}{\partial x^1}(0,0) = \tau$, $\frac{\partial\varphi}{\partial x^2} = \eta$.

Δείξτε ότι

$$B_y(\tau,\eta) = \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^1 \partial x^2}(0,0) \right)^\perp ,$$



και κατά συνέπεια

$$B_y(\tau,\eta) = B_y(\eta,\tau).$$

Σημ: Ιδιότητες του B_y είναι οι κυρίες καμπυλότητες. Τα ιδιοδιανύσματα δίνουν τις εφαπτομένες της συμμετρίας υπερβολής.

$\square$

Op (Μέση Καμπυλότητα (*))

(3) $$\overline{H}(y) := \sum_{i=1}^{n} B_y(\tau_i, \tau_i) \in (T_y M)^{\perp}$$

$\tau_1, \dots, \tau_n$ ορθοκανονικη βαση στα $T_y M$.

Σημ: $\overline{H}$ ειναι το διανυσμα της μεσης καμπυλοτητας.

Παρατηρουμε οτι καποιος χρονος τον (2) εχουμε

$$\overline{H}(y) = -\sum_{\alpha=1}^{k} \sum_{i=1}^{n} \left(\tau_i \cdot D_{\tau_i} \nu^{\alpha}\right) \nu^{\alpha}(y)$$

$\therefore$

(4) $$\overline{H}(y) = -\sum_{\alpha=1}^{k} \left(\mathrm{div}_M \nu^{\alpha}\right) \nu^{\alpha}, \quad \text{σε περιοχη του } y.$$

Ο επομενος υπολογισμος εχει ιδιαιτερο ενδιαφερον. $(X(y) \in T_y M$

Θεωρουμε $\overline{M}$ C^2 πολλαπλοτητα με $(m-1)$-συνορο $\partial M = \overline{M} \setminus M$, και χωρις την απαιτηση $X_y \in T_y M$. Πρωτον αναλυουμε το X σε εφαπτομενικη και καθετη συνιστωσα

$$X = X^{T} + X^{\perp}$$

(*) $B_y(\xi, \xi) = \langle A\tau, \tau \rangle$, A συμμετρικος, $\langle , \rangle$ Εσωτ. στον $T_y M$.

$\sum B_y(\tau_i, \tau_i) = \sum \langle (O^T \Lambda O)\tau_i, \tau_i \rangle = \sum \langle (\Lambda O)\tau_i, O\tau_i \rangle = \sum \langle \Lambda \xi_i, \xi_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$

Συνεπως η μεση καμπυλοτητα οριζεται ως ο αριθμητικος μεσος των λ_i.

$$X^{\perp} = \sum_{\alpha=1}^{k} (\nu^{\alpha} \cdot X)\, \nu^{\alpha}$$

$\Rightarrow$

$$(4)' \quad d\nu_M X^{\perp} = \sum_{\alpha=1}^{k} \sum_{i=1}^{n} D_{\tau_i} \left[(\nu^{\alpha} \cdot X) \nu^{\alpha} \right] \cdot \tau_i$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{k} \sum_{i=1}^{n} (\nu^{\alpha} \cdot X)(D_{\tau_i} \nu^{\alpha}) \tau_i$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{k} (\nu^{\alpha} \cdot X)\, d\nu_M \nu^{\alpha}$$

$$\overset{(4)}{=} - X \cdot \vec{H} .$$

Από τις δύο σχέσεις (4) το θεώρημα της απόκλισης (1)

$$\int_M d\nu_M X^{T} dH^{n} = - \int_{\partial M} X \cdot \eta \, dH^{n-1} .$$

Κατά συνέπεια εφόσον $d\nu_M X = d\nu_M X^{\perp} + d\nu_M X^{T}$

$$(5) \quad \int_M d\nu_M X \, dH^{n} = - \int_M X \cdot \vec{H} \, dH^{n} - \int_{\partial M} X \cdot \eta \, dH^{n-1} ,$$

όπου η η πρός τα εξω μοναδιαία "conormal".

§2. Ο τύπος των Εμβαδών (Περιμέτρων)

Έστω $\lambda: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ γραμμικός μετασχηματισμός, και $A \subset \mathbb{R}^n$. Τότε είναι γνωστό ότι έχουμε

$$(6) \qquad L^n(\lambda(A)) = |\det \lambda|\, L^n(A)$$

όπου L^n το n-μέτρο Lebesgue (για $n=2$ το εμβαδόν και για $n=3$ ο όγκος).

Πιο γενικά αν $\lambda: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^N$, $N \geq n$ τότε $\lambda(\mathbb{R}^n) \subset F$ όπου F n-διάστατος υπόχωρος του $\mathbb{R}^N$, και επιλέγοντας ένα ορθογώνιο μετασχηματισμό του $\mathbb{R}^N$ τέτοιο ώστε $q(F) = \mathbb{R}^n$ έχουμε $q \circ \lambda: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ και

$$L^n(q\lambda(A)) = |\det(q\lambda)|\, L^n(A), \quad A \subset \mathbb{R}^n.$$

Πράγματι: $q \circ \lambda: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, και κατά συνέπεια η det ορίζεται. Επίσης

$$L^n(q\lambda(A)) = H^n(q\lambda(A))$$

(H^n = n-διάστατο (μέτρο) Hausdorff στον $\mathbb{R}^N$)

$$= H^n(\lambda(A)) \quad \text{(εφ' όσον } q \text{ ορθογώνιος)}$$

Στη συνέχεια θα εξακριβώσουμε ότι ισχύει η σχέση

$$(7) \qquad H^n(\lambda(A)) = \sqrt{\det(\lambda^* \cdot \lambda)}\; H^n(A).$$

Υπ. $C: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, γραμμικός. $C^*: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, ορίζεται μέσω της σχέσης

$$x \cdot (C^* y) = (Cx) \cdot y \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m,$$

• Ενδιάμεσο στον $\mathbb{R}^n$ στο 1ο μέλος, στον $\mathbb{R}^m$ στο 2ο μέλος.

Η ημερήσια αντιμετώπιση με όλες τις λεπτομέρειες δίνεται στις Ασκήσεις 2-4 (σ.σ. 12,13). Μία πιο αμεσή αντιμετώπιση είναι ως εξής:

α) Εάν $n=N$ τότε

$$\det \lambda = \det \lambda^*$$

και η (7) προκύπτει από την (6).

β) Έστω $N>n$. Σε αυτήν την περίπτωση γράφαμε

$$\mathbb{R}^N = (\mathbb{R}^n)^\perp \oplus \mathbb{R}^n$$

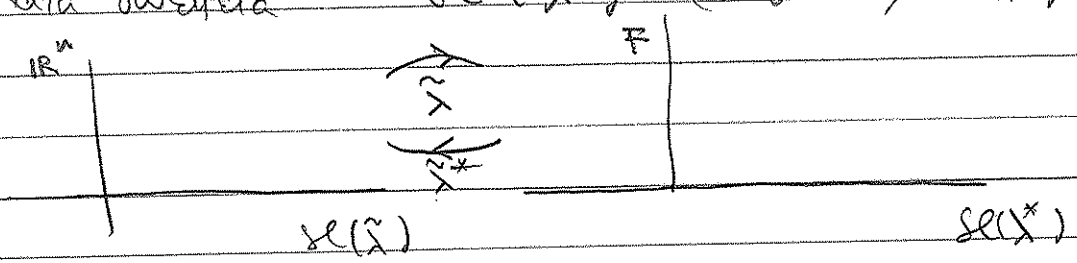
$$\Psi$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

και ορίζουμε $\tilde{\lambda}: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ γραμμικό μετασχηματισμό

$$\tilde{\lambda} x = \lambda x_2$$

Κατά συνέπεια $\mathcal{N}(\tilde{\lambda}) = (\mathbb{R}^n)^\perp$, $R(\tilde{\lambda}) = F$



Θεωρούμε τον τελεστή $\tilde{\lambda}^*$:

(8) $$\langle \tilde{\lambda} x, y \rangle = \langle x, \tilde{\lambda}^* y \rangle \quad , \forall x, y \in \mathbb{R}^N$$

$\langle , \rangle$ Ευκλείδειο εσωτερικό στον $\mathbb{R}^N$.

Από την (8) προκύπτει ότι

$$R(\tilde{\lambda}) = F = [\mathcal{N}(\lambda^*)]^{\perp}, \quad R(\lambda^*) = \mathbb{R}^n = [\mathcal{N}(\lambda)]^{\perp}.$$

Έχουμε την αναπαράσταση του $\tilde{\lambda}$ ως $N \times N$ πίνακα,

$$\tilde{\lambda} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & \lambda \end{array}\right].$$

Κατά ανάλογο ο ανάστροφος είναι

$$\tilde{\lambda}^T = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & \lambda^T \end{array}\right]$$

και μέσω του λ^T ορίζουμε τον $\lambda^* : F \to \mathbb{R}^n$.
Παρατηρούμε ότι $\lambda^* \lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, και κατά συνέπεια η ορίζουσα $\det(\lambda^* \lambda)$ έχει νόημα.

Τέλος αναφέρουμε ότι

$$(9) \qquad |\det(q\lambda)| = \left(\det(\lambda^* \lambda)\right)^{1/2}$$

Η (7) γενικεύεται για την γραμμικώς μετασχηματιστικής $f : M \to \mathbb{R}^N$ όπου f 1-1 C^1 μετασχηματισμός, M μια n-υπόπολλαπλότητα του $\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^{n+k}$ μέσω της Ιακωβιανής:

$$(10) \qquad H^n(f(A)) = \int_A Jf(y)\, dH^n$$

$\forall$ H^n-μετρήσιμο $A \subset M$, $Jf(y) := \sqrt{\det\left((df_y)^* \cdot (df_y)\right)}$,

όπου

$df_y : T_y M \to \mathbb{R}^N$ είναι ο γραμμικός μετασχηματισμός που ορίσαμε στην §1. Η (10) προκύπτει από την (7) μέσω της προσεγγιστικής διαίρεσης του σφαιρικού.

Άσκηση 9

a) Έστω $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, γραμμικός μετασχηματισμός. Ο συζυγής $A^* : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ <u>ορίζεται</u> μέσω της σχέσης

$$x \cdot (A^* y) = (Ax) \cdot y \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$$

(• το Ευκλείδιο εσωτερικό, στον $\mathbb{R}^n$ στο 1ο μέλος, στον $\mathbb{R}^m$ στο 2ο).

b) $O : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ <u>ορθογώνιος</u> εάν $Ox \cdot Oy = x \cdot y$ $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$

c) $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ <u>συμμετρικός</u> εάν $x \cdot (Sy) = (Sx) \cdot y$ $\forall x, \forall y \in \mathbb{R}^n$.

Δείξτε ότι

(i) $A^{**} = A$

(ii) $(A \circ B)^* = B^* \circ A^*$

(iii) $O^* = O^{-1}$ εάν $O : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ορθογώνιος

(iv) $S^* = S$ εάν $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ συμμετρικός

(v) Εάν $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ συμμετρικός, τότε $\exists$ $O : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, ορθογώνιος, και $D : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, διαγώνιος,

$$S = O \circ D \circ O^{-1}$$

(vi) Εάν $O : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ορθογώνιος, τότε $n \leq m$ και

$$O^* \circ O = I \quad \text{στον } \mathbb{R}^n$$

$$O \circ O^* = I \quad \text{στον } O(\mathbb{R}^n).$$

$\square$

Λόημα 3

Εάν $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ γραμμικός, τότε

(i) Εάν $n \leq m$, $\exists$ $S: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, συμμετρικός, και O, ορθογώνιος, $O: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, τ.ω.

$$L = O \circ S^{\frac{1}{2}}.$$

(ii) Εάν $n \geq m$, $\exists$ $S: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, συμμετρικός, και ορθογώνιος $O: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, τ.ω.

$$L = S \circ O^*$$

$\square$

Πόρισμα

Έστω $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ γραμμικός. (από Λ.2)

(i) Εάν $n \leq m$, γράφε $L = O \circ S$, και ορίζαμε την Ιακωβιανή του L,

$$[\![L]\!] = |\det S|$$

(ii) Εάν $n \geq m$, γράφε $L = S \circ O^*$ (από Λ.2) και ορίζαμε την Ιακωβιανή

$$[\![L]\!] = |\det S|.$$

Λόημα 4

(i) Εάν $n \leq m \implies [\![L]\!]^2 = \det(L^* \circ L)$

(ii) Εάν $n \geq m \implies [\![L]\!]^2 = \det(L \circ L^*)$.

$\square$

Παραδείγματα

(α) Καμπύλη στον Χώρο

Πρώτα θεωρείστε για $V \in \mathbb{R}^n$, σταθερό, τον γραμμικό μετασχηματισμό $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ όπου $At = tV$, $t \in \mathbb{R}$. Ο $A^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ορίζεται μέσω της σχέσης

$$t A^* y = (At) \cdot y \quad , \forall t \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}^n$$

$$\Leftrightarrow$$

$$A^* y = V \cdot y .$$

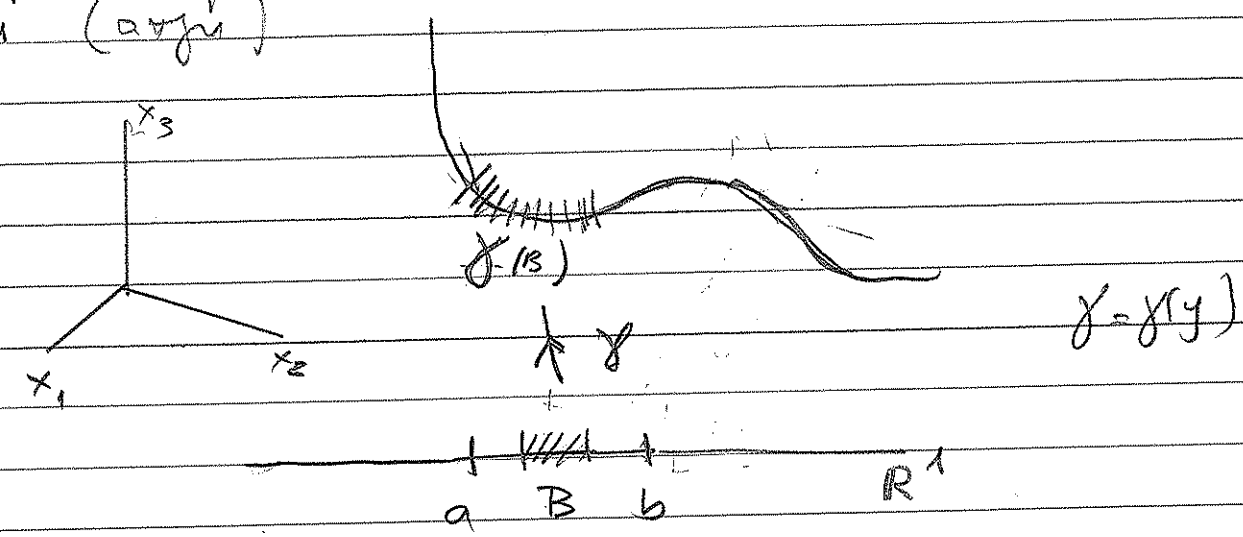
Συνεπώς

$$A^* A = V \cdot V \quad , \quad A^* A : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

και

$$\left(\det (A^* A)\right)^{1/2} = |V| .$$

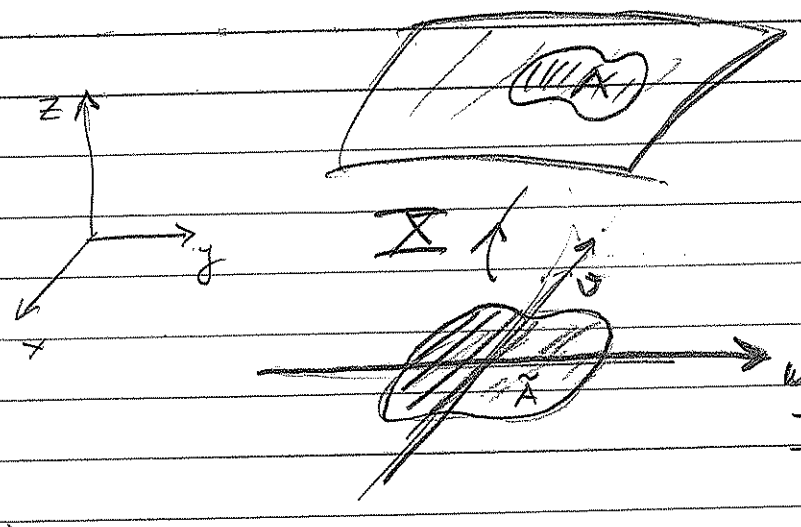
Τώρα θεωρείστε $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, C^1 κατάστασης, 1:1 (απλή)



$$d\gamma_y = \gamma'(y) \quad , \sqrt{(d\gamma_y)^* \cdot (d\gamma_y)} = |\gamma'(y)|$$

$$H^1(\gamma(B)) = \int_B |\gamma'(y)|\,dy \quad \left(= \int_B |\gamma'(y)|\,d\mathcal{L}^1 \right)$$

(2) <u>Επιφανεια στον Χωρο</u>



$y = (u, v)$

$X = f$

$X(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$

$H^2(A) = \text{Εμβαδον } A = \text{Εμβαδον}(X(\tilde{A}))$, $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$d_y X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(d_y X)^* : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$d_y X = \begin{bmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{bmatrix} , \quad (d_y X)^* = \begin{bmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{bmatrix}$$

$(u,v) \in \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

$$(d_y X)^* (d_y X) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$\| $$

$$\begin{bmatrix} X_u \cdot X_u & X_u \cdot X_v \\ X_v \cdot X_u & X_v \cdot X_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}$$

$$\left[\det\left((d_y X)^*(d_y X)\right)\right]^{1/2} = \sqrt{EG-F^2} =: \sqrt{g}$$

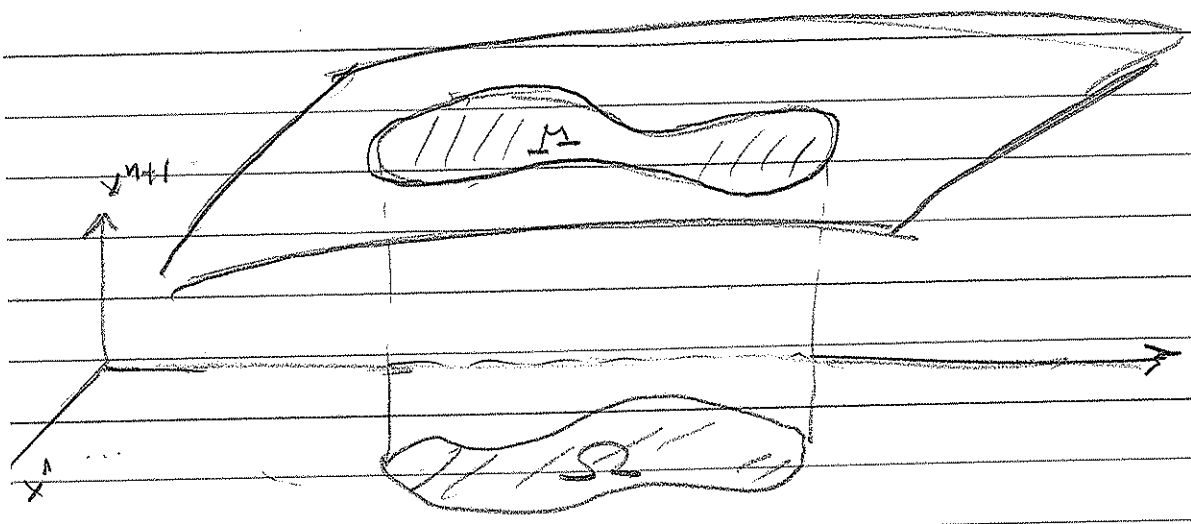
$$H^2(A) = \int_{\tilde{A}} \sqrt{g}\, du\, dv \quad \left(= \int_{\tilde{A}} \sqrt{g}\, dL^2 \right).$$

Πιο γενικά, $\tilde{A} = \psi^{-1}(A)$, $g = \det(g_{ij})$, $g_{ij} = \frac{\partial \psi}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x^j}$,

$i,j = 1,\dots,n$, $\psi : W \to \mathbb{R}^{n+k}$

$$H^n(A) = H^n(\psi(\tilde{A})) = \int_{\tilde{A}} \sqrt{g}\, dL^n.$$

(3) <u>n-διάστατα γραφήματα στον $\mathbb{R}^{n+1}$</u>



$\psi : \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$, $\psi(x) = (x, u(x))$, $u : \Omega \to \mathbb{R}$

$\psi_i(x) = x_i$, $i = 1,\dots,n$

$\psi_{n+1}(x) = u(x)$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_j} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial u}{\partial x_i} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \frac{\partial u}{\partial x_j} \end{pmatrix} = \delta_{ij} + D_i u \, D_j u$$

$$\det\left(\delta_{ij} + D_i u \, D_j u\right) = 1 + |\nabla u|^2,$$

$$H^n(M) = \int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla u|^2}\, dx$$

<u>Aufgabe 5</u>

Angefangen

$$\det\left(\delta_{ij} + \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = 1 + |\nabla u|^2, \quad i,j = 1, \dots, n.$$

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right), \quad |\nabla u|^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2.$$

//

§3 1ος και 2ος Τύπος Μεταβολής Περιμέτρου

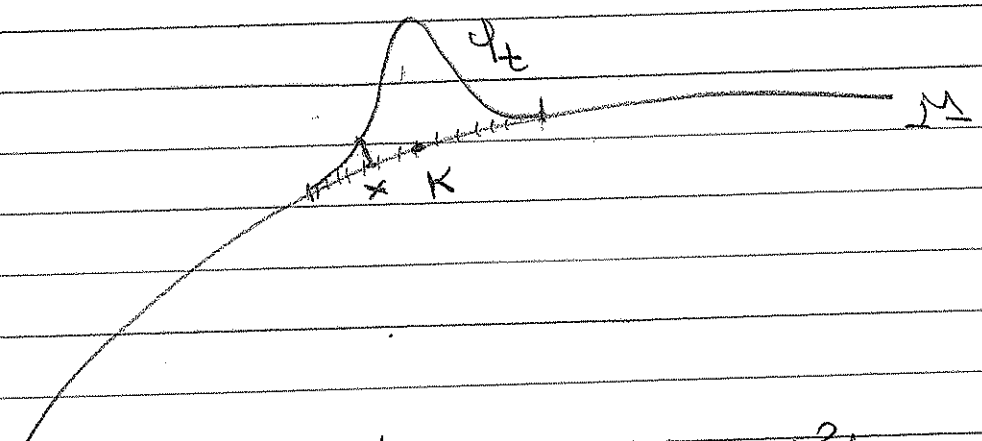
Έστω M n-υποπολλαπλότητα του $\mathbb{R}^{n+k}$, C^1 κλάσης, και U ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^{n+k}$ τέτοιο ώστε $U \cap M \neq \emptyset$, και $H^n(K \cap M) < \infty$ $\forall$ συμπαγές $K \subset U$. $\{\phi_t\}_{0 \le t \le 1}$ μονοπαραμετρικές οικογένεια αμφιδιαφορισμών

$$\phi_t : U \to U$$

(1) $\phi(t,x) \; (\equiv \phi_t(x)) \quad C^2 : (-1,1) \times U \to U$

(2) $\phi_0(x) \equiv x \quad , x \in U$

(3) $\phi_t(x) \equiv x \quad \forall t \in (-1,1) \; , x \in U - K, \; K \subset U$, συμπαγές υποσύνολο.



$$X(x) := \left.\frac{\partial \phi(t,x)}{\partial t}\right|_{t=0} \quad , \quad Z(x) := \left.\frac{\partial^2 \phi(t,x)}{\partial t^2}\right|_{t=0}$$

Κατά συνέπεια έχουμε

$$\phi_t(x) = x + t X(x) + \frac{t^2}{2!} Z(x) + O(t^3)$$

$X(\cdot)$ και $Z(\cdot)$ με συμπαγείς φορείς στο U.

$M_t := \varphi_t(M \cap K)$, t-παραμετρική οικογένεια υποσυνόλων

$M_0 = M \cap K$, $M_t = M$ εκτός K.

Σχέδιο: Υπολογισμός του $\frac{d}{dt} H^n(M_t)\Big|_{t=0}$, $\frac{d^2}{dt^2} H^n(M_t)\Big|_{t=0}$

Θα κάνουμε χρήση της (10):

$$H^n(\phi_t(M \cap K)) = \int_{M \cap K} J\psi_t \, dH^n, \quad \psi_t = \phi_t\big|_{M \cap U}$$

Χρειάζεται να υπολογίσουμε

$$\frac{\partial}{\partial t} J\psi_t\Big|_{t=0} \quad \text{και} \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} J\psi_t\Big|_{t=0}$$

Προετοιμασία για τον υπολογισμό:

$$d\psi_t\Big|_x(\tau) = D_\tau \psi_t$$

$$= \tau + t D_\tau X + \frac{t^2}{2} D_\tau Z + O(t^3)$$

Σύμφωνα ως προς τις βάσεις $\tau_1, \dots, \tau_n$ για τον $T_x M$ και $e_1, \dots, e_{n+k}$ για τον $\mathbb{R}^{n+k}$ ο πίνακας που αντιστοιχεί στην απεικόνιση $d\psi_t\Big|_x : T_x M \to \mathbb{R}^{n+k}$ είναι

αυτός:

$$a_{il} = \tau_i^l + t D_{\tau_i} X^l + \frac{t^2}{2} D_{\tau_i} Z^l + O(t^3)$$

$i = 1, \dots, n$, $l = 1, \dots, n+k$

$\therefore$

$$\left(d\psi_t\big|_x\right)^* \circ \left(d\psi_t\big|_x\right) \longleftrightarrow (b_{ij}) \qquad \begin{matrix} i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n \end{matrix}$$

$$b_{ij} = \sum_{l=1}^{n+k} a_{li}\, a_{lj}$$

$$= \left(\tau_i^l + t D_{\tau_i} X^l + \frac{t^2}{2} D_{\tau_i} Z^l + O(t^3)\right)\left(\tau_j^l + t D_{\tau_j} X^l + \frac{t^2}{2} D_{\tau_j} Z^l + O(t^3)\right)$$

$$= \delta_{ij} + t\left(\tau_i \cdot D_{\tau_j} X + \tau_j \cdot D_{\tau_i} X\right)$$
$$+ t^2\left(\frac{1}{2}\left(\tau_i \cdot D_{\tau_j} Z + \tau_j \cdot D_{\tau_i} Z\right) + (D_{\tau_i} X)\cdot(D_{\tau_j} X)\right)$$
$$+ O(t^3)$$

Χρειαζόμαστε:

(11) $$\det(I + tA + t^2 B) = 1 + t\,\mathrm{tr}\,A + t^2\left(\mathrm{tr}\,B + \frac{1}{2}(\mathrm{tr}\,A)^2 - \frac{1}{2}\mathrm{tr}(A^2)\right) + O(t^3)$$

<u>Δόκιμο 6</u>

Επαληθεύστε την (11).

Εφαρμόζοντας στις (11) παίρνουμε

$$(J\psi_t)^2 = 1 + 2t\,\mathrm{div}_\mu X$$
$$+ t^2\Big(\mathrm{div}_\mu Z + 2(\mathrm{div}_\mu X)^2 + \sum_{i=1}^{n} |D_{\tau_i} X|^2$$
$$- \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} (\tau_i \cdot D_{\tau_j} X + \tau_j \cdot D_{\tau_i} X)^2\Big)$$
$$+ O(t^3)$$

$$= 1 + 2t\,\mathrm{div}_\mu X + t^2\Big(\mathrm{div}_\mu Z + 2(\mathrm{div}_\mu X)^2$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} |(D_{\tau_i} X)^\perp|^2$$
$$- \sum_{i,j=1}^{n} (\tau_i \cdot D_{\tau_j} X)(\tau_j \cdot D_{\tau_i} X)$$
$$+ O(t^3),$$

όπου

$(D_{\tau_i} X)^\perp$ (= κάθετο μέρος του $D_{\tau_i} X$)

$$= D_{\tau_i} X - \sum_{j=1}^{n} (\tau_j \cdot D_{\tau_i} X)\,\tau_j .$$

Κάνουμε χρήση του $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + O(x^3)$

Therefore

$$J\psi_t = 1 + t\,\mathrm{div}_M X + \frac{t^2}{2}\Big(\big(\mathrm{div}_M Z\big) + \big(\mathrm{div}_M X\big)^2 + \sum_{i=1}^{n} \big|(D_{\tau_i} X)^{\perp}\big|^2 - \sum_{i,j=1}^{n} (\tau_i \cdot D_{\tau_j} X)(\tau_j \cdot D_{\tau_i} X)\Big) + o(t^3).$$

$\therefore$

$$(12) \quad \frac{d}{dt} H^n(M_t)\Big|_{t=0} = \int_M \mathrm{div}_M X \, dH^n$$

$$\frac{d^2}{dt^2} H^n(M_t)\Big|_{t=0} = \int_M \Big\{ \mathrm{div}_M Z + (\mathrm{div}_M X)^2 + \sum_{i=1}^{n} |(D_{\tau_i} X)^{\perp}|^2 - \sum_{i,j=1}^{n} (\tau_i \cdot D_{\tau_j} X)(\tau_j \cdot D_{\tau_i} X) \Big\}.$$

Ορ

M είναι στάσιμο, ανάλογα εντός του U του συμπαγούς του περιβάλλοντα εάν $H^n(M \cap K) < \infty$ $\forall$ συμπαγές $K \subset U$, και εάν $\frac{d}{dt} H^n(M_t)\Big|_{t=0} = 0$, όπου $M_t = \phi_t(M \cap K)$, $\forall \phi_t$ όπως στην §3.

Κατά συνέπεια M είναι στάσιμο ακριβώς εάν και μόνον εάν $\int_M \operatorname{div}_M X \, dH^n = 0$, $\forall X \in C^1$, με φορέα συμπαγή εντός του U. $(\forall \phi_t \Rightarrow \forall X)$

Στη συνέχεια δίνουμε εναλλακτικές εκφράσεις του τύπου (12).

Λήμμα 1

(1) Εάν M είναι C^2 υποπολλαπλότητα του $\mathbb{R}^{n+k}$ και $\bar{M}$ είναι C^2 υποπολλαπλότητα με $(n-1)$-διάστατο σύνορο $\partial M = \bar{M} \setminus M$, τότε το M είναι στάσιμο εντός του U εάν και μόνον εάν $\vec{H} = 0$ στο $M \cap U$ και $\partial M \cap U = \emptyset$.

(2) Γενικότερα εάν M C^2 υποπολλαπλότητα του $\mathbb{R}^{n+k}$ και $\bar{U} \cap M$ συμπαγές υποσύνολο του M, τότε M ελάχιστο ανάλογα εάν και μόνον εάν $\vec{H} = 0$ στο $M \cap U$.

Απόδειξη

Υπενθυμίζουμε τον (5):

$$(13) \quad \int_M \operatorname{div}_M X \, dH^n = -\int_M X \cdot \vec{H} \, dH^n - \int_{\partial M} X \cdot \eta \, dH^{n-1}$$

Εφόσον το X έχει συμπαγή φορέα εντός του U, και $\bar{U} \cap M \subset M$

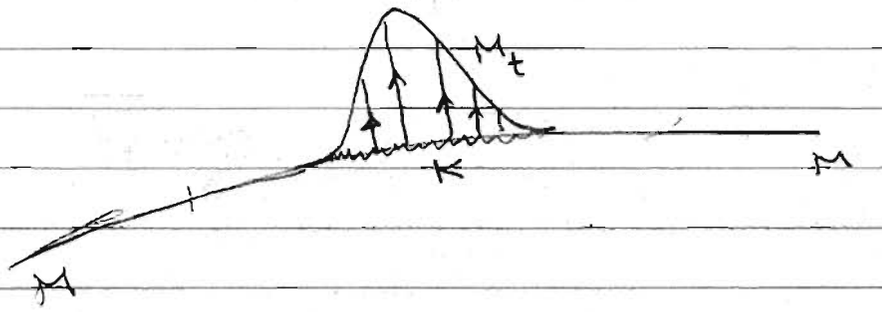
Επίσης ότι $\int_{\partial M} X \cdot \eta \, dH^{n-1} = 0$.

Τώρα το Λήμμα προκύπτει διότι το X είναι αυθαίρετο.

$\square$

<u>Παρατήρηση</u>

Εάν το M είναι προσανατολισμένο οπότε ορίζεται το κάθετο διανυσματικό πεδίο $N(x) = (\nu_1(x) \quad \nu_k(x))$, $x \in M$ μπορούμε να επιλέξουμε $\phi_t(x) = x + t\, \zeta(x)\, N(x)$, $\zeta : U \to \mathbb{R}$, με συμπαγή φορέα εντός του K.

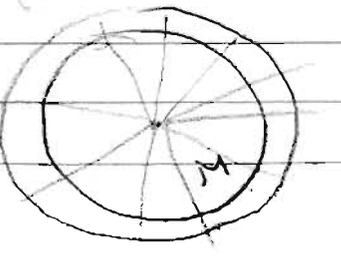


Η (12) για την επιλογή $X = N$ δίνει

$$(14) \quad \frac{d}{dt} H^n(M_t)\Big|_{t=0} = -\int_M \zeta(x)\, |\vec{H}|\, dH^n$$

Πώς είναι διαισθητικά αναμενόμενο; Η μεταβολή της "περιμέτρου" κατά τη κάθετο κατεύθυνση είναι ανάλογη της καμπυλότητας.

M = επίπεδο



M = σφαίρα

Άσκηση 7 (Do Carmo, Curves and Surfaces, p 212)

Έστω $\underline{X}(u,v)$ ομαλή επιφάνεια. Ως παράλληλη επιφάνεια ορίζεται η επιφάνεια

$$\underline{Y}(u,v) = \underline{X}(u,v) + a\,\underline{N}(u,v) \quad , \text{ σταθερά } a$$

(a) Δείξτε ότι $\underline{Y}_u \wedge \underline{Y}_v = (1 - 2Ha + Ka^2)(\underline{X}_u \wedge \underline{X}_v)$, K = Gauss καμπυλότητα, H = μέση καμπυλότητα, του $\underline{X}$.

(b) Κάνοντας χρήση του (a) δείξτε

$$\frac{d}{da}\iint_Q |\underline{Y}_u \wedge \underline{Y}_v|\,du\,dv = -2\iint_Q H\,du\,dv. \qquad \square$$

Τέλος εξάγετε μια άλλη μορφή του τύπου της 2ης μεταβολής της περιμέτρου:

Λήμμα 2

Έστω M C^2, κρίσιμο σημείο του συναρτησιακού της περιμέτρου, U ανοιχτό στο $\mathbb{R}^{n+k}$, $(\overline{M} \setminus M) \cap U = \emptyset$, και X ομαλός στην (12), με συμπαγή φορέα στο U και επίσης $X(y) \in (T_y M)^\perp$ $\forall\, y \in M$, τότε

$$(15) \quad \frac{d^2}{dt^2} H^n(M_t)\Big|_{t=0} = \int_M \left(\sum_{i=1}^n |(D_{\tau_i} X)^\perp|^2 - \sum_{i,j=1}^n (X \cdot B(\tau_i, \tau_j))^2 \right) dH^n.$$

Σύμβαση

Στην ειδική περίπτωση συνάρτησης 1, δηλαδή $k=1$, και M προσανατολισμένης πολλαπλότητας με κάθετο ν, εισάγαμε $X = z\nu$, $z = z(x)$, βαθμωτή συνάρτηση ορισμένη στο M, με ολίσθηση φορέα. Τότε για $M_t = \varphi_t(M)$, φ όπως στην Πρόταση στη σ. 24.

$$(16) \quad \frac{d^2}{dt^2} H^n(M_t)\Big|_{t=0} = \int_M \left(|\nabla^M z|^2 - z^2 |B|^2 \right) dH^n$$

όπου $|B|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} |B(\tau_i, \tau_j)|^2 \equiv \sum_{i,j=1}^{n} |\nu \cdot B(\tau_i, \tau_j)|^2$.

Πράγματι, $(D_{\tau_i}(\nu z))^{\perp} = \nu D_{\tau} z$, εφ' όσον $D_{\tau_i} \nu \Big|_y \in T_y M$.

Απόδειξη Λήμματος

Πρώτον $\int_M \operatorname{div}_M Z \, dH^n = 0$, λόγω κριτήριου ορίσεως.

Δεύτερον $\operatorname{div}_M X \overset{(4)'}{=} -X \cdot \bar{H} = 0$.

Τέλος μέσω της (2) $\tau_i \cdot D_{\tau_j} X = X \cdot B(\tau_i, \tau_j)$, και λαμβάνοντας υπόψιν ότι $X \perp M$.

$\square$

Λυση Α6 6

(α) $\det(I + tA + t^2B) = 1 + t\,\mathrm{tr}A + t^2\left(\mathrm{tr}B + \frac{1}{2}(\mathrm{tr}A)^2 - \frac{1}{2}\mathrm{tr}(A^2)\right) + O(t^3)$

I. Χωρίς βλάβη της γενικότητος υποθέτουμε ότι ο A διαγωνιοποιείται, διότι οι διαγωνιοποιήσιμοι πίνακες είναι πυκνό σύνολο.

II. Έστω S τ.ω. $S^{-1}AS = \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

$\det(I + tA + t^2B) = \det(I + t\Lambda + t^2\tilde{B})$, $\tilde{B} = S^{-1}BS$

Επομένως $\mathrm{tr}\tilde{B} = \mathrm{tr}B$

III. $Ax = \lambda x \Rightarrow A^2x = \lambda Ax = \lambda^2 x$. Συνεπώς

$\mathrm{tr}A^2 = \sum \lambda_i^2$, $(\mathrm{tr}A)^2 = (\sum \lambda_i)^2$

IV. $(b_{ij}) =: \tilde{B}$

$$\det\begin{bmatrix} 1+t\lambda_1+t^2b_{11} & t^2b_{12} & \cdots & t^2b_{1n} \\ t^2b_{21} & 1+t\lambda_2+t^2b_{22} & \cdots & t^2b_{2n} \\ t^2b_{31} & t^2b_{32} & 1+t\lambda_3+t^2b_{33} \cdots & t^2b_{3n} \\ \vdots & & & \end{bmatrix}$$

$$= (1+t\lambda_1+t^2b_{11})\det\begin{bmatrix} 1+t\lambda_2+t^2b_{22} & \cdots & t^2b_{2n} \\ t^2b_{32} & 1+t\lambda_3+t^2b_{33} & \cdots \end{bmatrix}$$

$$-t^2b_{21}\det\begin{bmatrix} t^2b_{12} & \cdots & t^2b_{1n} \\ & & \end{bmatrix} + t^2b_{31}\det\begin{bmatrix} t^2b_{12} & \cdots & t^2b_{1n} \end{bmatrix}$$

— ...

$$= (1+t\lambda_1+t^2 b_{11})(1+t\lambda_2+t^2 b_{22}) \cdots (1+t\lambda_n+t^2 b_{nn})$$
$$+ O(t^4)$$

$$= 1 + t(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)$$
$$+ t^2\Big((b_{11}+\dots+b_{nn}) + (\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\dots+\lambda_1\lambda_n)$$
$$+ (\lambda_2\lambda_3+\lambda_2\lambda_4+\dots+\lambda_2\lambda_n)+\dots+\lambda_{n-1}\lambda_n\Big)$$

$$= 1 + t\,\mathrm{tr}A + t^2\Big(\mathrm{tr}B + \tfrac{1}{2}(\mathrm{tr}A)^2 - \tfrac{1}{2}\mathrm{tr}(A^2)\Big).$$

$\square$

immersion

Άσκηση 8

Έστω M συμπαγής n-διάστατη υποπολλαπλότητα με $\partial M = \emptyset$, και έστω $F_0 : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ όμοια εμβύθιση της M ως υπερεπιφάνεια εντός του $\mathbb{R}^{n+1}$. Η $M_0 = F_0(M)$ λέγεται ότι εξελίσσεται μέσω μέσης καμπυλότητας εάν υπάρχει οικογένεια από όμοιες εμβυθίσεις $F(\cdot,t)$ με αντίστοιχες υπερεπιφάνειες $M_t = F(\cdot,t)(M)$ που ικανοποιεί την εξίσωση

$$(\mathrm{MMC})\quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}F(p,t) = \vec{H}(p,t), & p \in M \\ F(\cdot,0) = F_0 \end{cases}$$

$\vec{H}$ το διανύσμα μέσης καμπυλότητας.

Δείξτε ότι ισχύει

$$(17) \quad \frac{d}{dt} H^n(F(\cdot,t)(M)) = -\int_M \frac{\partial F}{\partial t} \cdot \vec{H}\, dH^n$$

$$= -\int_M |\vec{H}|^2 dH^n \leq 0.$$

Κατά συνέπεια ο νόμος (MMC) μειώνει την συνολική περίμετρο κατά την εξέλιξη.

Άσκηση 9

Θεωρούμε τον νόμο εξέλιξης

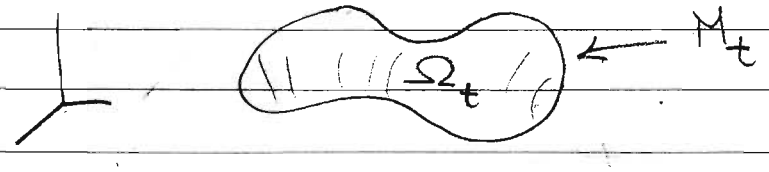
$$(NMMC) \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} F(p,t) = \vec{H}(p,t) - \int_M \vec{H}(p,t)\, dH^n \\ F(\cdot,0) = F_0 \end{cases},$$

όπου M όπως στην Άσκηση 8.

Δείξτε

(i) $\frac{d}{dt} H^n(F(\cdot,t)(M)) \leq 0.$

(ii) Θεωρήστε ότι $F(\cdot,t): M \to \mathbb{R}^{n+1}$ είναι Embedding $\forall t$, και θεωρήστε τον "Όγκο" που περιέχεται από το $M_t = \partial\Omega_t$



Δείξτε ότι

$$(18) \quad \frac{d}{dt} H^{n+1}(\Omega_t) = 0.$$

Το Πρόβλημα Plateau
Μέρος Ι : Ύπαρξη

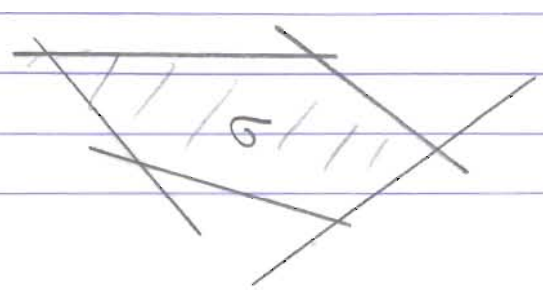
§4. Αλυσίδες Ύφους (Flat Chains)

1) Μετρική Αβελιανή Ομάδα $(G, +)$.
Η G έχει νόρμα με
$$|a+b| \leq |a| + |b| \ , \ |-a| = |a|$$
$$|a| \geq 0 \quad \text{και} \quad |a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$$

Παραδείγματα
a) $\mathbb{Z}$, $|\cdot|$
b) $\mathbb{R}$, $|\cdot|$
c) $\mathbb{Z}_p$, $m = n \bmod p$. Η νόρμα στις κλάσεις ισοδυναμίας ορίζεται ως εξής:
$$|[a]| = \min\{|a'|, a' \in [a]\}.$$
$\mathbb{Z}_5$, $|[3]| = 2$, $|[4]| = 1$

d) Για $G = \mathbb{Z}$ ή $\mathbb{R}$, $|a| := |a|^{\alpha}$, $0 < \alpha \leq 1$.
e) G πεπερασμένη ομάδα, $|g| = \begin{cases} 0, & \text{εαν } g = 0 \\ 1, & g \neq 0. \end{cases}$

2) Πολυεδρικές Αλυσίδες (Polyhedral Chains)
Θεωρούμε αρχικά ένα επίπεδο E^2. Πεπερασμένο τόξο ημιεπιπέδων ορίζει ένα κελί σ (φραγμένο, κλειστό)

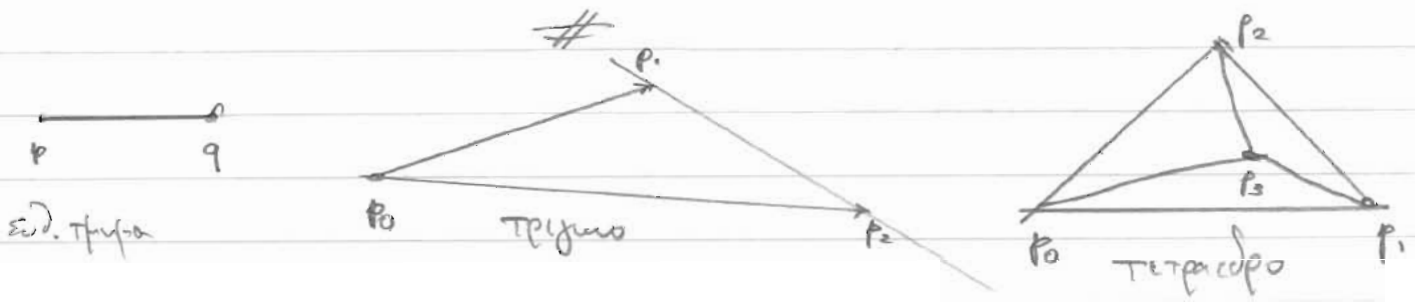


Αναλογα ορίζουμε και το κέλυ στον E^r (r διαστάσεις).
Δοθέντος ενός κέλυφους σ στον E^n, το επίπεδο $P(\sigma)$ είναι το μικρότερο υπερεπίπεδο (affine subspace του E^n) που περιέχει το σ. <u>Η διάσταση του σ</u>, $\dim(\sigma)$, είναι η διάσταση του $P(\sigma)$. Κέλυφος διάστασης r συμβολίζεται με σ^r.

Έστω $p_0, p_1, \dots, p_r$ ($r \le n$) σημεία στον E^n τ.ω. τα διανύσματα $p_1 - p_0, \dots, p_r - p_0$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Τότε το συνολο των κυρτών συνδυασμών των $p_0, \dots, p_r$ λέγεται <u>r-simplex</u>. 1-simplex είναι ευθύγραμμο τμήμα, 2-simplex τρίγωνο, 3-simplex τετράεδρο κ.λ.π. Τα σημεία $p_0, p_1, \dots$ λέγονται <u>κορυφές</u>.

<u>Ασκηση 10</u>

$\forall\, x \in r\text{-simplex}$, $x = \sum_{j=0}^{r} t^j p_j$, με μοναδικο τροπο

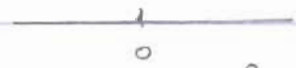


Συμβολισμός simplex: $\sigma = p_0 \cdots p_r$. Το επίπεδο $P(\sigma)$ καλείται τον προσανατολισμό του E^n. <u>Το simplex $p_0 \cdots p_r$ προσανατολίζεται από το frame $(p_1 - p_0, \dots, p_r - p_0)$</u>; δηλαδή κατά πόσον το frame έχει τον προσανατολισμό του $P(\sigma)$ ή τον αντίθετο του.
Η διαφορά μεταξύ των δύο frame, και των δύο γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων είναι η διάταξη. Το frame $(1,0),(0,1)$ είναι διάφορο του frame $(0,1),(1,0)$. Δοθέντος frame $v_1, \dots, v_n$ στον E^n ο προσανατολισμός καθορίζεται από το πρόσημο της $\det(v_1, \dots, v_n)$.
Δοθέντος frame $v_1, \dots, v_r$ εντός ενός r-επιπέδου $P(\sigma)$

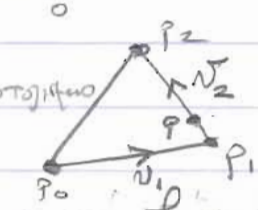
εντος του E^n, κάνοντας χρήση της βάσης του $P(\sigma)$ μπορούμε να εκφράσουμε το κάθε v_i, $i=1,\dots,r$, με r (στον αριθμό) συντεταγμένες, δηλαδή $v_i \longleftrightarrow v_i'$, v_i' r-διανύσματα. Έτσι η $\det(v_1',\dots,v_r')$ ορίζεται και το πρόσημό του καθορίζει τον προσανατολισμό των $v_1,\dots,v_r$.

<u>Ο προσανατολισμός του ανοιχτού $\partial\sigma$ του simplex</u> ορίζεται ως εξής:

Για $n=1$, $\sigma=$

$\subset E^1 =$ 

$\sigma = pq$, $q \in \partial\sigma$ θετικά ενώ $p \in \partial\sigma$ αρνητικά προσανατολισμένο



Για $n=2$, $\sigma = p_0p_1p_2$ που προσανατολίζεται από το frame (p_1-p_0, p_2-p_0) ή ισοδύναμα από το (v_1, v_2), όπου $v_i = p_i - p_{i-1}$, $i=1,2$. Έστω $\sigma' = (v_2)$ και έστω $p \in \mathrm{int}(\sigma')$.

Τότε είτε $p+tv_1 \notin \sigma$ για $t>0$, ή $p+tv_1 \in \sigma$ για $t>0$, και αρκετά μικρό. Αντίστοιχα λέμε ότι το v_1 κατευθύνεται εκτός του σ ή εντός του σ. Στην 1η περίπτωση λέμε ότι ο προσανατολισμός του σ' ορισμένος από το (v_2), <u>συμφωνεί</u> με αυτόν του σ, και το σ' είναι θετικά προσανατολισμένο εντός του $\partial\sigma$. Στην 2η περίπτωση λέμε ότι το σ' είναι αρνητικά προσανατολισμένο. Για $(v_1,\dots,v_n)$ που προσανατολίζει το σ, έτσι ώστε τα $v_2,\dots,v_n \in \sigma'$, επιλέγουμε $p \in \mathrm{Int}(\sigma')$ και παρόμοια θεωρούμε το $p+tv_1$. Επί παραδείγματι εάν $\sigma = p_0p_1\dots p_r$ και $\sigma' = p_1\dots p_r$, θέτουμε $v_i = p_i - p_{i-1}$. Τότε το frame $(v_1,\dots,v_r)$ προσανατολίζει το σ, το $(v_2,\dots,v_r)$ το σ', και το v_1 κατευθύνεται εκτός του σ στο σ'. Κατά συνέπεια το σ' είναι θετικά προσανατολισμένο εντός του $\partial\sigma$.

Ένα πολύεδρο Q είναι πεπερασμένο σύνολο κελιών (κλειστό σύνολο). Η διάσταση του Q, $\dim(Q)$, είναι η μεγαλύτερη των διαστάσεων των κελιών. Εάν όλα τα κελιά του το απαρτίζουν είναι της ίδιας διάστασης r, και $Q \subset \Pi$, Π υπερεπίπεδο διάστασης r, τότε μιλάμε για πολυεδρικό χωρίο εντός του Π.
(r- υπερεπίπεδο)

Στην συνέχεια ορίζουμε τις πολυεδρικές άλγεβρες. Κατ'αρχήν ορίζουμε τις πολυεδρικές r-αλγεβρές στο Π. Έστω $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ φραγμένα, ξένα ανά δύο πολυεδρικά χωρία εντός του Π. Για κάθε σ_i αντιστοιχούμε $g_i \in G$, και κάνουμε την μορφή

$$A = \sum_{i=1}^{m} g_i \sigma_i \qquad (\sigma_i \text{ ξένα μεταξύ τους}).$$

πολυεδρική r-αλγεβρα A στο Π. Προσδιορίζουμε την A ορίζοντας μια συνάρτηση $A(p)$ στον E^r,

$$A(p) = g_i \quad \text{ή} \quad -g_i \quad , p \in \operatorname{int}(\sigma_i)$$

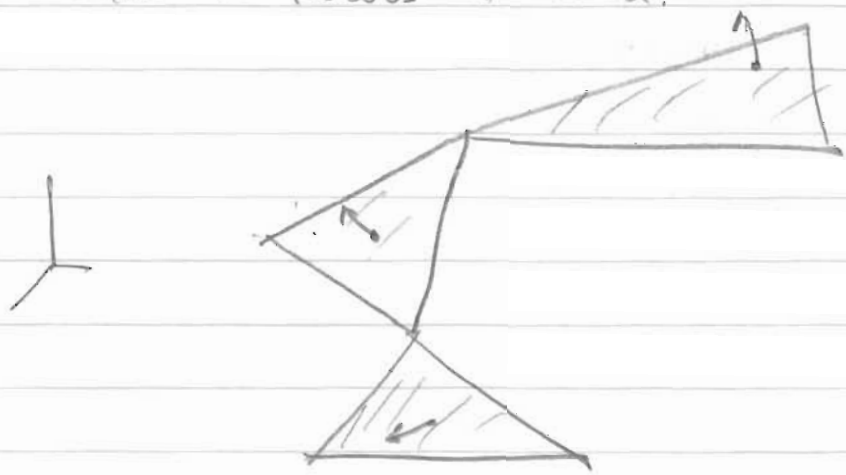
ανάλογα με το αν το σ_i είναι θετικά ή αρνητικά προσανατολισμένο

$$A(p) = 0 \quad , p \notin \bigcup_{j=1}^{m} \sigma_j$$

Θεωρούμε $A = B$ εάν οι αντίστοιχες συναρτήσεις είναι ίδιες modulo πεπερασμένο σύνολο κελιών διάστασης $< r$. Παρατηρούμε ότι εάν $\sum_{ij} \tau_{ij}$ υποδιαιρεσή των σ_i τότε

$\sum a_i \sigma_i$ και $\sum_{i,j} g_i \tau_{ij}$ είναι τα ίδια. Ορίζουμε το aA μέσω της $aA(p)$ $(a \in G)$ και το $A+B$ μέσω της $A(p)+B(p)$.
Η γενική r-πολυεδρική άλγεβρα στον E^n αποτελείται από ένα πεπερασμένο αριθμό r-υπερεπιπέδων με πολυεδρικές αλγεβρές

εντος το καθενος 100 αντα.



Κατ' αυτο τον τροπο οι r-πολυεδρικες αλυσιδες οριζαν εναν διανυσματικο χωρο:

$$\mathcal{P}_k(\mathbb{R}^N, G) = \{ \text{πολυεδρικες } k\text{-αλυσιδες στον } \mathbb{R}^N$$

$$\text{με συντελεστες στον } G \}$$

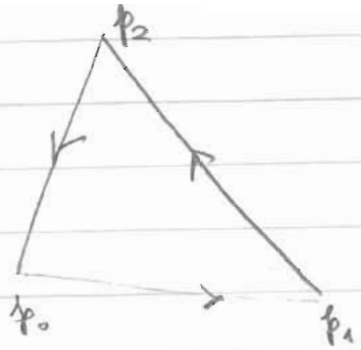
Το <u>τοπολογικο συνορο</u> ∂A μιας r-πολυεδρικης αλυσιδας A ειναι μια $(r-1)$-αλυσιδα που οριζεται ως εξης:
Για $r=0$ θεταμε $\partial A = 0$. Εστω σ κεφ. Εαν $r=1$ τοτε $\sigma = pq$, $\partial q = q - p$. Για $r \geq 2$ το $\partial\sigma$ ειναι το αθροισμα ολων των $(r-1)$-faces του σ, προσανατολισμενων ωστε να συμφωνουν με το σ. Εχουμε

$$\partial \sum g_i \sigma_i^r = \sum g_i \partial \sigma_i^r$$

$$\partial(p_0 \cdots p_r) = \sum_{i=0}^{r} (-1)^i p_0 \cdots \hat{p}_i \, p_r .$$

$$\partial : \mathcal{P}_k \longrightarrow \mathcal{P}_{k-1}$$

$$(\mathcal{P}_{-1}(\mathbb{R}^N; G) := G, \quad \mathcal{P}_{-2}(\mathbb{R}^N, G) = 0).$$



$\sigma = p_0 p_1 p_2$ (= 2 αμπλίδα)

$\partial\sigma = (-1)^0 p_1 p_2 + (-1)^1 p_0 p_2 + (-1)^2 p_0 p_1$

$= p_1 p_2 - p_0 p_2 + p_0 p_1$ = 1 - αμπλίδα

$$\partial^2\sigma := \partial\partial\sigma = \partial(p_1 p_2) - \partial(p_0 p_2) + \partial(p_0 p_1)$$

$$= (\cancel{p_2} - \cancel{p_1}) - (\cancel{p_2} - \cancel{p_0}) + (\cancel{p_1} - \cancel{p_0}) = 0.$$

<u>Θεώρημα</u>

$$\partial^2 = 0 .$$

<u>Σημειώσεις</u>

Για περισσότερες λεπτομέρειες βλ. Whitney "Geometric Integration Theory" σελίδες 355 – 362, και 152 – 153.

§3 <u>Η Νόρμα του Whitney</u> (flat norm)

<u>Ορισμός</u> (Μάζα)

$A \in \mathcal{C}_k$, $A = \sum g_i \sigma_i$ ($\{\sigma_i\}$ μη επικαλυπτόμενα)

(19) $\mathbb{M}_k(A) = \sum |g_i| \, H^k(\sigma_i) = \inf\left\{ \sum |g_i| \, H(\sigma_i') : A = \sum g_i \sigma_i' \right.$ $\left. \{\sigma_i'\} \text{ ανεξάρτητα} \right\}$

$\mathbb{M}(\cdot) :=$ μάζα του A.

Προβλήματα με την Μάζα ως νόρμας συνδέονται με το ότι ο τελεστής ∂ δεν είναι συνεχής.

$$\mathbb{M}(R_\varepsilon) = \varepsilon, \quad \mathbb{M}(\partial R_\varepsilon) = \ell + 2\varepsilon$$

<u>Ορισμός</u> (Whitney νόρμα)

(20) $$W(A) = \inf_D \left\{ \mathbb{M}_k(A - \partial D) + \mathbb{M}_{k+1}(D) \;\middle|\; \begin{array}{l} A = k\text{-αλυσίδα στον } \mathbb{R}^N, \\ D \text{ ανοιχτή } (k+1)\text{-αλυσίδα στον } \mathbb{R}^N \end{array} \right\}.$$

Θα αποδείξουμε αργότερα ότι

(21) $$W(A) = 0 \iff A = 0$$

<u>Άσκηση 11</u>

Δείξτε ότι

(22) $$W(aA) = |a|\, W(A), \quad W(A+B) \le W(A) + W(B).$$

Παρατηρούμε διάφορεσιν των (21). Κατά συνέπεια η $W(\cdot)$ είναι νόρμα.

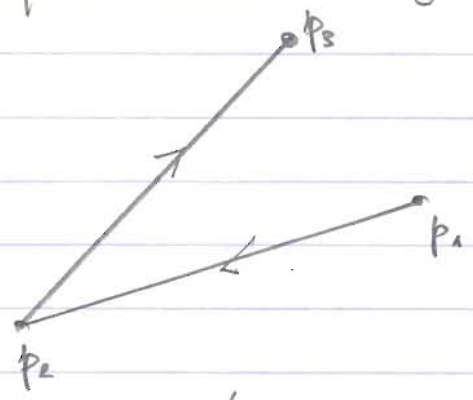
<u>Ορισμός</u>

Η διαδικασία της πυκνώσης των $\mathcal{P}_k$ μέσω της $W(\cdot)$ δίνει τον χώρο των Flat chains, F_k.

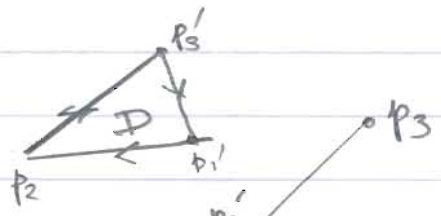
Παραδείγματα

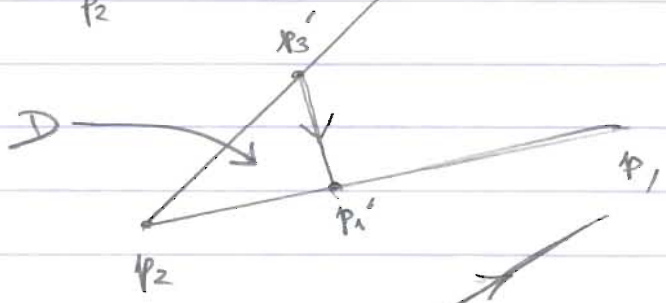
1) Θεωρείστε την 1-αλυσίδα στον $\mathbb{R}^2$, $A = p_1p_2 + p_2p_3$

$A =$

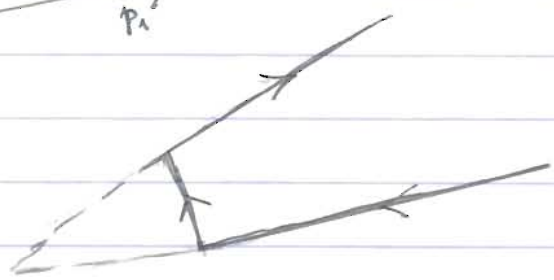


$D =$





$A - \partial D =$



$$W(A) = \underset{D}{\mathrm{Inf}} \left\{ \mathbb{M}(A - \partial D) + \mathbb{M}(D) \right\}$$

Σαφώς για D μικρό παρατηρούμε ότι

$$\mathbb{M}(A - \partial D) + \mathbb{M}(D) < \mathbb{M}(A).$$

Κατά συνέπεια σε αυτήν την περίπτωση

(23) $$W(A) < \mathbb{M}(A)$$

Λύση Ασκησης 5

$$(*)\ \det(A-\lambda I) = (-\lambda)^n + S_1(-\lambda)^{n-1} + S_2(-\lambda)^{n-2} + \dots + S_n = 0$$

$$S_1 = \sum a_{ii}\ ,\quad S_2 = \sum_{1\le i<k\le n} A\begin{pmatrix} i & k \\ i & k \end{pmatrix}, \dots$$

S_p = αθροίσματα των "principal minors" τάξης p

$$\det\left(u_{x_i}u_{x_j} + \delta_{ij}\right) =$$

$$A = \begin{bmatrix} u_{x_1}(u_{x_1}, u_{x_2}, \dots, u_{x_n}) \\ u_{x_2}(u_{x_1}, u_{x_2}, \dots, u_{x_n}) \\ \vdots \\ u_{x_n}(u_{x_1}, u_{x_2}, \dots, u_{x_n}) \end{bmatrix}$$

$$\lambda = -1$$

Παρατηρούμε ότι οι στήλες του A είναι πολλαπλάσια του ίδιου διανύσματος, δηλαδή ο A είναι rank 1 πίνακας. Κατά συνέπεια όλες οι "minors" τάξης $p \geq 2$ είναι μηδέν.

$\therefore$

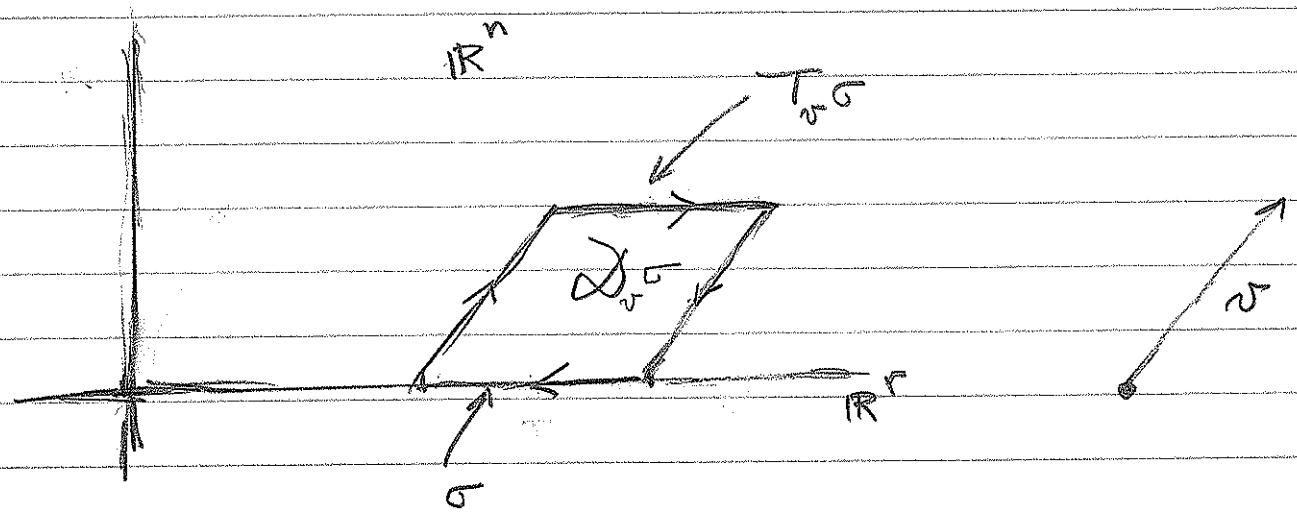
$$\det\left(u_{x_i}u_{x_j} + \delta_{ij}\right) = (+1)^n + S_1(+1)^{n-1}$$

$$= 1 + \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2 .$$

$\square$

2) Συνεχίζουμε τα παραδείγματα για την κατασκευή της Whitney νορμάς. Κατ'αρχήν εισάγουμε το "παραγωγικό γράφημα" $\mathcal{D}_v A$:

Δοθέντος προσανατολισμένου r-κελιού σ στον $\mathbb{R}^n$, και διανύσματος v, ορίζουμε με $T_v\sigma$ το κελί $p+v$, $p\in\sigma$.



$\mathcal{D}_v\sigma$:= παραλληλόγραμμο $(r+1)$-κελιού $p+tv$, $p\in\sigma$, $0\le t\le 1$.

Γενικότερα για πολυδύναμη αλυσίδα A ορίζουμε την $\mathcal{D}_v A$ γραμμικά.

Παρατηρούμε ότι

(24) $$\partial\mathcal{D}_v A = T_v A - A - \mathcal{D}_v \partial A.$$

Ευκολα βλέπουμε ότι

(25) $$\mathbb{M}(\mathcal{D}_v A) \le |v|\,\mathbb{M}(A).$$

Επομένως ισχύει

(26) $$W(T_v A - A) \leq |v| \left(\mathbb{M}(A) + \mathbb{M}(\partial A) \right).$$

Πράγματι

$$W(T_v A - A) \overset{(20)}{\leq} \mathbb{M}(T_v A - A - \partial \mathcal{D}_v A) + \mathbb{M}(\mathcal{D}_v A)$$

$$\overset{(24),(25)}{=} \mathbb{M}(\mathcal{D}_v \partial A) + |v| \mathbb{M}(A)$$

$$= |v| \left(\mathbb{M}(\partial A) + \mathbb{M}(A) \right).$$

Θεωρούμε τώρα το 1-simplex $\sigma = pq$, $|q-p| = a < 2$. Έστω επίσης $|v| =: b < \frac{a}{2}$. Θέτουμε $A = T_v \sigma - \sigma$,

$D = \mathcal{D}_v \sigma$.

Κατά συνέπεια

$$\partial \mathcal{D}_v \sigma \overset{(24)}{=} T_v \sigma - \sigma - \mathcal{D}_v \partial \sigma, \quad \mathbb{M}(\mathcal{D}_v \sigma) \leq |v| \mathbb{M}(A)$$

$$W(T_v \sigma - \sigma) \overset{(26)}{\leq} |v| (2 + a)$$

$$= 2b + ab$$

$$< a + ab$$

$$< 2a = \mathbb{M}(A).$$

Οι Βασικές Ιδιότητες της νορμας $\mathbb{W}$.

Για A flat chain ισχυουν οι ανισοτητες

$$(27) \qquad \mathbb{W}(\partial A) \leq \mathbb{W}(A) \leq \mathbb{M}(A).$$

Αποδειξη

Εστω A πολυεδρικη αλυσιδα.
Κατ'αρχην επιλεγοντας στην (20) $D=0$ παιρνουμε την 2η ανισοτητα. Οσον αφορα την 1η επιχειρηματολογουμε ως εξης:

Δοθεντος $\varepsilon>0$ επιλεγουμε D τ.ω.

$$\mathbb{M}(A-\partial D)+\mathbb{M}(D) < \mathbb{W}(A)+\varepsilon.$$

Θετουμε

$$D' = A-\partial D.$$

Εχουμε

$$\mathbb{M}(\partial A-\partial D')+\mathbb{M}(D') = \mathbb{M}(A-\partial D) < \mathbb{W}(A)+\varepsilon$$

$\Longrightarrow$

$$\mathbb{W}(\partial A) < \mathbb{W}(A)+\varepsilon,$$

και επειδη και η 1η ανισοτητα ικανοποιειται.
Τωρα περναμε απο τις πολυεδρικες στις flat ως εξης:

Πρώτα ορίζουμε το ∂A, A flat.
Έστω

$$A = \lim A_i \qquad (W\text{-σύγκλιση})$$

$\Longleftrightarrow$

$$\{A_i\} \text{ Cauchy}, \quad A_i \text{ πολυεδρικές}.$$

Επεται μεσω της (27) για πολυεδρικες οτι

$$\{\partial A_i\} \text{ Cauchy}.$$

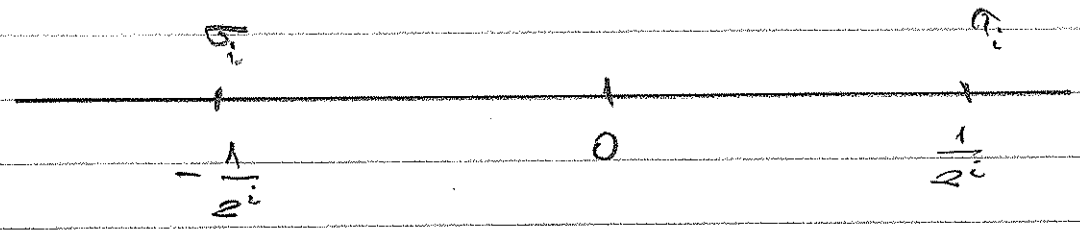
Κατα συνεπεια ∂A οριζεται και η (27) μεταφερεται στις flat charts.

ΟΕΔ.

<u>Παραδειγμα</u>

Το παραδειγμα που ακολουθει δειχνει οτι η W-νορμα δεν ειναι προσθετικη (additive) και κατα συνεπεια δεν αντιστοιχει σε καποιο μετρο.

Θεωρουμε τα 0-κελια $\sigma_i = -\frac{1}{2^i}$, $\tau_i = \frac{1}{2^i}$ εντος του $\mathbb{R}^1$



B_i = το 1-κελι $[\sigma_i, \tau_i]$

$A_i' = \tau_i - \sigma_i$, 0-αλυσιδα,

$A_k = A_0' + A_1' + \dots + A_k'$, 0-αλυσιδα

$$W(A_i') = W(\partial B_i) \leq \mathbb{M}(B_i) = \frac{2}{2^i}$$

$$W(A_m - A_n) = W\left(A_0' + \dots + A_m' - (A_0' + \dots + A_n')\right)$$

$$= W\left(A_{n+1}' + \dots + A_m'\right)$$

$$\leq \frac{2}{2^{n+1}} + \dots + \frac{2}{2^m}$$

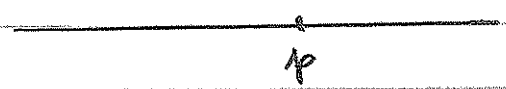
$\therefore$ $\{A_k\}$ Cauchy (W-ομοιόμορφα)

$\therefore$ $\lim A_k$ υπάρχει, έστω A.

A ένα ένα ανοιχτό απείρων σημείων με πεπερασμένη W-νόρμα.

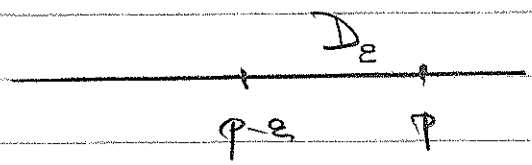
<u>Σχόλιο</u>

Έστω p σημείο στον $\mathbb{R}^1$



Ξέρουμε ότι $W(p) = 1$ $(G = \mathbb{Z})$

Πράγματι



$$W(p) = \inf_D \{ \mathbb{M}(p - \partial D) + \mathbb{M}(D) \}$$

$$\geq \inf_D \mathbb{M}(p - \partial D) \geq 1$$

(το ∂D έχει 2 σημεία, $\mathbb{M}$ είναι H^0 μέτρο, δηλαδή counting measure).

$$W(p) \leq \mathbb{M}(p - \partial D_\varepsilon) + \mathbb{M}(D_\varepsilon)$$

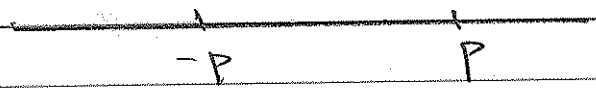
$$= 1 + \varepsilon$$

$$\therefore \quad W(p) = 1.$$

Συνεπώς η W κοντά δεν είναι καλά ορισμένο μέτρο.

$\square$

<u>Σχόλιο</u> (Β. Παπανικολάου)



$p \in \mathbb{R}^1$

Θεωρούμε τις 0-αλυσίδες

$A_+ = \mathbb{1}_p + \mathbb{1}_{-p}$, $A_- = \mathbb{1}_p - \mathbb{1}_{-p}$ ($\mathbb{1}_E$ = χαρακτηριστική συνάρτηση, $G = \mathbb{Z}$), και την 1-αλυσίδα D, το (προσανατολισμένο) simplex $[-p, p]$.

$$\partial D = \mathbb{1}_p - \mathbb{1}_{-p} = A_-$$

$\Rightarrow$

$$W(A_-) = W(\partial D) \leq W(D) \leq M(D) = 2p.$$

Επίσης

$$W(A_-) \leq M(A_-) = 2$$

$$\therefore \quad W(A_-) \leq \min\{2, 2p\}.$$

Στη συνέχεια θεωρούμε το A_+.

$$W(A_+) \leq M(A_+) = 2$$

$$W(A_+ + A_-) = W(2\mathbb{1}_p) \overset{(22)}{=} 2W(\mathbb{1}_p) \overset{\sigma.43}{=} 2$$

$$\Rightarrow 2 = W(A_+ + A_-) \leq W(A_+) + W(A_-) \leq W(A_+) + \min\{2, 2p\}.$$

$\Rightarrow$ Εάν $p < 1$ τότε $W(A_-) \leq 2p$, $W(A_+) \geq 2 - 2p$. $\square$

Πρόταση 1

Η Whitney νόρμα είναι η μεγαλύτερη (ημι-) νόρμα $|\cdot|$ στο χώρο των πολυεδρικών αλυσίδων με τις ιδιότητες

(i) $|\partial A| \leq |A|$

(ii) $|A| \leq \mathbb{M}(A)$

Απόδειξη

Έστω A k-αλυσίδα στον $\mathbb{R}^N$. Δοθέντος $\varepsilon > 0$ επιλέγουμε D, $(k+1)$-αλυσίδα, τ.ω.

$$\mathbb{M}(A - \partial D) + \mathbb{M}(D) < \mathbb{W}(A) + \varepsilon .$$

Συνεπώς

$$|A| \leq |A - \partial D| + |\partial D| \qquad \text{(ιδιότητα ημι-νόρμας)}$$

$$\leq \mathbb{M}(A - \partial D) + \mathbb{M}(D) \qquad \text{(i), (ii)}$$

$$< \mathbb{W}(A) + \varepsilon .$$

Επίσης το $\varepsilon > 0$ είναι αυθαίρετο

$$|A| \leq \mathbb{W}(A).$$

ΟΕΔ

Λήμμα 2

Έστω π ορθογώνια προβολή του $\mathbb{R}^N$ επί του υπερεπιπέδου Π. Τότε $\forall$ A k-πολυεδρική αλυσίδα

$$\mathbb{M}(\pi A) \leq \mathbb{M}(A) \quad (*)$$

(*) Προσοχή: Η πA θεωρείται ως k-αλυσίδα. Εάν η προβολή πA είναι χαμηλότερης διάστασης, τότε $\pi A = 0$.

Απόδειξη

Πρώτα

$$\pi \sum_i g_i \sigma_i = \sum_i g_i \pi(\sigma_i).$$

Για simplex σ έχουμε

$$\mathbb{M}(\pi(\sigma)) \leq \mathbb{M}(\sigma)$$

από στοιχειώδη γεωμετρία. Κατά συνέπεια το Λήμμα ισχύει.

Λήμμα 3

Έστω Q κυρτό πολυεδρικό κελί στον $\mathbb{R}^N$, και έστω για $p \in \mathbb{R}^N$

$\pi(p)$ = σημείο στο Q που ελαχιστοποιεί την απόσταση του p από το p.

Τότε

$$\mathbb{M}(\pi(A)) \leq \mathbb{M}(A),$$

$\forall$ A κυπολυεδρικά αμιγή.

Απόδειξη

Άσκηση 12.

$\square$

Λήμμα 4

Έστω π προβολή όπως στο Λήμμα 2 ή στο Λήμμα 3.
Τότε για κάθε A, k-πολυεδρικά αμιγή, έχουμε

$$W(\pi A) \leq W(A).$$

Απόδειξη

$$W(A) = \inf\{\mathbb{M}(A-\partial D) + \mathbb{M}(D)\}$$

$$\mathbb{M}(\pi(A-\partial D)) + \mathbb{M}(\pi D) \leq \mathbb{M}(A-\partial D) + \mathbb{M}(D).$$

$$\pi(A-\partial D) = \pi A - \partial \pi D$$

$\therefore$

$$W(\pi A) \leq W(A).$$

ΟΕΔ.

Άσκηση 13

$$W(A) = \inf_D \{W(A-\partial D) + W(D)\}, \quad A, D \text{ ως αλυσίδες.}$$

$\square$

Πρόταση 2

Εάν $\sigma_1, \dots, \sigma_s$ παραλληλόγραμμα simplexes και οποία προσανατολισμένα και $g_i \geq 0$, τότε ισχύουν οι σχέσεις

$$W\left(\sum_i g_i \sigma_i\right) = \mathbb{M}\left(\sum g_i \sigma_i\right) = \sum_i g_i \mathbb{M}(\sigma_i)$$

Απόδειξη

Έστω $a = \mathbb{M}(\sum g_i \sigma_i) = \sum |g_i| \mathbb{M}(\sigma_i) = \sum g_i \mathbb{M}(\sigma_i)$

Έστω για κάποιο D

$$\mathbb{M}(\sum g_i \sigma_i - \partial D) + \mathbb{M}(D) < a.$$

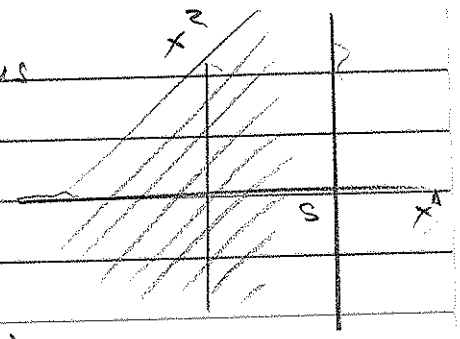
Επιλέγουμε r-επίπεδο P παράλληλο στα σ_i. Έστω π η αντίστοιχη προβολή. Από το Λήμμα 2

$$\mathbb{M}(\sum g_i \pi\sigma_i - \partial \pi D) + \mathbb{M}(\pi D) < a.$$

Εφόσον η D είναι $(r+1)$-αλυσίδα, $\pi D = 0 \Rightarrow \partial \pi D = 0$. Επειδή ότι $\mathbb{M}(\sum g_i \pi\sigma_i) = \mathbb{M}(\sum g_i \sigma_i) \overset{(19)}{=} \sum |g_i| \mathbb{M}(\sigma_i) < a$, άτοπο.

ΟΕΔ.

Έστω H_s ένας ανοιχτός ημιχώρος στον $\mathbb{R}^N$ της μορφής



$$H_s = \{ x \in \mathbb{R}^N \mid x^1 < s \}$$

Εάν σ είναι ένα r-κελί, τότε το $H_s \cap \sigma$ είναι επίσης r-κελί (ή κενό). Η H_s στον $\mathbb{R}^2$

Κατά ανάλογο τρόπο ορίζουμε r-αλυσίδα $P = \sum g_i \sigma_i$

$$P \cap H_s = \sum g_i (\sigma_i \cap H_s)$$

την ένα r-αλυσίδα.

<u>Λήμμα 5</u>

Εάν $\{P_j\}$ ακολουθία από στοιχεία του $\mathcal{P}_k(\mathbb{R}^N, G)$ με

(27) $$\sum_{j=1}^{\infty} W(P_j) < \infty ,$$

τότε για σχεδόν κάθε s (Lebesgue $\mathbb{R}^1$) ισχύει

(28) $$\sum_{j=1}^{\infty} W(P_j \cap H_s) < \infty .$$

<u>Σχόλιο</u>

Το Λήμμα 5 είναι σημαντικό διότι εφαρμόζει μια μορφή τοπικοποίησης της W-νόρμας. Υπενθυμίζουμε ότι δεν ισχύει εν γένει η τοπικοποίηση (βλ. Παράδειγμα και σχόλια σελίδες 42–45).

<u>Σχόλιο</u>

Υπενθυμίζουμε ότι

k-αλυσίδα (k+1)-αλυσίδα k-αλυσίδα

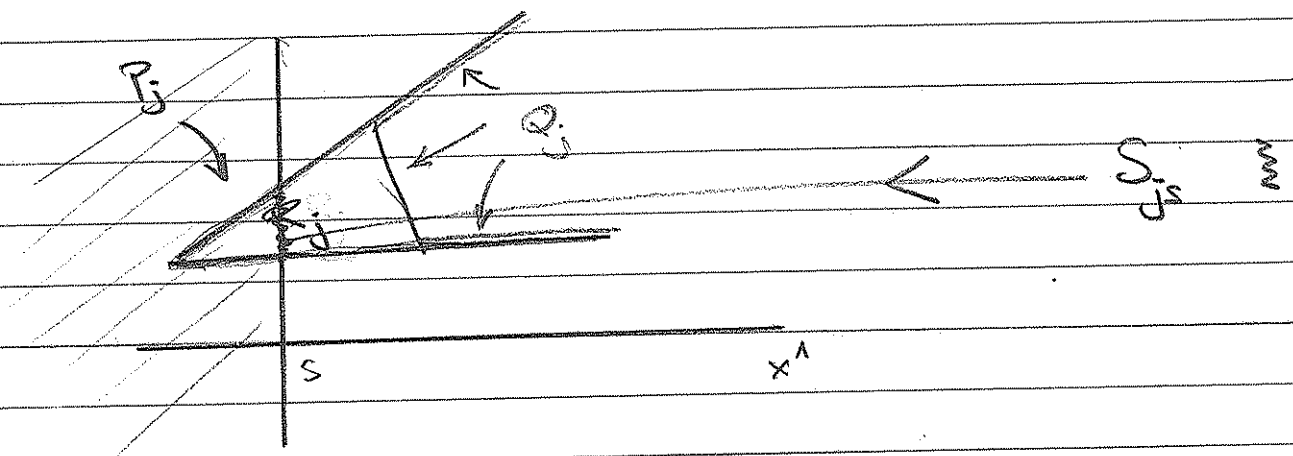
$$\overline{W}(A) = \inf_{Q,R} \{ \mathbb{M}(Q) + \mathbb{M}(R) \mid A = Q + \partial R \}$$

Απόδειξη

$$W(P_j) = \inf\{\mathbb{M}(Q) + \mathbb{M}(R) : P_j = Q + \partial R\}.$$

$\Rightarrow \exists\ Q_j, R_j$ τ.ω.

$$(29) \qquad \sum_j{}' \mathbb{M}(Q_j) + \mathbb{M}(R_j) < \infty$$



$$P_j = Q_j + \partial R_j, \quad P_j \cap H_s = Q_j \cap H_s + \partial R_j \cap H_s$$
$$= Q_j \cap H_s + \partial(R_j \cap H_s) + S_{js} \qquad (30)$$

οπου $\quad S_{js} = (\partial R_j) \cap H_s - \partial(R_j \cap H_s)$.

Εξ ορισμου της W-νορμας, από τον (30) προκυπτει

$$\begin{aligned} W(P_j \cap H_s) &\le \mathbb{M}(Q_j \cap H_s + S_{js}) + \mathbb{M}(R_j \cap H_s) \\ &\le \mathbb{M}(Q_j \cap H_s) + \mathbb{M}(S_{js}) + \mathbb{M}(R_j \cap H_s) \\ &\le \mathbb{M}(Q_j) + \mathbb{M}(S_{js}) + \mathbb{M}(R_j). \qquad (31) \end{aligned}$$

Από Fubini

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{M}(S'_{j_s})\, ds \leq \mathbb{M}(R_j) \qquad (32)$$

(Για flat chains ισχύει ένα γενικότερο αποτέλεσμα, Th. 5.7, Fleming, που αντιστοιχεί στην Ανισότητα του Eilenberg για μέτρα Hausdorff)

$\Longrightarrow$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sum_j \mathbb{M}(S'_{j_s})\, ds \leq \sum_j \mathbb{M}(R_j) \overset{(29)}{<} \infty$$

$\therefore$

$$\sum_j \mathbb{M}(S_{j_s}) < \infty \quad \text{a.e. } s \qquad (33)$$

$(31), (33), (29)$

$\Longrightarrow$

$$\sum_j \mathbb{W}(P_j \cap H_s) < \infty \quad \text{a.e. } s.$$

ΟΕΔ

<u>Πόρισμα</u>

Για σχεδόν όλα τα N-διαστήματα $I \subset \mathbb{R}^N$

$$\sum \mathbb{W}(P_j) < \infty \Longrightarrow \sum \mathbb{W}(P_j \cap I) < \infty.$$

<u>Θεώρημα</u> : Εάν $P \neq 0 \Longrightarrow \mathbb{W}(P) \neq 0$.

<u>Απόδειξη</u>

Έστω $P = \sum q_i P_i \neq 0$, και έστω ότι $\mathbb{W}(P) = 0$.

Εφαρμόζοντας το Πόρισμα έχουμε για $P = P_j$

$$\sum_{j=1}^{\infty} W(P \cap I) < \infty \quad , \quad P = P_j ,$$

Κατα συνεπεια

(34) $$W(P \cap I) = 0 \quad , \text{ για σχεδον καθε } I .$$

Χωρις βλαβη της γενικοτητος (μεσω υποδιαιρεσεων) μπορουμε να υποθεσουμε οτι τα $\{\sigma_i\}$ που οριζουν το P δεν εχουν επικαλυψεις. Επιλεγαμε I τ.ω.

$$P \cap I = g_i(\sigma_i \cap I) .$$

Μεσω της Προτασης 2, σ 48, εχουμε

(35) $$\mathbb{M}(P \cap I) = \mathbb{M}(g_i(\sigma_i \cap I)) = W(g_i(\sigma_i \cap I)) .$$

Επισης βλεπουμε

(36) $$\mathbb{M}(g_i(\sigma_i \cap I)) = |g_i| \, \mathbb{M}(\sigma_i \cap I) .$$

$$(34),(35),(36) \Longrightarrow |g_i| = 0 .$$

ΟΕΔ

§5 Η κατω ημισυνεχεια της Μαζας ως προς την W αγγιστρ.

Θεωρημα: Εστω $\{P_j\}, P \in \mathcal{P}_k(\mathbb{R}^N, G)$. Ισχυει

(37) $$W(P_j - P) \to 0 \Rightarrow \underline{\lim}_{j\to+\infty} \mathbb{M}(P_j) \geq \mathbb{M}(P).$$

Αποδειξη

Πρωτον παρατηρουμε οτι αρκει να δειξουμε το αποτελεσμα για ταχεως συγκλινουσες ακολουθιες $\sum_j W(P_j - P) < \infty$.

Η δευτερη παρατηρηση ειναι οτι μπορουμε να επιλεξουμε "generic" N-διαστημα I ως προς την ακολουθια με την εννοια του Πορισματος στην σ. 51. Επισης μπορουμε να υποθεσουμε οτι η ακολουθια $P^\circ = P \cap I$ εγκλειεται εντος k-επιπεδου Π οπως ακριβως στην αποδειξη του Θεωρηματος στην σ. 51.

Εστω P_j° η προβολη της $P_j \cap I$ επι του Π.

(38) $$\mathbb{M}(P_j^\circ - P^\circ) = W(P_j^\circ - P^\circ)$$
$$= W(\pi[(P_j \cap I) - P^\circ])$$
$$\leq W[(P_j \cap I) - P^\circ] \quad (\text{Λημμα 4, §4}).$$

Εχουμε

$$(P_j \cap I) - P^\circ = (P_j - P) \cap I,$$ και επομενως

(39) $$\sum W[(P_j - P) \cap I] < \infty. \quad (\text{Πορισμα §4})$$

(39), (38) $\Longrightarrow$

(40) $$\mathbb{M}(P_j^\circ - P^\circ) \longrightarrow 0$$

$\Longleftrightarrow$

$$\lim_{j\to+\infty} \mathbb{M}(P_j^\circ) = \mathbb{M}(P^\circ).$$

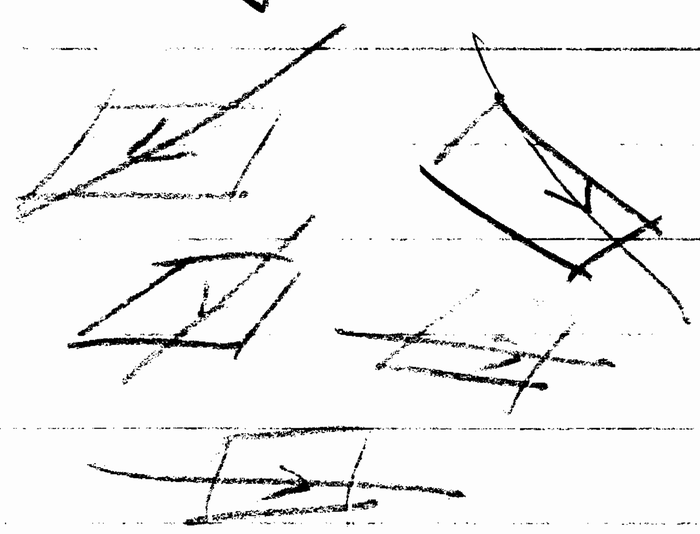
Ισχυει οπωσδηποτε

$$\lim \mathbb{M}(P_j^\circ) = \lim \mathbb{M}(\pi(P_j \cap I)) \leq \underline{\lim}\ \mathbb{M}(P_j \cap I).$$

Κατα συνεπεια

(41) $$\mathbb{M}(P^\circ) \leq \underline{\lim}\ \mathbb{M}(P_j \cap I).$$

Τωρα δοθεντος $\varepsilon > 0$ επιλεγαμε $I_1, I_2, \ldots, I_p$, ξενα ανα δυο ετσι ωστε $I_1 \cup \ldots \cup I_p$ περιεχαν σχεδον ολη την φαφα της P:



$$P = [P \cap (I_1 \cup \ldots \cup I_p)] + [P \cap (I_1 \cup \ldots \cup I_p)^c]$$

$$\mathbb{M}(P \cap (I_1 \cup \ldots \cup I_p)^c) < \varepsilon.$$

Ετσι

$$\mathbb{M}(P) \leq \sum_{i=1}^{p} \mathbb{M}(P \cap I_i) + \varepsilon$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \mathbb{M}(P_i^{\circ}) + \varepsilon$$

$$\leq \sum_{i=1}^{p} \varliminf_{j\to\infty} \mathbb{M}(P_j \cap I_i) + \varepsilon$$

$$\leq \varliminf_{j\to\infty} \sum_{i=1}^{p} \mathbb{M}(P_j \cap I_i)$$

$$\leq \varliminf_{j\to\infty} \mathbb{M}(P_j).$$

ΘΕΔ

§6 Ο χώρος των Αρκετά Κυρίων (Flat Chains)

Έστω $\mathcal{C}_k(\mathbb{R}^N, G)$ η W-πληρωση των $\mathcal{P}_k(\mathbb{R}^N, G)$. Τα στοιχεία του $\mathcal{C}_k$ λέγονται "flat chains" διαστάσης k και θα τα συμβολίζουμε με $A, B, \ldots$ κ.λ.π.

Εάν $\{P_j\}$ ακολουθία στον $\mathcal{P}_k(\mathbb{R}^N, G)$, Cauchy, τότε

$$W(\partial P_i - \partial P_j) = W[\partial(P_i - P_j)] \leq W(P_i - P_j).$$

Κατά συνέπεια η $\{\partial P_j\}$ είναι Cauchy ακολουθία εντός του $\mathcal{P}_{k-1}(\mathbb{R}^N, G)$, και οδηγούμεθα σε $(k-1)$-flat chain ∂A την καλούμε σύνορο ∂A της A. Παρατηρούμε ότι

$$W(\partial A) \leq W(A).$$

$\therefore \quad \partial : C_k \longrightarrow C_{k-1}$, συνεχής ως προς $\mathbb{W}$.

Η μάζα της flat chain A ορίζεται ως ο μικρότερος αριθμός λ τ.ω. $\exists \{P_j\} \subset \mathcal{P}_k$, $P_j \xrightarrow{\mathbb{W}} A$ και $\mathbb{M}(P_j) \longrightarrow \lambda$:

(41) $\mathbb{M}(A) = \inf \{ \lambda \mid P_j \to A,\ \mathbb{M}(P_j) \longrightarrow \lambda \}$.

Παρατηρήσεις

1) Έστω $A \in \mathcal{P}_k$, $P_j \to A$. Τότε από το Θεώρημα της κάτω ημισυνέχειας ο ορισμός (41) είναι συμβατός με τον ορισμό της μάζας για πολυεδρικές αλυσίδες.

2) Εξ' ορισμού η μάζα είναι η μεγαλύτερη κάτω ημισυνέχεια επάνω από τα $\mathcal{P}_k$ στα C_k του k-αλύσεων του πολυέδρου.

#

Ορίζουμε

(42) $\mathbb{M}_k(G) = \{ A \in C_k(G) : \mathbb{M}(A) < \infty \}$

Ιδιότητες

$\mathbb{M}(A+B) \leq \mathbb{M}(A) + \mathbb{M}(B)$,
$\mathbb{M}(-A) = \mathbb{M}(A)$.

Η M-μετρική στον $\mathbb{M}_k(G)$ ορίζεται από τη

$$\mathbb{M}(A-B).$$

Όταν $k=N \Rightarrow \mathbb{M}(A)=\mathbb{N}(A)$. Εν γένει $\mathbb{W}(A) \leq \mathbb{M}(A)$.

<u>Θεώρημα</u>: Για $A \in C_k(\mathbb{R}^N, G)$ έχουμε

$$(43) \quad \mathbb{W}(A) = \inf_{B,C} \left\{ \mathbb{M}_k(B) + \mathbb{M}_{k+1}(C) : A = B + \partial C \right\}$$

$B \in C_k$, $C \in C_{k+1}$.

<u>Απόδειξη</u>

1. Δοθέντων $B \in C_k$, $C \in C_{k+1}$, με $A = B + \partial C$ θα δείξουμε κατ' αρχήν ότι

$$(44) \quad \mathbb{W}(A) \leq \mathbb{M}(B) + \mathbb{M}(C).$$

Έστω $\{Q_j\}$, $\{R_j\}$ πολυεδρικές ακολουθίες, με

$$Q_j \xrightarrow{\mathbb{W}} B, \quad R_j \xrightarrow{\mathbb{W}} C,$$

$$P_j := Q_j + \partial R_j \to B + \partial C = A, \quad \text{και}$$

$$\mathbb{W}(P_j) \leq \mathbb{M}(Q_j) + \mathbb{M}(R_j)$$

$$\downarrow \qquad \mathbb{V} \qquad + \quad \mathbb{V} \quad (\text{στο όριο } \mathbb{V})$$

$$\mathbb{W}(A) \leq \mathbb{M}(B) + \mathbb{M}(C).$$

2. Έστω $\{P_j\}$ ακολουθία από στοιχεία του $\mathcal{P}_k(\mathbb{R}^N, G)$, $P_j \xrightarrow{W} A$. Χ.Β.Γ. υποθέτουμε ότι $\sum W(P_{j+1} - P_j) < \infty$.

(πράγματι επιλέγουμε υπακολουθία $\sum W(P_j - P) < \infty$, και κατά ανισότητα $W(P_{j+1} - P_j) = W(P_{j+1} - P + P - P_j) \leq W(P_{j+1} - P) + W(P - P_j) \ldots$).

Επιλέγουμε πολυεδρικές Q_j, R_j τ.ω.

(45) $$P_{j+1} - P_j = Q_j + \partial R_j, \quad \sum \mathbb{M}(Q_j) + \mathbb{M}(R_j) < \infty$$

(εύκολο: $W(P_{j+1} - P_j) + \frac{1}{2^j} > \mathbb{M}(Q_j) + \mathbb{M}(R_j)$),

και επίσης πολυεδρικές Q^j, R^j τ.ω.

(46) $$P_j = Q^j + \partial R^j, \quad \mathbb{M}(Q^j) + \mathbb{M}(R^j) < W(P_j) + \varepsilon_j, \quad \varepsilon_j \to 0$$

Θέτουμε

(47) $$B_j = Q^j + \sum_{i=j}^{\infty} Q_i, \quad C_j = R^j + \sum_{i=j}^{\infty} R_i.$$

Υποστηρίζουμε ότι

(48) $$\begin{cases} A = B_i + \partial C_i, & i = 1, 2, \ldots \\ \mathbb{M}(B_i) + \mathbb{M}(C_i) \leq W(A) + \varepsilon_i', & \varepsilon_i' \to 0 \end{cases}$$

Εξισώσεις (48)

1. $$A = P_{i-1} + \sum_{j=i}^{\infty} (P_j - P_{j-1})$$

$$\overset{(47),(45)}{=} Q^{i-1} + \partial R^{i-1} + \sum_{j=i}^{\infty} (Q_{j-1} + \partial R_{j-1})$$

$$= Q^{i-1} + \sum_{j=i}^{\infty} Q_{j-1} + \partial R^{i-1} + \sum_{j=i}^{\infty} \partial R_{j-1}$$

$$= B_{i-1} + \partial C_{i-1}, \qquad i = 2, 3, \ldots$$

2. $$\mathbb{M}(B_{i-1}) + \mathbb{M}(C_{i-1}) \leq \mathbb{M}(Q^{i-1}) + \sum_{j=i-1}^{\infty} \mathbb{M}(Q_{j-1})$$

$$+ \mathbb{M}(R^{i-1}) + \sum_{j=i-1}^{\infty} \mathbb{M}(R_{j-1})$$

$$= \mathbb{M}(Q^{i-1}) + \mathbb{M}(R^{i-1})$$

$$+ \sum_{j=i-1}^{\infty} [\mathbb{M}(Q_{j-1}) + \mathbb{M}(R_{j-1})]$$

$$\overset{(46)}{<} W(P_{i-1}) + \varepsilon_i$$

$$+ \sum_{j=i-1}^{\infty} [\mathbb{M}(Q_{j-1}) + \mathbb{M}(R_{j-1})].$$

Επίσης

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left[\mathbb{M}(Q_j)+\mathbb{M}(R_j)\right]<\infty \qquad ((45))$$

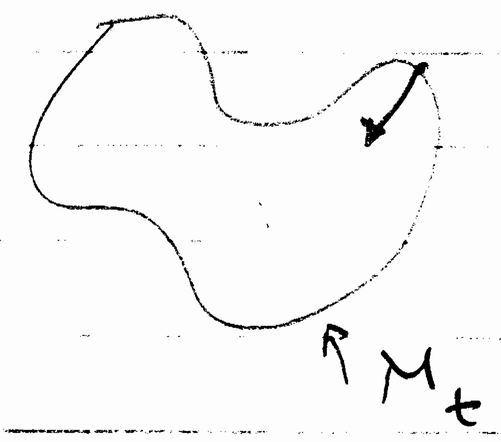
$$\Rightarrow \lim_{i\to\infty}\sum_{j=i+1}^{\infty}\left[\mathbb{M}(Q_j)+\mathbb{M}(R_j)\right]\to 0 .$$

Κατά συνέπεια η (48) επαληθεύτηκε, και μετά αυτό και το Θεώρημα.

ΟΕΔ.

Λύσεις Ασκήσεων 8 και 9

8) Θεωρούμε την



$$(\text{MMC})\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial t}F(p,t)=\vec{H}(p,t), & p\in M\\ F(\cdot,0)=F_0.\end{cases}$$

όπου $\vec{H}$ το διανυσματικό μέσης καμπυλότητας της $M_t=F(M,t)$ ο τύπος $F(p,t)$. Υποθέτουμε οι μετασχηματισμοί $F(\cdot,t):M\to M_t$ είναι αμφιδιαφορίσεις, και ότι το M είναι συμπαγές, με $\partial M=\emptyset$.

Κλείνουμε $t=t_0$ και εφαρμόζουμε τον (12) για $t=t_0$:

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0}\mathbb{H}^n(F(\cdot,t)(M))\overset{(12)}{=}\int_{M_{t_0}}\operatorname{div}_{M_{t_0}}\left(\frac{\partial F}{\partial t}(p,t)\right)ds_{t_0}$$

$$\overset{(13)}{=}-\int_{M_{t_0}}\frac{\partial F}{\partial t}\cdot\vec{H}\,ds_{t_0}-\cancelto{0}{\int_{\partial M_{t_0}}\frac{\partial F}{\partial t}\cdot\vec{n}}$$

$$= -\int_{M_{t_0}} |\vec{H}|^2 \, ds_{t_0}$$

9) Θεωρήμα TRW

$$\frac{\partial}{\partial t} F(p,t) = \vec{H}(p,t) - \frac{1}{H^n(M_t)} \int_{M_t} \vec{H} \, ds_t \qquad (NMMC)$$

$$|M_t| := H^n(M_t)$$

για ίδιες υποθέσεις

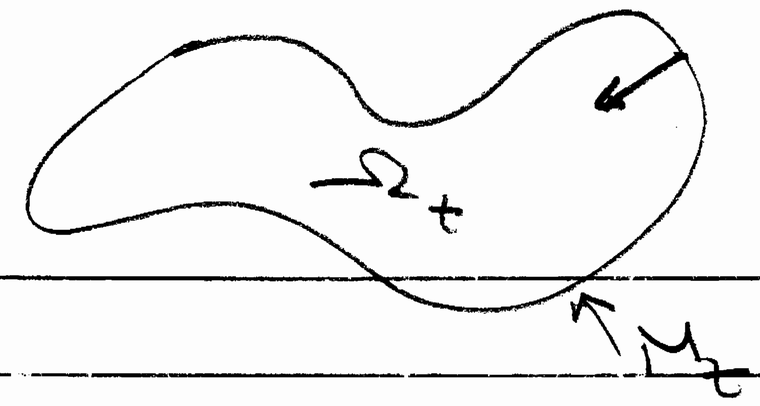
(a) $$\frac{d}{dt} H^n(F(\cdot,t)(M)) = \int_{M_t} \operatorname{div}_{M_t}\left(\frac{\partial F}{\partial t}(p,t)\right) ds_t$$

$$= -\int_{M_t} \frac{\partial F}{\partial t} \cdot \vec{H} \, ds_t$$

$$= -\int_{M_t} \left(\vec{H}(p,t) - \frac{1}{|M_t|}\int_{M_t} \vec{H} \, ds_t\right) \cdot \vec{H} \, ds_t$$

$$= \int_{M_t} |\vec{H}|^2 - \frac{1}{|M_t|} \left|\int_{M_t} \vec{H}\right|^2$$

$$\leq 0 .$$



(b) $\dfrac{d}{dt} H^{n+1}(\Omega_t)$

(12),(13)
$$\int_{\Omega_t} \operatorname{div}_{\Omega_t}\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right) = -\int_{\Omega_t} \frac{\partial F}{\partial t}\cdot \cancel{H_{\Omega_t}}^{\,0} - \int_{M_t} \frac{\partial F}{\partial t}\cdot n$$

$$= \int_{M_t} \vec{H}\cdot\vec{n} - \frac{1}{H^n(M_t)}\left(\int_{M_t} \vec{H}\, ds_t\right)\cdot\int_{M_t} \vec{n}\, ds_t$$

$$= 0.$$

$\square$

§6 Το Θεώρημα Παραμόρφωσης και Επικάλυψη

Συγκεντρώνουμε σχετικούς ορισμούς:

$\mathbb{N}(A) = \mathbb{M}(A) + \mathbb{M}(\partial A)$

$\mathbb{N}_n(G) = \{A \in C_n(G) : N(A) < \infty\}$, $\mathring{\mathbb{N}}_n(G) = \{A \in \mathbb{N}_n(G)$ με ομοιόμορφα $\}$

$C_n(G)$ = Flat n-chains

$\mathcal{B}_n(G)$ = πολυεδρικές αλυσίδες

$n \geq 1$, $k \geq 1$, $\mathbb{R}^{n+k}$

$C = [0,1] \times [0,1] \times \ldots \times [0,1]$ (μοναδιαίος κύβος στον $\mathbb{R}^{n+k}$)

$\mathbb{Z}^{n+k} = \{z = (z^1, \ldots, z^{n+k}) : z^j \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}^{n+k}$

$\mathbb{L}_j$ = j-σκελετός της αποσύνθεσης του $\mathbb{R}^{n+k}$ $\bigcup_{z \in \mathbb{Z}^{n+k}} (z + C)$

$\mathcal{L}_j$ = σύνολο των j-διάστατων εδρών του $\mathbb{L}_j$

$= \{z + F \mid z \in \mathbb{Z}^{n+k}, F$ κύβος j-έδρα του $C\}$

$\mathcal{L}_j(\rho) = \{\rho F = F \in \mathcal{L}_j\}$, $\rho > 0$

$S_1, \ldots, S_N$ $\left(N = \binom{n+k}{n+1}\right)$ οι $(n+1)$-διάστατοι υπόχωροι του $\mathbb{R}^{n+k}$ (affine) που περιέχουν κάποιο $(n+1)$-έδρα του C

P_j η ορθogωνιακή προβολή του $\mathbb{R}^{n+k}$ στο S_j.

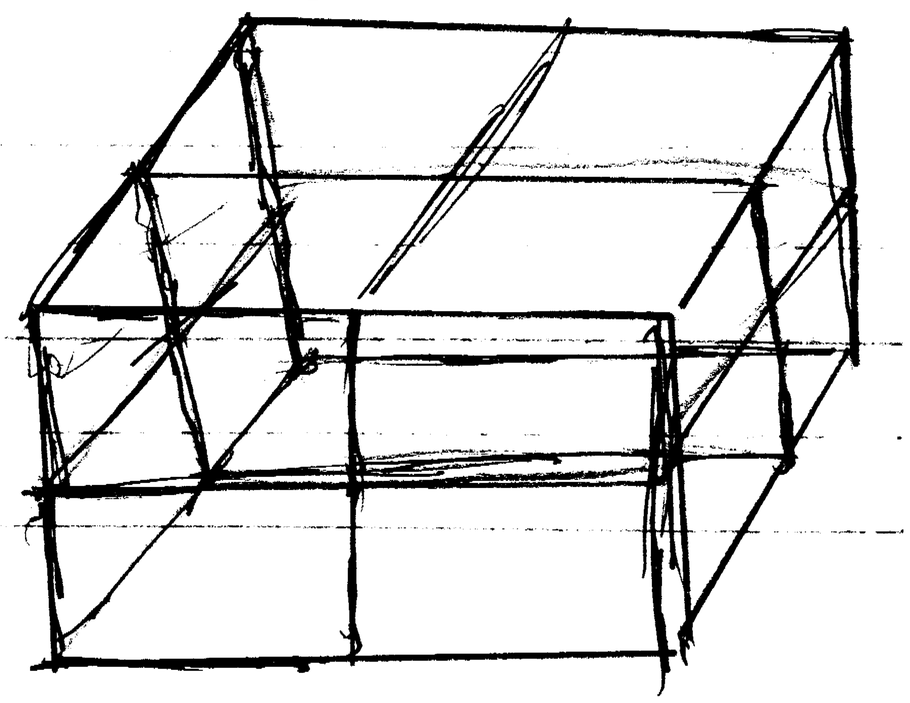
Παράδειγμα

$n = 1$, $k = 2$, $\mathbb{R}^{1+2} = \mathbb{R}^3$

$C = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$

$\mathbb{Z}^3 = \{z = (z^1, z^2, z^3) \mid z^j \in \mathbb{Z}\}$

$\mathbb{L}_1$ - σκελετός του $\bigcup_{z \in \mathbb{Z}^{1+2}} (z + C)$



$N = \binom{1+2}{1+1} = 6$ επίπεδα, $(1+1)$-διάστατα.

ε-δίκτυο: $C_\varepsilon = [0,2\varepsilon] \times [0,2\varepsilon] \times \dots \times [0,2\varepsilon]$.

Θεώρημα 1

Υπάρχει θετικός αριθμός $c = c(k,n)$ με την εξής ιδιότητα:

Δοθείσης $A \in \mathring{N}_n(G)$ και $\varepsilon > 0$, $\exists$ ε-δίκτυο L_{n_0}, πολυεδρική n-αλυσίδα P επί του L_n και $B \in \mathring{N}_n(G)$, $C \in \mathring{N}_{n+1}(G)$ ως εξής:

(1) $A = P + B + \partial C$

(2) $\mathbb{M}(P) \le c(k,n)\,[\mathbb{M}(A) + \varepsilon \mathbb{M}(\partial A)]$

$\mathbb{M}(C) \le c(k,n)\,\varepsilon\, \mathbb{M}(A)$, $\mathbb{M}(B) \le c(k,n)\,\varepsilon\, \mathbb{M}(\partial A)$

(3) (φορείας P) $\cup$ (φορείας C) $\subset$ $2n\varepsilon$-περιοχή του φορέα της A

(φορείας ∂P) $\cup$ (φορείας B) $\subset$ $2n\varepsilon$-περιοχή του φορέα του ∂A

(4) Εάν A είναι Lipschitz, τότε B, C είναι Lipschitz

Εάν A είναι πολυεδρική, τότε B, C πολυεδρικές. □

Παρατηρήσεις

(1), (2) $\Rightarrow$

$$W(A-P) \le \mathbb{M}(B) + \mathbb{M}(C) \le c\,\varepsilon\, \mathbb{N}(A).$$

(H) **Υπόθεση για την ομάδα G**

$\forall M > 0$, $\{g \in G \mid |g| \le M\}$ είναι πεπερασμένο

Εάν η G είναι διακριτή τότε $|g| \ge 1$ $\forall g \in G$.

Θεώρημα 2 (Συμπαγεία)

Το σύνολο

$$\Gamma = \{ A \in \mathbb{N}_n(\mathcal{G}) \mid \mathbb{N}(\mathcal{G}) \leq q \ , \ \operatorname{spt} A \subset K$$

K αμφίκυρτο σύνολο στον $\mathbb{R}^{n+k}$ $\}$

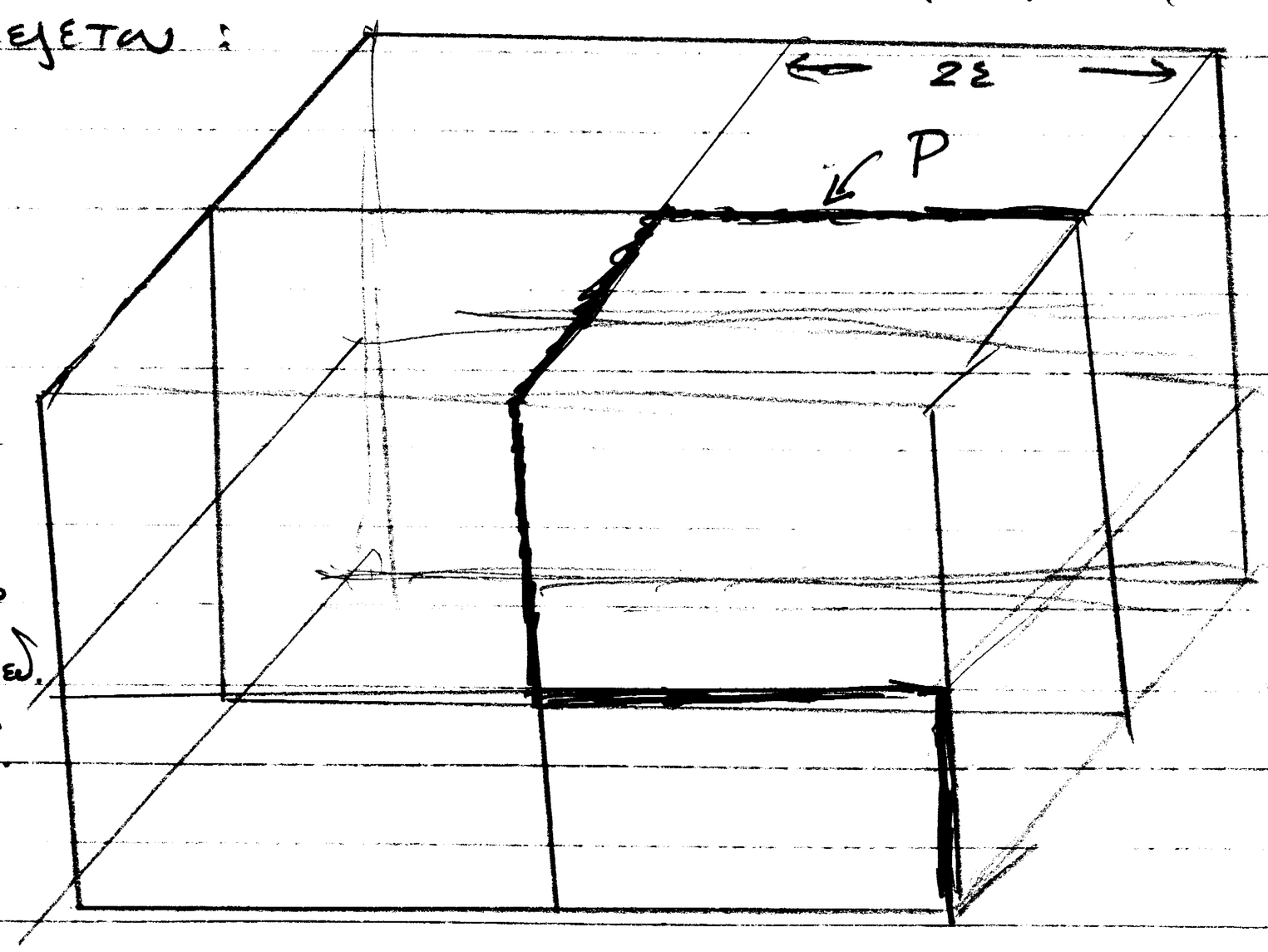
είναι ασθενώς συμπαγές (δηλαδή ως προς την W-νόρμα).

Απόδειξη

1. Πρώτα δείχνουμε ότι είναι προσεγγίσιμο. Έστω K' $(n+k)$-κύβος περιέχων το K στο εσωτερικό του. $\forall \varepsilon > 0$ θέτω

$$\Gamma_\varepsilon' = \{ P : \mathbb{N}(P) \leq 2e(k,n)q \ , \ \operatorname{spt} P \subset K' \ , \ P \ n\text{-πολυεδρικό εντός των } \varepsilon\text{-σκελετών } \mathcal{L}_n \}$$

Συμβολίζουμε ότι η P αποτελείται από ομόγενα τμήματα του ε-σκελετών:



P αντιπροσωπευτικό παραδείγμα 1-πολυεδ. ομοίδας στον $\mathbb{R}^3$.

Το σύνορο των n-πολυεδρικών P είναι περιορισμένο. Κατά συνέπεια του Γ_ε' είναι συμπαγές. Από το Θεώρημα 1 (βλ. Παρατήρηση) προκύπτει η προσπελασιμότητα του Γ.

2. Θα δείξουμε ότι το Γ είναι κλειστό. Έστω $\{A_n\} \subset \Gamma$, $A_n \xrightarrow{W} A$. Θα δείξουμε ότι $A \in \Gamma$.
$\mathbb{N}(A) = \mathbb{M}(A) + \mathbb{M}(\partial A)$, $\underline{\lim}\, \mathbb{M}(A_n) \geq \mathbb{M}(A)$ (βλ §5).
Επίσης $\partial A_n \xrightarrow{W} \partial A \Longrightarrow \underline{\lim}\, \mathbb{M}(\partial A_n) \geq \mathbb{M}(\partial A)$.

$$\therefore \quad \underline{\lim}\, \mathbb{N}(A_n) \geq \mathbb{N}(A).$$

ΟΕΔ.

<u>Πόρισμα 3</u> (Ισοπεριμετρική Ανισότητα)
Έστω G διάφορη οικογένεια του ικανοποιεί την (H). Τότε υπάρχει θετικός αριθμός $b = b(k, n)$ με την ακόλουθη ιδιότητα: Εάν $A \in \mathring{N}_n(G)$ και $\partial A = 0$, τότε $\exists\, C \in \mathring{N}_{n+1}(G)$ τ.ω. $A = \partial C$ και επίσης

$$\mathbb{M}(C) \leq b\,(\mathbb{M}|A|)^{\frac{n+1}{n}}$$

<u>Απόδειξη</u>

Από το Θεώρημα 1 $\overset{(2)}{\Longrightarrow} B = 0$. Συνεπώς

$$A = P + \partial C. \tag{49}$$

Επιλέγουμε ε τ.ω. $\varepsilon^n = c\,\mathbb{M}(A)$. Παρατηρούμε ότι (μέσω της (H)) ότι εάν $P \neq \emptyset_n$ τότε

$$\mathbb{M}(P) \geq (2\varepsilon)^n. \tag{50}$$

Εφόσον ισχύει το Θεώρημα 1 $\overset{(2)}{\Longrightarrow}$ $\mathbb{M}(P) \leq c\,\mathbb{M}(A) \leq \varepsilon^n$.
Κατά συνέπεια $P = 0$, και (49) $\Longrightarrow$

(50) $$A = \partial C.$$

Επίσης

$$\mathbb{M}(C) \leq c\,\varepsilon\,\mathbb{M}(A) \qquad (\Theta 1,\ (2))$$
$$= c\,(c\,\mathbb{M}(A))^{\frac{1}{n}}\,\mathbb{M}(A) \qquad (\text{λόγω } \varepsilon)$$
$$= c^{1+\frac{1}{n}}\,(\mathbb{M}(A))^{1+\frac{1}{n}}.$$

ΟΕΔ

<u>Θεώρημα 4</u> (Ύπαρξη στο πρόβλημα Plateau)

Θεωρούμε το μετάβολικό πρόβλημα

$$(VP) \qquad \inf\left\{\mathbb{M}(C) : C \in \mathcal{C}_m(G),\ \partial C = A\right\}$$

όπου $A \in \mathcal{C}_{m-1}(G)$, $\partial A = 0$, G διάστημα ομαλό με $|g| \geq 1$.

Το πρόβλημα (VP) έχει λύση, δηλαδή το inf είναι min.

<u>Απόδειξη</u>

Επιλέγουμε $\varepsilon > 0$ όπως στην απόδειξη της Ισοπεριμετρικής

Αντίστοιχος. Προκύπτει από εδώ το συμπέρασμα ότι το σύνολο

(51) $$S = \left\{ C \in C_m(G) \;\middle|\; \partial C = A,\ \mathbb{M}(C) \le c^{1+m} (\mathbb{M}(A))^{1+\frac{1}{m}} \right\}$$

δεν είναι κενό.

Παρατηρούμε βέβαια ότι

$$\inf \{ \mathbb{M}(C) : C \in C_m(G),\ \partial C = A \}$$

$$= \inf \{ \mathbb{M}(C) : C \in C_m(G),\ \partial C = A,\ \mathbb{M}(C) \le c^{1+\frac{1}{m}} (\mathbb{M}(A))^{1+\frac{1}{m}} \}.$$

Έστω $\{C_n\}$ ελαχιστοποιούσα ακολουθία από στοιχεία του S. Θεώρημα 1 $\Longrightarrow$ $\{C_n\}$ σχεδόν σύγκλιση. Κατά συνέπεια υπάρχει υπακολουθία $\{C_n'\} \subset \{C_n\}$ τέτοια,

(52) $$C_n' \xrightarrow{W} C^{min}, \quad \mathbb{M}(C_n') \to \inf$$

(52) $\Rightarrow$ $$A = \partial C_n' \xrightarrow{W} \partial C^{min}.$$

Επίσης από τον σχεδόν κάτω ημισυνεχεία της μάζας

(53) $$\inf = \underline{\lim}\, \mathbb{M}(C_n') \ge \mathbb{M}(C^{min}).$$

Δ.

$$\mathbb{M}(C^{min}) = \inf.$$

ΟΕΔ

§9 Στοιχεία της Απόδειξης του Θεωρήματος Παραμόρφωσης

Το βασικό εργαλείο στην απόδειξη του Θεωρήματος 1 είναι η "απεικόνιση" της εξίσωσης Δ επάνω στον σκελετό L_n μέσω μιας απεικόνισης συμπίεσης ψ. Στο ακόλουθο λήμμα κατασκευάζουμε την ψ μέσω "κεντρικών προβολών".

Συμβολισμός

q = κεντρικό σημείο του $C = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2})$

$L_{k-1}(a) = a + L_{k-1}$ (a τυχαίο σημείο εντός της $B_{\frac{1}{4}}(q)$)

$L_{k-1}(a, \rho) = \{x \in \mathbb{R}^{n+k} : \operatorname{dist}(x, L_{k-1}(a)) < \rho\}$ $(\rho \in (0, \frac{1}{4}))$

Παρατηρούμε ότι

$$\operatorname{dist}(L_{k-1}(a), L_n) \geq \frac{1}{4} \quad \forall\, a \in B_{\frac{1}{4}}(q).$$

Λήμμα

$\forall\, a \in B_{\frac{1}{4}}(q)$ $\exists$ τοπικά Lipschitz απεικόνιση

$$\psi : \mathbb{R}^{n+k} \setminus L_{k-1}(a) \longrightarrow \mathbb{R}^{n+k} \setminus L_{k-1}(a)$$

με τις εξής ιδιότητες

(1) $\psi(C \setminus L_{k-1}(a)) = C \cap L_n$, $\psi\big|_{C \cap L_n} = \mathbb{1}_{C \cap L_n}$

(2) $|D\psi(x)| \leq \frac{c}{\rho}$, a.e. (Lebesgue, $\mathbb{R}^{n+k}$)

για $x \in C \setminus L_{k-1}(a, \rho)$, $c = c(n, k)$

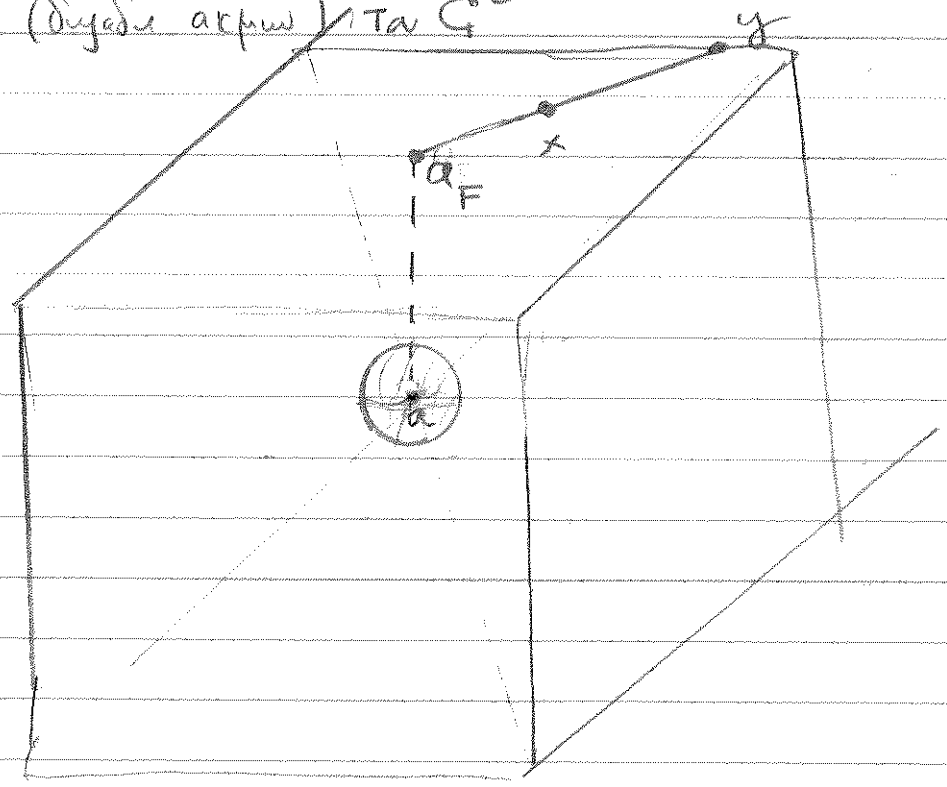
(3) $\psi(z + x) = z + \psi(x)$, $x \in \mathbb{R}^{n+k} \setminus L_{k-1}(a)$, $z \in \mathbb{Z}^{n+k}$.

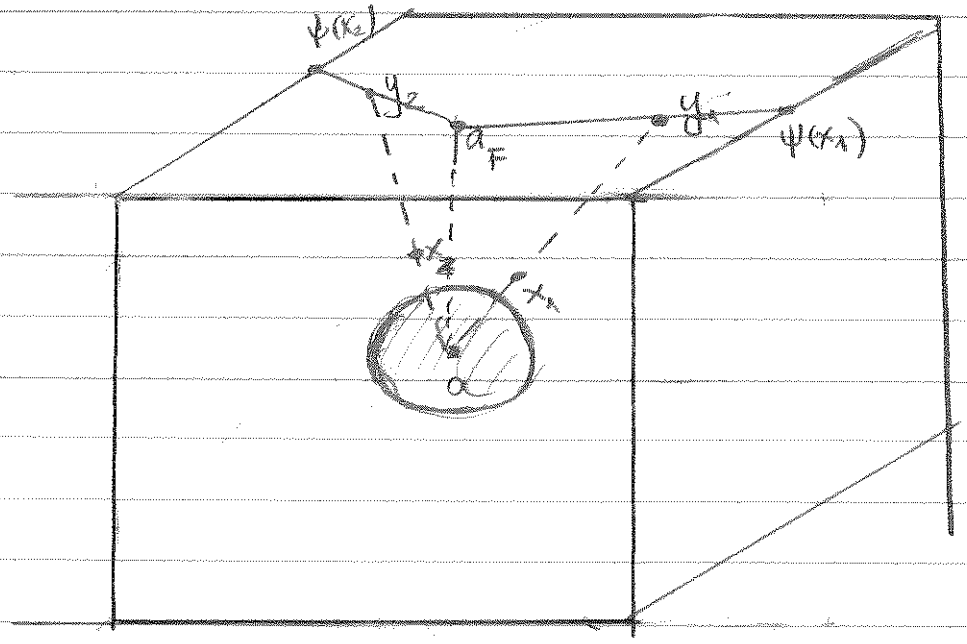
$$|D\psi(x)| := \overline{\lim_{y \to x}} \frac{|\psi(x) - \psi(y)|}{|x - y|}$$

Απόδειξη

Για χάριν απλότητας υποθέτουμε $n=1$, $k=2$.

Πρώτα κατασκευάζουμε μια τοπική Lipschitz συνάρτηση $\varphi_F : G \setminus L_1(a)$ επί των 1-εδρών (δηλαδή ακμών) του G^{δ}





Κατ'αρχήν για κάθε έδρα F του C, έστω a_F η ορθογώνια προβολή του a επί της F και έστω ψ_F η ακτινική της $\bar{F}\setminus\{a_F\}$ επί του ∂F που ορίζεται ως εξής:

$$\bar{F}\setminus\{a_F\} \ni x \longrightarrow y \in \partial F$$

όπου

$$x \in \{a_F + \lambda(y - a_F) : \lambda \in (0,1)\}$$

(ψ_F είναι η "ακτινική αλλοίωση" της έδρας F με αρχή το σημείο a_F).

Προφανώς $\psi_F\big|_{\partial F} = \mathbb{1}_{\partial F}$. Παρατηρούμε επίσης

ότι το ευθύγραμμο τμήμα $\overline{aa_F}$ περιέχεται στο μετατοπίσεις: σχέδιο $L_1(a)$.

Θεωρούμε για $j = 2, 3$ συναρτήσεις ως εξής:

$$\psi^{(j)} : \cup\{\bar{F}\setminus\{a_F\} \text{ όπου } F \text{ } j\text{-"έδρα" του } C\}$$

$$\longrightarrow \cup\{\bar{G} : \text{όπου } G \text{ } (j-1)\text{-"έδρα" του } C\}.$$

Για $j=2$ θέτουμε $\psi^{(2)}\big|_{\bar{F}\setminus\{a_F\}} = \psi_F$

Για $j=3$ η 3-"έδρα" του C είναι ο ίδιος ο κύβος C. Σε αυτήν την περίπτωση η

$$\psi^{(3)} : C\setminus\{a\} \longrightarrow \partial C$$

ορίζεται ως η κεντρική προβολή (ή ακτινική συλλοίωση) του κύβου C με αρχή το a.

Η σύνθεση

$$\psi^{(2)} \circ \psi^{(3)}$$

έχει νόημα επί του $\mathbb{C} \setminus L_1(a)$.

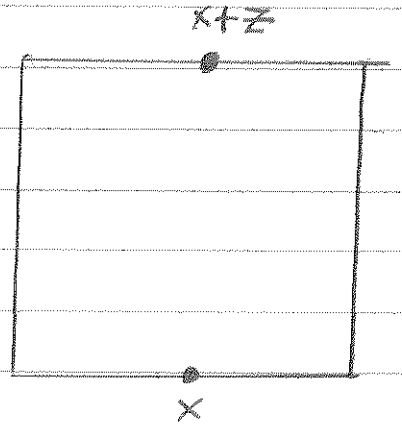
Ορίζουμε

(54) $$\psi_0 = \psi^{(2)} \circ \psi^{(3)} \Big| \mathbb{C} \setminus L_1(a) .$$

Παρατηρούμε ότι η ψ_0 έχει εξίσου την ιδιότητα

(55) εάν $z \in \mathbb{Z}$ και x, $z+x \in \mathbb{C}$, τότε $\psi_0(z+x) = z + \psi_0(x)$.

(Πράγματι x, $z+x$ εντός του $\mathbb{C}$ σημαίνεται ότι και το x, και το $z+x$ είναι εντός το L_1, ή ότι ευρίσκονται στο εσωτερικό παραλληλων εδρών F_1, $F_2 = z + F_1$, με z κάθετο στο F_1, και $a_{F_2} = z + a_{F_1}$.



Η (55) προκύπτει ανέσως διότι η ψ_0 είναι η ταυτοτική στο σύνορο των εδρών).

Κάνοντας χρήση αυτής της περιοδικότητας modulo $\mathbb{Z}^3$, μπορούμε να επεκτείνουμε την Ψ_0 σε Ψ

$$\Psi : \mathbb{R}^{1+2} \setminus L_1(a) \longrightarrow L_1$$

Θα δείξουμε την εκτίμηση

(56) $$\sup |D\Psi| \leq \frac{c}{\rho} \quad \text{στην } \mathbb{R}^{1+2} \setminus L_1(a,\rho)$$

$c = c(n,k) \quad (n=1,\ k=2)$.

Παρατηρούμε ότι η εκτίμηση (56) είναι ισοδύναμη με μία εκτίμηση της σταθεράς Lipschitz της Ψ. Θεωρείστε το σχήμα στην σ. 70. Το ζητούμενο είναι να εκτιμήσουμε την απόσταση

$$|\Psi(x_1) - \Psi(x_2)|$$

μέσω της απόστασης

$$|x_1 - x_2| .$$

Είναι σχετικά εύκολο να δούμε την εκτίμηση (56): Πρώτα σημειώνουμε το προφανές, ότι

Απόσταση μετάξυ προβολών $\propto$ (απόσταση σημείων) $\times$ (απόσταση κατόπτρων)

Συνεπώς χωρίς εξαίρεση:

$$|x_i| = O(\rho), \quad y_i = \frac{x_i}{\rho}$$

ή

$$|y_1 - y_2| \cong |x_1 - x_2| \frac{1}{\rho} .$$

Ανάλογα

$$\psi_i = \frac{y_i}{R} , \quad R = O(|y_i|) ,$$

$$|\psi_1 - \psi_2| \cong |y_1 - y_2| \frac{1}{R} .$$

Κατά συνέπεια αναμένουμε

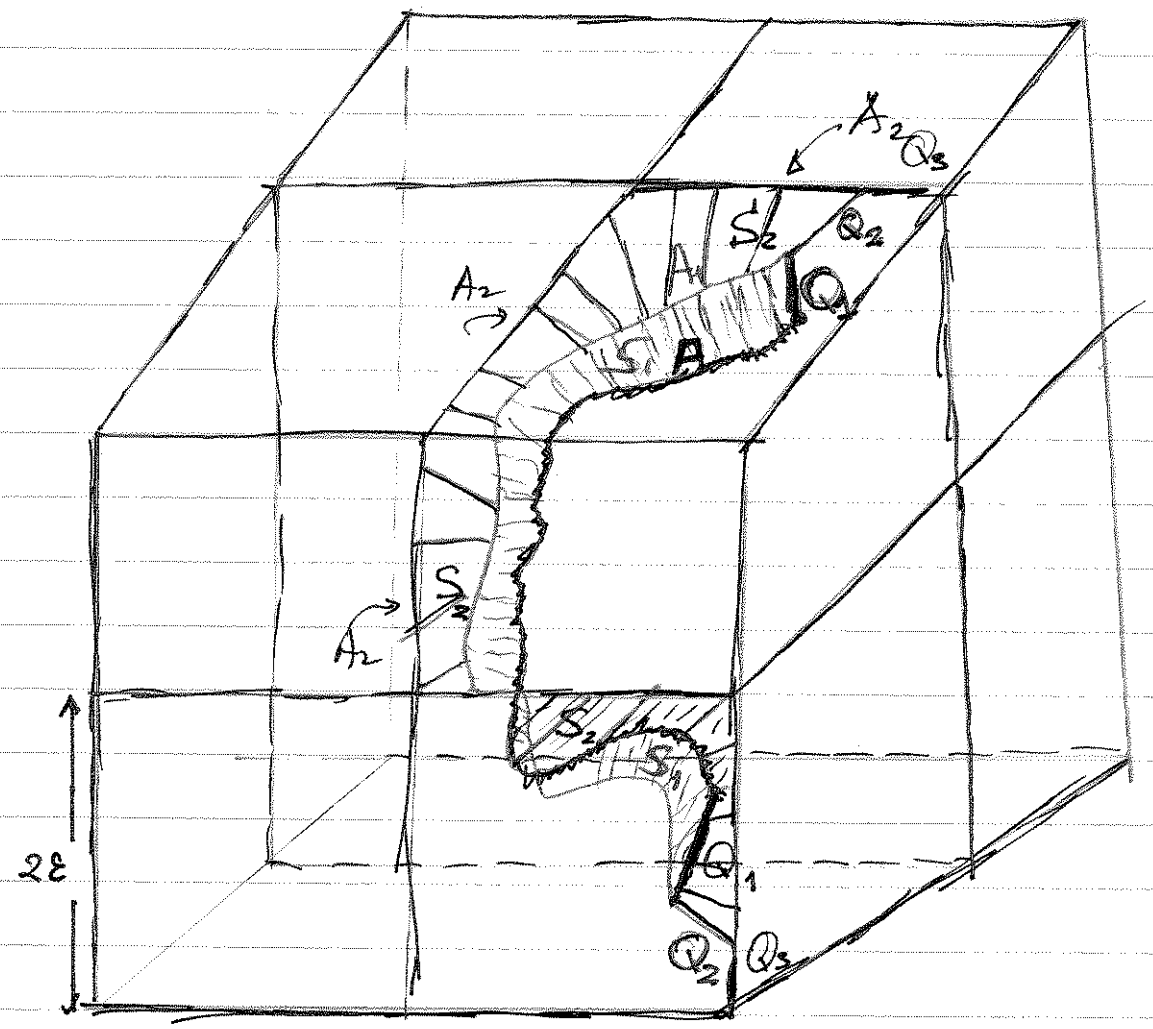
$$|\psi_1 - \psi_2| \cong |x_1 - x_2| \frac{1}{\rho} ,$$

δηλαδή η (56) ισχύει.

The Proof of the Deformation Theorem

We will first give a heuristic argument in the special case $n=1$, $k=2$. Next we will develop rigorously a couple of tools utilized in the argument.

Sketch for $n=1$, $k=2$ (1-chain in $\mathbb{R}^3$)



Central projections will be used for defining a retraction that will "push" A onto the 1-skeleton $\cup L_1$.

) First project the "curve" A radially outward from the centers of the cubes onto L_2, the 2-skeleton. We assume that A stays away from the centers.

Let

S_1 be the surface swept out by A during this projection

Q_1 the curve swept out by ∂A

A_1 the image of A in L_2.

Then with suitable orientations

$$A = A_1 + Q_1 + \partial S_1$$

- The mass $\mathbb{M}(A_1)$ is of the same order as $\mathbb{M}(A)$:
$$\mathbb{M}(A_1) \sim \mathbb{M}(A)$$
- Similarly
$$\mathbb{M}(\partial A_1) \sim \mathbb{M}(\partial A)$$

$$\mathbb{M}(Q_1) \sim \varepsilon\, \mathbb{M}(\partial A_1)$$

$$\mathbb{M}(S_1) \sim \varepsilon\, \mathbb{M}(A)$$

2) Next project A_1 onto the 1-skeleton radially outward from the centers of the squares.

Let

S_2 be the surface swept out by A_1
Q_2 be the curve swept out by ∂A_1
A_2 be the image of A_1 in L_1

Then

$$A_1 = A_2 + Q_2 + \partial S_2$$

- $\mathbb{M}(A_2) \sim \mathbb{M}(A_1) \sim \mathbb{M}(A)$
- $\mathbb{M}(\partial A_1) \sim \mathbb{M}(\partial A)$
- $\mathbb{M}(Q_2) \sim \varepsilon\, \mathbb{M}(\partial A)$
- $\mathbb{M}(S_2) \sim \varepsilon\, \mathbb{M}(A)$

3) Finally complete A_2 by adding Q_3.
Put

$$P = A_2 - Q_3$$

- $\mathbb{M}(Q_3) \sim \varepsilon\, \mathbb{M}(\partial A)$
- $\mathbb{M}(P) = \mathbb{M}(A_2) + \mathbb{M}(Q_3) \sim \mathbb{M}(A) + \varepsilon\, \mathbb{M}(\partial A)$
- $\mathbb{M}(\partial P) = \mathbb{M}(\partial A_2) \sim \mathbb{M}(\partial A)$

Let

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$$
$$S = S_1 + S_2$$

Then

$$A = P + Q + \partial S$$

$$\mathbb{M}(Q) = \mathbb{M}(Q_1) + \mathbb{M}(Q_2) + \mathbb{M}(Q_3)$$

$$\sim \varepsilon\, \mathbb{M}(\partial A) + \varepsilon\, \mathbb{M}(\partial A) + \varepsilon\, \mathbb{M}(\partial A)$$

$$\sim \varepsilon\, \mathbb{M}(\partial A).$$

$$\mathbb{M}(S) = \mathbb{M}(S_1) + \mathbb{M}(S_2) \sim \varepsilon\, \mathbb{M}(A).$$

Note: $S \longleftrightarrow C$

$Q \longleftrightarrow B$

$\square$

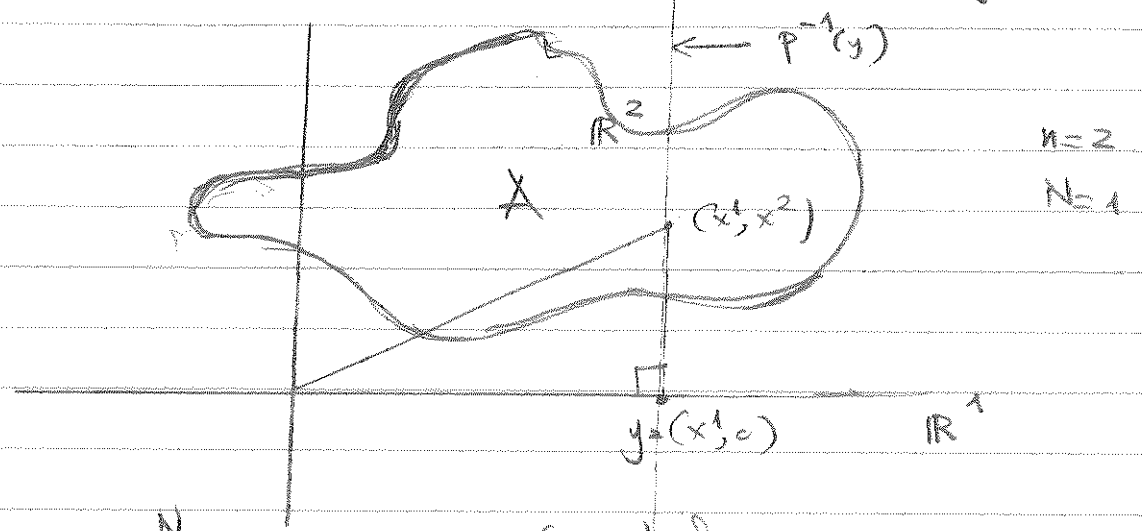
<u>Note</u>: The construction above is very heuristic. A point that is left open is when A goes through the corners of the projection.

§10 Ο τύπος των Συνεμβαδών

1. Ξεκινάμε με γραμμικούς μετασχηματισμούς $\lambda : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^N$, με $\underline{N < n}$

$$\mathbb{R}^N = \{ (x^1, \dots, x^n) \mid x^j = 0 \ , \ j = N+1, \dots, n \}$$

Έστω $p : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^N$ η ορθογώνια προβολή.



$\forall\, y \in \mathbb{R}^N$, $p^{-1}(y)$ = $(n-N)$-διάστατος γραμμικός υπόχωρος, μεταφορά του $p^{-1}(0)$. Κατά συνέπεια η αντίστροφη $p^{-1}(y)$ αποσυνθέτει τον $\mathbb{R}^n$ σε παράλληλες "φέτες" $(n-N)$-(ανάλογα) διάστασης. Από Fubini προκύπτει ότι

$$(60) \qquad \int_{\mathbb{R}^N} H^{n-N}(p^{-1}(y) \cap A)\, dy = H^n(A)$$

2. Στη συνέχεια γενικεύουμε τον (60) για αυθαίρετους γραμμικούς μετασχηματισμούς $\lambda : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^N$ τάξης N. Έστω $F = \lambda^{-1}(0)$. Ο F είναι υπόχωρος $(n-N)$ διάστασεων (όπως προκύπτει από το Θεώρημα της

Τάξης στην Γραμμική Άλγεβρα : $\dim \mathcal{N}(\lambda) = n - \operatorname{rank}(\lambda)$)
Κατά συνέπεια $\forall\, y \in \mathbb{R}^N$, $\lambda^{-1}(y)$ είναι $(n-N)$ διάστατος affine χώρος, και κατ' αντίστοιχο τρόπο το $\mathbb{R}^n$ αποσυντίθεται σε "φέτες"

<u>Ισχυρισμός</u>

$$\lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^N \quad , \; n \geq N$$

$$F = \mathcal{N}(\lambda) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \lambda x = 0 \} \quad , \; \dim F = n - N$$

(a) $\lambda = S \circ O^*$, $S : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, συμμετρικός
$O : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^n$, ορθογώνιος

(b) $O^* = P \circ Q$, P προβολή $\mathbb{R}^n$ επί του $\mathbb{R}^N$
$Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ορθογώνιος.

<u>Απόδειξη</u>
Μέρος (a) είναι η Ασ 3 (ii), σ 13.
Μέρος (b): Επιλέγουμε ορθογώνιο μετασχηματισμό $R : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ τ.ω.

$$R(x_1, \dots, x_N, 0, \dots, 0) = O(x_1, \dots, x_N)$$

δηλαδή R επεκτείνει τον O. Θεωρούμε τον $Q = R^*$, Q ορθογώνιος, $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Παρατηρούμε ότι $P^* : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^n$

$$P^*(x_1, \dots, x_N) = (x_1, \dots, x_N, 0, \dots, 0).$$

Συνεπώς

$$O(x_1, \dots, x_N) = R \circ P^* = Q^* \circ P^*$$

ΟΕΔ

Συμπερ. ξαναγράφε τώρα τα εξής:

$$\lambda = S \circ P \circ Q \quad , \quad \lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^N$$

$Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ορθ.
$P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^N$ ορθογ
$S : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ αντ. $(\det S \neq 0)$

Γνωρίζουμε ότι $\mathcal{N}(\lambda) = F \implies Q(F) = \mathbb{R}^{n-N}$,
$Q(F^{\perp}) = \mathbb{R}^N$.

Έχουμε

$$L^n(A) = L^n(Q(A))$$

$$\overset{(60)}{=} \int_{\mathbb{R}^N} H^{n-N}(P^{-1}(y) \cap Q(A))\, dy .$$

(Αλλαγή μεταβλητής: $z = S y$)

$$= \int_{S(\mathbb{R}^N)} H^{n-N}(P^{-1}(\overset{S^{-1}z}{y}) \cap Q(A)) \overset{\det S^{-1}}{\left(\frac{dy}{dz}\right)} dz$$

$\therefore$

$$61)\ (\det S)\, L^n(A) = \int_{\mathbb{R}^N} H^{n-N}\left((P^{-1} \circ S^{-1})(z) \cap Q(A)\right) dz$$

Παρατηρούμε τώρα

$$H^{n-N}\left((P^{-1}\circ S^{-1})(z)\cap Q(A)\right)$$
$$= H^{n-N}\left((Q^{-1}\circ P^{-1}\circ S^{-1})(z)\cap A\right)$$
$$= H^{n-N}\left(\lambda^{-1}(z)\cap A\right).$$

Άρα

$$(62)\quad |\det S|\, L^n(A) = \int_{\mathbb{R}^N} H^{n-N}\left(\lambda^{-1}(z)\cap A\right) dz.$$

Κανοντας χρήση της Ασκ 4, σ 13, εχουμε τη τυπο του ανεξαρτητου για γραμμικους μετασχηματισμους:

$$(63)\quad \sqrt{\det(\lambda\circ\lambda^*)} = \int_{\mathbb{R}^N} H^{n-N}\left(\lambda^{-1}(z)\cap A\right) dz.$$

Τωρα(*), δοσμενος C^1 μετασχηματισμος $f: M\to\mathbb{R}^N$, οπου M n-διαστατη υποπολλαπλοτητα του $\mathbb{R}^{n+k}$, οριζουμε

$$J^*f(x) := \sqrt{\det\left((df_x)^*\circ(df_x)\right)},$$

$df_x: T_xM\to\mathbb{R}^N$, ο Jacobianος πινακας. Τοτε $\forall$ Borel $A\subset M$ εχουμε

$$(64)\quad \int_A J^*f\, dH^n = \int_{\mathbb{R}^N} H^{n-N}\left(A\cap f^{-1}(y)\right) dy.$$

(*) Evans-Gariepy, Measure Theory and Fine Properties of Functions.

Εφαρμογές

1) Θεώρημα (Αλλαγή Μεταβλητών)

Έστω $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^N$, $n \geq N$, $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|\,dx < \infty$. Τότε ισχύει

$$(GS) \quad \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\, J^*f(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} \left[\int_{f^{-1}(y)} g \, dH^{n-N} \right] dy$$

(f Lipschitz αρκεί)

Απόδειξη

1. **Λήμμα** (Χωρίς μέτρα)

Έστω $f: X \longrightarrow [0,\infty]$ μ-μετρήσιμη. Τότε υπάρχουν μ-μετρήσιμα σύνολα $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ στον X τ.ω.

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \chi_{A_k}$$

Απόδειξη Λήμματος

Έστω

$$A_1 = \{x \in X \mid f(x) \geq 1\}.$$

Ορίζουμε επαγωγικά για $k = 2, 3, \ldots$

$$A_2 = \left\{x \in X \;\middle|\; f(x) \geq \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{2-1} \frac{1}{j} \chi_{A_j}\right\}$$

$$= \left\{x \in X \;\middle|\; f(x) \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{1} \chi_{A_1}\right\}$$

$$A_k = \left\{ x \in X \;\middle|\; f(x) \geq \frac{1}{k} + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j} \chi_{A_j} \right\}$$

<u>Παρατηρήσεις</u>

(i) $$f(x) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \chi_{A_k}(x)$$

Πράγματι δοθέντος x έστω $x(1), x(2), \ldots$ οι ακέραιοι τ.ω. $x \in A_{x(i)}$, $i = 1, 2, \ldots$

Άρα
$$f(x) \geq \frac{1}{x(i)} + \sum_{j=1}^{x(i)-1} \frac{1}{j} \chi_{A_j}$$

Εάν η ακολουθία $x(1), x(2), \ldots$ είναι πεπερασμένη, $x(1), x(2), \ldots, x(M)$, τότε
$$f(x) \geq \frac{1}{x(M)} + \sum_{j=1}^{x(M)-1} \frac{1}{j} \chi_{A_j}(x)$$
$$\geq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \chi_{A_j}(x).$$

Εάν η ακολουθία δεν είναι πεπερασμένη το πρόβλημα λύνει η (i).

(ii) $$f(x) \leq \frac{1}{n} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j} \chi_{A_j}(x)$$

για άπειρα n.

Πράγματι εάν $f(x) < \infty$ τότε αυτόματα

$x \notin A_n$ για απειρα n (διοτι η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$).
Συνεπως δε ισχυει η (ii).

(ii) $\Leftrightarrow$

(iii) $f(x) - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j} \chi_{A_j}(x) \leq \frac{1}{n}$, απειρα n.

Συνδυαζοντας (i) και (iii) παιρνουμε το Λημμα.

ΟΕΔ

<u>Ασκηση 14</u>

1. Για την συναρτηση $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \geq -1 \\ 0, & x \leq -1 \end{cases}$

βρειτε τα A_1, A_2, A_3, A_4.

2. Εστω $g \geq 0$. Τοτε $g = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \chi_{A_i}$

$$\int_{\mathbb{R}^n} g\, J^* f\, dx = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \int_{A_i} J^* f\, dx$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \int_{\mathbb{R}^N} H^{n-N}(A_i \cap f^{-1}(y))\, dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} H^{n-N}(A_i \cap f^{-1}(y)) \right) dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} \left[\int_{f^{-1}(y)} g \, dH^{n-N} \right] dy .$$

3. Για αυθαίρετη g έχουμε $g = g^+ - g^-$, $g^+ \geq 0$, $g^- \geq 0$, και εφαρμόζουμε το βήμα 2.

ΟΕΔ

2) <u>Πολικές Συντεταγμένες</u>

Έστω $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)| \, dx < \infty$.

Τότε

$$(66) \quad \int_{\mathbb{R}^n} g \, dx = \int_0^\infty \left(\int_{\partial B(0,r)} g \, dH^{n-1} \right) dr$$

<u>Απόδειξη</u>

Επιλέγουμε $f(x) = |x|$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$Df(x) = \frac{x}{|x|}$, $J^* f = 1$.

(65) $\Rightarrow$

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x) \, dx = \int_0^\infty \left(\int_{\partial B(0,r)} g \, dH^{n-1} \right) dr .$$

ΟΕΔ

Απ.
Εστω $g = \hat{g}\,\chi_{B(0;R)}$. Τότε (66) $\Longrightarrow$

$$\int_{B(0;R)} \hat{g}\,dx = \int_0^R \left(\int_{\partial B(0;r)} \hat{g}\,dH^{n-1} \right) dr$$

$\Longrightarrow$

(67) $$\frac{d}{dR} \int_{B(0;R)} \hat{g}\,dx = \int_{\partial B(0;R)} \hat{g}\,dH^{n-1}.$$

3) Συνάρτηση Σταθμού

Εστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (Lipschitz αρκεί).

Τότε ισχύει

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Df|\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} H^{n-1}(\{f=t\})\,dt$$

$$\left(\{f=t\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = t\} \right)$$

Απόδειξη

$$J^* f = |Df|.$$

ΟΕΔ

4) Έστω $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ C^1 (Lipschitz αρκεί), με

$$\inf_x |Df(x)| > 0$$

Έστω επίσης $g:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|\,dx < \infty$.

Τότε ισχύει

$$\int_{\{f>t\}} g\,dx = \int_t^\infty \left(\int_{\{f=s\}} \frac{g}{|Df|}\, dH^{n-1} \right) ds$$

Απόδειξη

Θα εφαρμόσουμε το Θεώρημα Αλλαγής Μεταβλητών (ΘΑΜ)

Έστω

$$E_t = \{ f > t \}$$

$J^*f = |Df|$. Συνεπώς

$$\int_{E_t} g\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\chi_{E_t}(x) \frac{g}{|Df|} \right) J^*f\,dx$$

$$\overset{\text{ΘΑΜ}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{f^{-1}(s)} \frac{g}{|Df|} \chi_{E_t}\, dH^{n-1} \right] ds$$

$$= \int_t^\infty \left[\int_{\partial E_s} \frac{g}{|Df|}\, dH^{n-1} \right] ds$$

ΟΕΔ.

Σημ.
H διαφορική μορφή του 4) είναι

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{\{f>t\}} g\,dx\right) = -\int_{\{f=t\}} \frac{g}{|Df|}\,dH^{n-1}.$$

5) Για τον ισοδύναμο ισοπεριμετρικό ανισότητα στο $\mathbb{R}^{n+1}$, δηλαδή σταθερά 1.

Έστω $u: M \to \mathbb{R}$ C^1 συνάρτηση, και έστω ότι τα σύνολα $\{x\in M \mid u(x)<r\}$ είναι πρόδιστατοι $\forall\, r\in\mathbb{R}$. Έστω επίσης $g: M\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη στο M, $\int_M |g(x)|\,dx<\infty$.

Τότε ισχύει

$$(68)\quad \int_{M\cap\{u<r\}} g\,|\nabla^M u|\,dH^n = \int_{-\infty}^{r}\left(\int_{M\cap\{u=s\}} g\,dH^{n-1}\right)ds$$

ή σε διαφορική μορφή

$$\frac{d}{dr}\int_{M\cap\{u<r\}} g\,|\nabla^M u|\,dH^n = \int_{M\cap\{u=r\}} g\,dH^{n-1}.$$

Αυτό αποδεικνύεται ως εξής: Κατ' αρχήν εφαρμόζουμε τον (64) στον δίνει

$$\int_A J^* f \, dH^n = \int_{\mathbb{R}} H^{n-1}(A \cap \{u=s\}) \, ds$$

όπου A Borel υποσύνολο του M. Επιλέγοντας $f=u'$ και παρατηρώντας ότι $J^* u = |\nabla^M u|$.

Το θεώρημα έχει ως μια αναπαράσταση της g:

$$g = \sum \frac{1}{i} \chi_{A_i}$$

μέσω του Λήμματος στην απόδειξη του Θεωρήματος Αλλαγής Μεταβλητών. Εφαρμόζοντας την απόδειξη της (65), και χειριζόμενοι την ανάλογη παίρνουμε την (68).

<u>Παρατήρηση</u>

Επιλέγοντας στην (68) $u(x)=|x|$. Σε αυτήν την περίπτωση παίρνουμε

$$(69) \qquad \frac{d}{dr} \int_{M \cap B_r} g \, |\nabla^M |x|| \, dH^n = \int_{M \cap \partial B_r} g \, dH^{n-1}$$

όπου $B_r = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| = r\}$.

$(69) \Rightarrow$

$$(69)' \qquad \frac{d}{dr} \int_{M \cap B_r} f \, dH^n = \int_{M \cap \partial B_r} f \frac{1}{|\nabla^M |x||} \, dH^{n-1}$$

<u>Ασκηση 15</u>

$\nabla^M |x| = \frac{x^T}{|x|}$, όπου x^T η εφαπτομενική συνιστώσα του x.

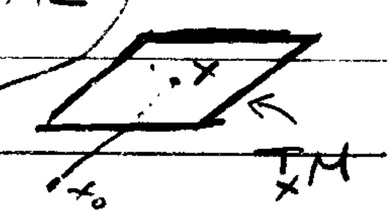
§11. Η Φορμουλα της Μονοτονιας

Εστω M n-διαστατη υποπολλαπλοτητα στο $\mathbb{R}^{n+1}$, ομαλη.

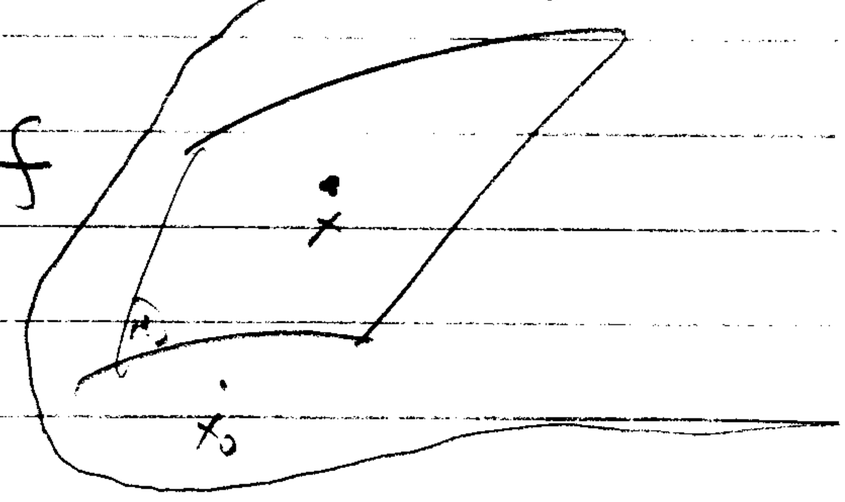
Θεωρημα

Υποθετουμε οτι η M ειναι ελαχιστικη n-υπερεπιφανεια στον $\mathbb{R}^{n+1}$, και υποθετουμε οτι ειναι ελαχιστικη, $M \subset B_{\rho_0}(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x - x_0| \leq \rho_0\}$. Τοτε ισχυει ο τυπος

$$(70) \quad \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r^n}\int_{M\cap B_r(x_0)} f\right) = \frac{d}{dr}\int_{M\cap B_r(x_0)} f \frac{|(x-x_0)^{\perp}|^2}{|x-x_0|^{n+2}}$$



$$+ \frac{1}{2r^{n+1}}\int_{M\cap B_r(x_0)} \left(r^2 - |x-x_0|^2\right)\Delta_M f$$



$\forall$ $r \in (0, \rho_0)$, οπου $f : M \to \mathbb{R}$, ομαλη συναρτηση.

Εαν επιπλεον $f \geq 0$ και f υποαρμονικη επι της M, δηλαδη

$$(71) \qquad \Delta_M f \geq 0,$$

Τοτε

$$(72) \qquad \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r^n}\int_{M\cap B_r(x_0)} f\right) \geq 0.$$

Τελος εαν $x_0 \in M$ τοτε εχουμε

$$(73) \qquad f(x_0) \leq \frac{1}{\omega_n \rho^n}\int_{M\cap B_\rho(x_0)} f \qquad \left(\omega_n = |B(0;1)|,\ B \subset \mathbb{R}^n\right)$$

$\square$

Πόρισμα

Για $f \equiv 1$ παίρνουμε

$$(74) \quad \frac{d}{dr}\left(\frac{H^n(M \cap B_r(x_0))}{\omega_n r^n}\right) = \frac{d}{dr}\int_{M\cap B_r(x_0)} \frac{|(x-x_0)^{\perp}|^2}{|x-x_0|^{n+2}}$$

$$\overset{(69)'}{=} \int_{\partial B_r(x_0)\cap M} \frac{|(x-x_0)^{\perp}|^2}{|x-x_0|^{n+2}} \frac{1}{|\nabla^M |x||} \geq 0.$$

$\square$

Παρατηρήσεις

1) Έστω $M \subset \mathbb{R}^n$, λείο επίπεδο επιφάνεια, $x_0 \in M$.
Τότε $(x-x_0)^{\perp} = 0$ και για $\Delta f \geq 0$ η (70) δίνει

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r^n}\int_{B_r(x_0)} f\right) \geq 0$$

$\Rightarrow$

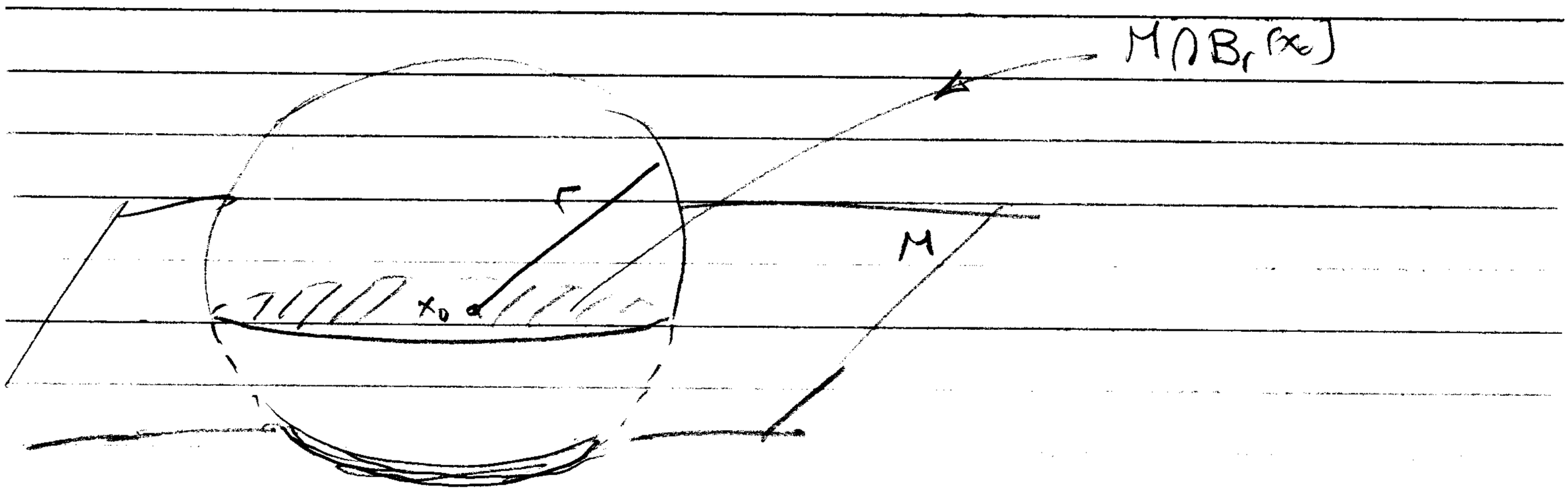
$$\frac{1}{r^n}\int_{B_r(x_0)} f \geq \lim_{r\to 0} \frac{1}{r^n}\int_{B_r(x_0)} f = f(x_0)\,\omega_n.$$

$\therefore$

$$f(x_0) \leq \frac{1}{\omega_n r^n}\int_{B_r(x_0)} f,$$

η κλασική ιδιότητα υφαρμονικών συναρτήσεων (που τις χαρακτηρίζει).

Στην επίπεδη περίπτωση η (74) δεν ήταν τίποτε.



2) $(X-X_0)^{\perp}$ σημαίνει η ορθογώνια συμπληρωματικη προβολη στο εφαπτομενο επιπεδο της M στο x_0.

3) $(74) \Rightarrow \dfrac{d}{dr}\left(\dfrac{\mathcal{H}^n(M\cap B_r(x_0))}{\omega_n r^n}\right) \geq 0 \Rightarrow$

$$\frac{\mathcal{H}^n(M\cap B_r(x_0))}{\omega_n r^n} \geq \lim_{r\to 0} \frac{\mathcal{H}^n(M\cap B_r(x))}{\omega_n r^n} = 1 \quad \text{εαν } x_0 \in M.$$

4) $\Delta_M f := \operatorname{div}_M \nabla^M f$

(βλεπε §1).

<u>Αποδειξη Θεωρηματος</u>

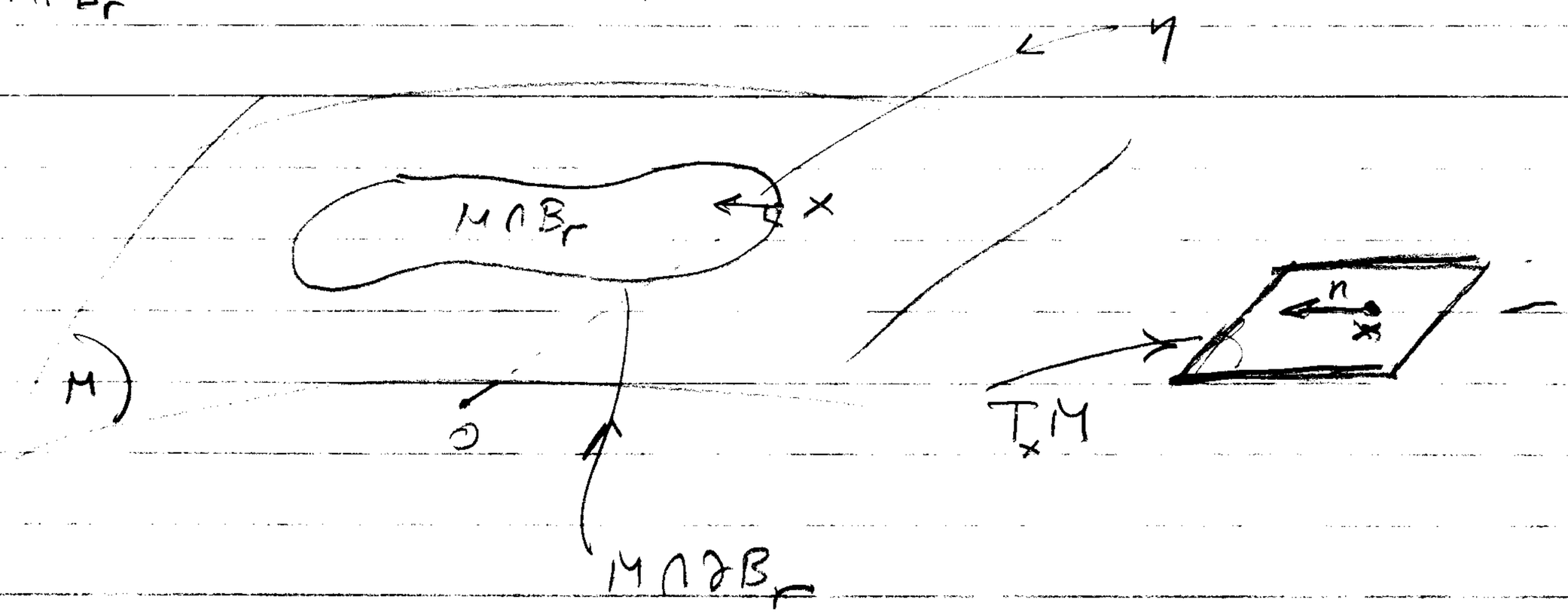
Εστω $x_0 = 0$, $B_r = B_r(0)$.

$$(69)' \Leftrightarrow \frac{d}{dr}\int_{M\cap B_r} f = \int_{M\cap \partial B_r} f \frac{1}{|\nabla^M |x||}$$

a.e. για $r\in(0,R)$. Από Sard προκυπτει οτι $M\cap\partial B_r$ ομαλη υποπολλαπλοτητα για παρε τετοιο r.

Στη συνέχεια θα κανουμε χρηση του θεωρήματος της αποκλισης (5). Ελαχιστικη $M \Rightarrow H=0$

$$(75)\quad \int_{M\cap B_r} \operatorname{div}_M\left(\frac{x}{r} f\right) = \int_{M\cap\partial B_r} f\,\frac{x}{r}\cdot\eta$$



$$\eta = \frac{x^T}{|x^T|} = \frac{\nabla^M |x|}{|\nabla^M |x||} \quad (\text{βλ. Α6 15})$$

$$\frac{x}{r}\cdot\eta = |\nabla^M |x||, \qquad f\,\frac{x}{r}\cdot\eta = f\,|\nabla^M |x||$$

$\therefore$ (75), (69)'

$$(76)\quad \frac{d}{dr}\int_{M\cap B_r} f = \frac{d}{dr}\int_{M\cap B_r} f\left(1-|\nabla^M |x||^2 + |\nabla^M |x||^2\right)$$

$$\overset{(69)'}{=} \int_{M\cap\partial B_r} f\,\frac{1-|\nabla^M |x||^2}{|\nabla^M |x||} + \int_{M\cap\partial B_r} \operatorname{div}\left(\frac{x}{r} f\right).$$

Παρατηρούμε

Άσκηση 16

$$\begin{cases} 1-|\nabla^M |x||^2 = |\nabla^\perp |x||^2 = \dfrac{|x^\perp|^2}{|x|^2} \\ \operatorname{div}_M\left(\dfrac{x}{r} f\right) = \dfrac{n}{r} f + \dfrac{x}{r}\cdot\nabla^M f . \end{cases}$$

Αξιοποιώντας αυτές τις παρατηρήσεις έχουμε:

(76) $\Rightarrow$

$$(77)\quad \frac{d}{dr}\int_{M\cap B_r} f = \int_{M\cap\partial B_r} f \frac{|x^\perp|^2}{|x|^2}\frac{1}{|\nabla^M|x||} + \int_{M\cap B_r} \operatorname{div}_M\left(\frac{x}{r} f\right)$$

$$\overset{(69)'}{=} \frac{d}{dr}\int_{M\cap B_r} f \frac{|x^\perp|^2}{|x|^2} + \frac{n}{r}\int_{M\cap B_r} f + \int_{M\cap B_r} \frac{x^T}{r}\cdot\nabla^M f.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\nabla^M\left(r^2-|x|^2\right) = \left(\operatorname{grad}_{\mathbb{R}^{n+1}}\left(r^2-|x|^2\right)\right)^T = -2x^T$$

και ότι

$$r^2-|x|^2 = 0 \quad \text{στο } \partial B_r$$

Κάτω ανέμπα

$$\int_{M\cap B_r} \frac{x^T}{r}\cdot \nabla^M f = -\frac{1}{2r}\int_{M\cap B_r} \nabla^M (r^2-|x|^2)\cdot \nabla^M f$$

$$= \frac{1}{2r}\int_{M\cap B_r} (r^2-|x|^2)\,\Delta_M f$$

$\therefore$

$$(78)\quad \frac{d}{dr}\int_{M\cap B_r} f = \frac{d}{dr}\int_{M\cap B_r} f\,\frac{|x^\perp|^2}{|x|^2} + \frac{n}{r}\int_{M\cap B_r} f + \frac{1}{2r}\int_{M\cap B_r} (r^2-|x|^2)\,\Delta_M f.$$

$\Rightarrow$

$$\frac{1}{r^n}\frac{d}{dr}\int_{M\cap B_r} f - \frac{n}{r^{n+1}}\int_{M\cap B_r} f$$

$$= \frac{1}{r^n}\frac{d}{dr}\int_{M\cap B_r} f\,\frac{|x^\perp|^2}{|x|^2} + \frac{1}{2r^{n+1}}\int_{M\cap B_r} (r^2-|x|^2)\,\Delta_M f$$

$$(79)\quad \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r^n}\int_{M\cap B_r} f\right) = \frac{1}{r^n}\frac{d}{dr}\int_{M\cap B_r} f\,\frac{|x^\perp|^2}{|x|^2}$$

$$+ \frac{1}{2r^{n+1}}\int_{M\cap B_r} (r^2-|x|^2)\,\Delta_M f.$$

Τέλος κάνοντας χρήση του

Άσκηση 17

$(69)' \Rightarrow$

$$(80) \qquad \frac{1}{r^n}\frac{d}{dr}\int_{M\cap B_r} f\,\frac{|x^\perp|^2}{|x|^2} = \frac{d}{dr}\int_{M\cap B_r} f\,\frac{|x^\perp|^2}{|x|^{n+2}}$$

Παίρνουμε

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r^n}\int_{M\cap B_r} f\right) = \frac{d}{dr}\int_{M\cap B_r} f\,\frac{|x^\perp|^2}{|x|^{n+2}} + \frac{1}{2r^{n+1}}\int_{M\cap B_r}\left(r^2-|x|^2\right)\Delta_M f$$

ΟΕΔ

Άσκηση 18

Δείξτε ότι

$$\frac{d}{dr}\,\mathbb{M}(M\cap B_r) \geq \mathbb{M}(M\cap\partial B_r)$$

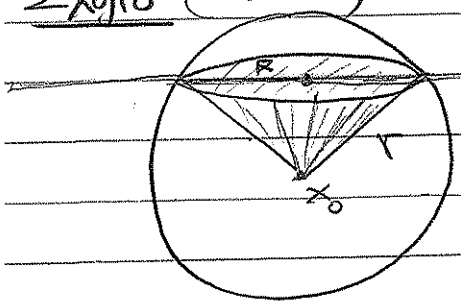
Υπόδειξη: $(69)'$ και Άσκηση 15.

Σημ. Η ανισότητα ισχύει για flat αμιγείς.

§12 Μαλοτωια και Εφαπτομενοι Κωνοι

$n=2$

Σχολιο (Κωνος)



$\Pi = M$ (επιπεδο)

$d = \mathrm{dist}(x_0, \Pi)$

$\mathbb{M}(\text{Κωνος}) = \pi R r = \frac{r}{2}(2\pi R)$

$\mathbb{M}(M \cap B_r(x_0)) = \pi R^2$, $B_r(x_0)$ = μπαλα στον $\mathbb{R}^3$

$A := \partial(\text{Κωνος}) = \partial(M \cap B_r(x_0))$

$\mathbb{M}(A) = 2\pi R$

$d^2 + R^2 = r^2$

$\mathbb{M}(\text{Κωνος}) \geq \mathbb{M}(M \cap B_r(x_0))$

$$\frac{H^2(M \cap B_r(x_0))}{\omega_n r^2} = \frac{\pi R^2}{\pi r^2} = \frac{r^2 - d^2}{r^2} = 1 - \frac{d^2}{r^2} \uparrow$$

Ορισμοι (Σε οτι ακολουθει $|g| \geq 1$ για $g \neq 0$, $\{g : |g| \leq R\}$ συμπαγες για G)

1) Εστω A flat αλυσιδα με συμπαγη φορεα, υ' $\mathbb{M}(A) < \infty$
Η A ελαχιστοποιει την μαζα εαν

$$\mathbb{M}(A) \leq \mathbb{M}(T) \quad \forall\, T \text{ με } \partial T = \partial A$$

2) Εάν η Γ είναι cycle (δηλ $\partial\Gamma=\emptyset$)

$$L(\Gamma) := \inf\{\mathbb{M}(X) : \partial X = \Gamma\}.$$

(κατά ανάλογο τρόπο η A εφαρμόζεται την μορφή τότε

$$\mathbb{M}(A) = L(\partial A)\Big)$$

<u>Παρατηρήσεις</u>

Η ποσότητα L είναι γόρφα ίσχυαν σε cycles

① $L(\Gamma_1+\Gamma_2) \leq L(\Gamma_1)+L(\Gamma_2)$

και επίσης

② $W(\Gamma) \leq L(\Gamma)$.

Πιθ. $\Big(\partial X_1=\Gamma_1,\ \partial X_2=\Gamma_2,\ \partial(X_1+X_2)=\Gamma_1+\Gamma_2$

$$\mathbb{M}(X)=\mathbb{M}(X_1+X_2) \leq \mathbb{M}(X_1)+\mathbb{M}(X_2).$$

$$W(\Gamma) = \inf_X\{\mathbb{M}(\Gamma-\partial X)+\mathbb{M}(X)\} \qquad (\sigma.36)$$

$$\leq \inf_{\partial X=\Gamma}\{\mathbb{M}(X)\}$$

$$= L(\Gamma).\Big).$$

Σημ

Θα δείξαμε αργότερα ότι

$$L(\Gamma) = W(\Gamma) .$$

3) (Almgren)

A flat φυσίδα λέγεται <u>λ-ελαχιστοποιούσα, (λ − min)</u>

εαν

(81) $$(1-\lambda r)\, M(A \llcorner B_r(x)) \le L(\partial(A \llcorner B_r(x)))$$

$\forall$ μπάλα ακτίνας r, ($\forall$ κέντρο x). Υποθέτουμε ότι η A έχει συμπαγή φορέα, οπότε $0 < r < \mathrm{dist}(x, \mathrm{spt}\, \partial A)$.

<u>Παρατήρηση</u>: 0-ελαχιστοποιούσα $\Leftrightarrow$ A ελαχιστοποιεί την μάζα δοθέντος του συνόρου $\partial A = \Gamma$.

<u>Παρατήρηση</u>: Ενδιαφέρουσα παραλλαγή του (81) είναι

$$(1-\lambda r^{\alpha})\, M(A \llcorner B_r) \le L(\partial(A \llcorner B_r))$$

που επιτρέπει Hölderιότητα (C^{α}, $C^{1+\alpha}$, κ.λ.π.)

Πιο γενικά

$$(1-\omega(r))\, M(A \llcorner B_r) \le L(\partial(A \llcorner B_r))$$

$$\int_0^1 \frac{\omega(r)}{r}\, dr < \infty .$$

Θεώρημα 1 (Η φορμούλα της μονοτονίας για αμιγείς)

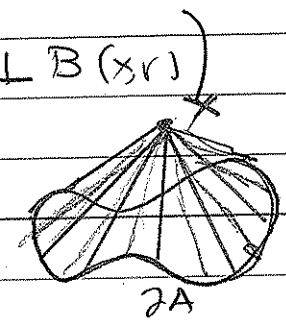
Έστω A λ-min, m-αμιγής

$\Rightarrow$

$$r \to e^{\lambda m r} \frac{\mathbb{M}(A \llcorner B(x,r))}{r^m} \quad \text{αυξάνει, } 0<r<\operatorname{dist}(x, \operatorname{spt} \partial A).$$

Απόδειξη

1. $u(r) := \mathbb{M}(A \llcorner B(x,r))$, $\gamma(r) := \mathbb{M}(\partial(A \llcorner B(x,r)))$



Λήμμα 18 $\Longrightarrow$

(82) $$u' \geq \mathbb{M}(\partial(A \llcorner B_r)) = \gamma(r)$$

2. $$(1-\lambda r)\, u(r) \overset{(81)}{\leq} \mathbb{L}(\partial(A \llcorner B(x,r)))$$

$$\leq \mathbb{M}(\operatorname{cone}_x(\partial(A \llcorner B(x,r))))$$

$$\leq \frac{r}{m} \mathbb{M}(\partial(A \llcorner B(x,r))) \quad \text{(βλ παρατήρηση για κωνικές)}$$

$$= \frac{r}{m} \gamma(r)$$

(83) $$\gamma(r) + \left(\lambda m - \frac{m}{r}\right) u \geq 0$$

3. Προσθέτουμε στην (83) $u' - \gamma$:

$$u' - \cancel{\gamma} + \cancel{\gamma} + \left(\lambda m - \frac{m}{r}\right)u \geq u' - \gamma \overset{(82)}{\geq} 0$$

$\Downarrow$

$$u' + \left(\lambda m - \frac{m}{r}\right)u \geq 0$$

Πολλαπλασιάζουμε με $e^{\lambda m r}\frac{1}{r^m}$:

$$\frac{e^{\lambda m r}}{r^m}\left[u' + \left(\lambda m - \frac{m}{r}\right)u\right] \geq 0 \iff$$

(84) $$\left(\frac{e^{\lambda m r}\, u}{r^m}\right)' \geq 0 .$$

ΟΕΔ

<u>Σχόλιο</u>

Αργότερα θα αποδείξουμε το

<u>Θεώρημα 2</u>

Εάν $e^{\lambda m r}\frac{u}{r^m}$ είναι σταθερή για

$0 < r < R \leq \operatorname{dist}(x, \operatorname{spt} \partial A)$, τότε

$A \llcorner B(x,R)$ είναι κώνος,

$A \llcorner B(x,R) = \operatorname{cone}_x\left(\partial(A \llcorner B(x,R))\right)$, $\square$

Θεώρημα 3 (Μονοτονία + Ισοπεριμετρική ανισότητα)

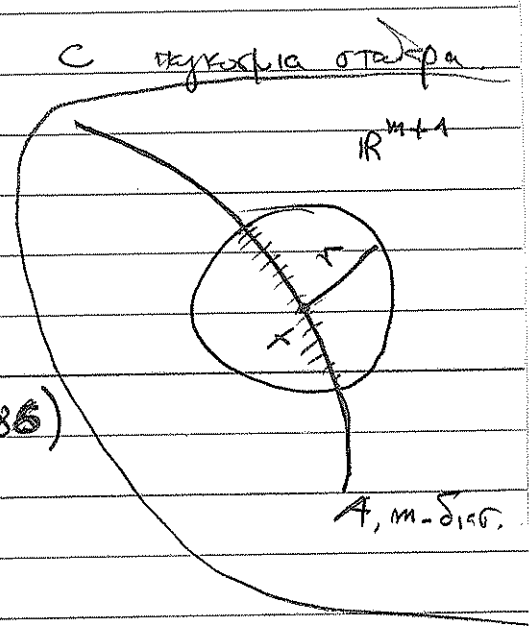
Έστω A λ-min, m-ομοιόμορφα, και

$\lambda r \le \frac{1}{2}$, $\operatorname{spt} \partial A \cap B_r = \emptyset$, $x \in \operatorname{spt} A$

$\Longrightarrow$

(85) $\mathbb{M}(A \llcorner B_r) \geq c\, r^m$, c σταθερά

(βλ. Παρατήρηση 3, σ. 93).



Απόδειξη

Έχουμε την (82):

$$\frac{d}{dr}\mathbb{M}(A \llcorner B_r) \geq \mathbb{M}(\partial(A \llcorner B_r)) \qquad (86)$$

Θέτουμε $u(r) = \mathbb{M}(A \llcorner B_r)$,

$(86) \Leftrightarrow u' \geq \mathbb{M}(A \llcorner B_r)$.

Έχουμε από τον ορισμό της λ-min

$$(1-\lambda r)\,\mathbb{M}(A \llcorner B_r) \le \mathbb{L}(\partial(A \llcorner B_r)),$$

και από τον ορισμό του $\mathbb{L}$

$$= \inf\{\mathbb{M}(X) : \partial X = \partial(A \llcorner B_r)\},$$

και από την ισοπεριμετρική ανισότητα

$$\le c\left(\mathbb{M}(\partial(A \llcorner B_r))\right)^{\frac{m}{m-1}}.$$

$\therefore$

$$(1-\lambda r)\,u \le c\,(u')^{\frac{m}{m-1}}$$

$\Longrightarrow$ (από $\lambda r \le \frac{1}{2}$)

$$u' \geq (u)^{m-1/m}\,\frac{1}{\tilde{c}} \quad \Longleftrightarrow$$

$$u^{\frac{1}{m}-1} u' \geq \frac{1}{\tilde{c}} \qquad (\text{Χρειάζομαι } u>0 \ \forall r \Leftrightarrow x \in \operatorname{spt} A)$$

$$\left(m u^{\frac{1}{m}}\right)' \geq \frac{1}{\tilde{c}}$$

$$\Longrightarrow \quad m u^{\frac{1}{m}} \Big|_{0}^{r} \geq \frac{1}{\tilde{c}} r$$

$$\Longrightarrow \quad m\, u^{\frac{1}{m}}(r) \geq \frac{1}{\tilde{c}} r \qquad (u(0) \geq 0).$$

$$\Longrightarrow \quad u \geq \frac{r^m}{m c}.$$

ΟΕΔ.

//

<u>Πόρισμα</u>

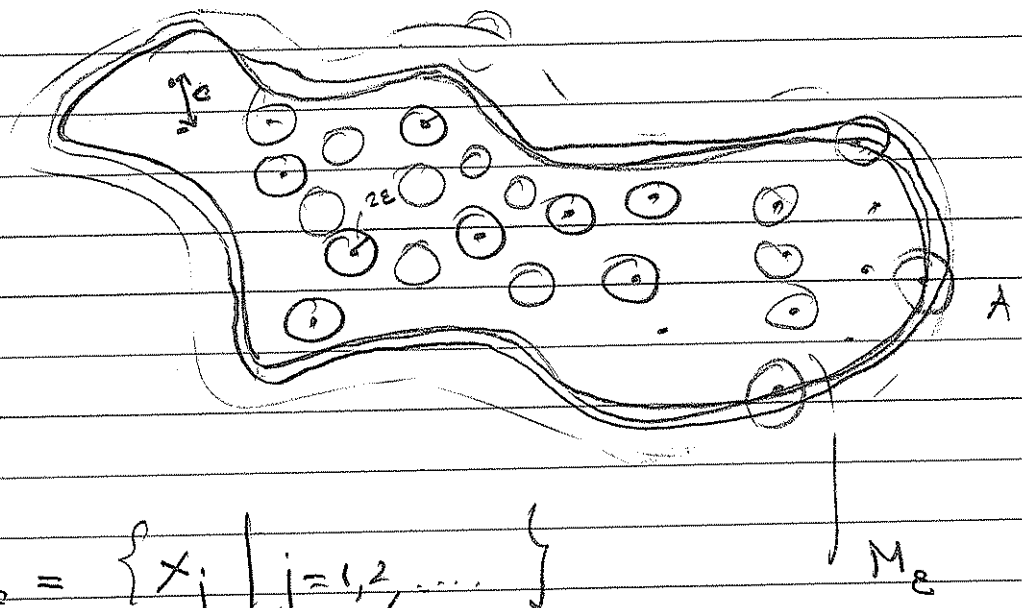
Έστω A m-αμετάβλητο, λ-min,

$$\Longrightarrow \quad (87) \qquad \mathcal{H}^m(\operatorname{spt} A) \leq c\, \mathbb{M}(A)$$

<u>Απόδειξη</u>

Ορίζουμε $M_\varepsilon = \{x \in \operatorname{spt} A \mid \operatorname{dist}(x, \operatorname{spt} \partial A) > \varepsilon\}$,

$S_\varepsilon^i = \{$ Maximal σύνολο σημείων του M_ε με απόσταση μεταξύ τους $\geq 2\varepsilon$ $\}$



$$S_\varepsilon = \{ x_j \mid j = 1, 2, \dots \}$$

Maximality $\Longrightarrow$

$$(88) \quad M_\varepsilon \subset \bigcup_{x_j \in S_\varepsilon} B_{2\varepsilon}(x_j)$$

$$\mathbb{M}(A) \geq \sum_{x_j \in S_\varepsilon} \mathbb{M}(A \llcorner B_{2\varepsilon}(x_j))$$

$$\left(B_{2\varepsilon}(x_i) \cap B_{2\varepsilon}(x_\ell) = \emptyset, \ i \neq \ell \right)$$

$$\overset{\theta 3}{\geq} \sum_{x_j \in S_\varepsilon} c(2\varepsilon)^m$$

$$\overset{(88)}{\simeq} C \, H^m_{2\varepsilon}(A)$$

$\therefore \quad (\varepsilon \to 0)$

$$\mathbb{M}(A) \geq H^m(A).$$

QED

Σχόλιο (Fleming, σσ 166-167)
Έστω A flat chain με $\mathbb{M}(A)<\infty$. Τότε μπορούμε να ορίσουμε ένα μέτρο μ_A για κάθε $X \subset \mathbb{R}^n$ (μετρησιμότητα ως προς το μέτρο) μέσω του τύπου

$$\mu_A(X) = \mathbb{M}(A \cap X).$$

Ισχύει επίσης ότι

$$\operatorname{spt} A = \operatorname{spt} \mu_A .$$

$\square$

Ορισμός
Έστω A m-ακολουθία

(89) $$\Theta(A,x,r) := \frac{\mathbb{M}(A \llcorner B(x,r))}{\omega_m r^m}, \quad \omega_m = |B(0;1)|, \quad B(0;1) \subset \mathbb{R}^m$$

$$= \frac{\mu_A(B(x,r))}{\omega_m r^m}$$

$$\Theta(A,x) := \lim_{r\to 0} \Theta(A,x,r) \quad (\text{εάν το όριο υπάρχει})$$

$$\Theta(A) \overset{(*)}{:=} \lim_{r\to\infty} \Theta(A,x,r) \quad (\text{εάν το όριο υπάρχει})$$

Άσκηση 19. (*)
Εάν το όριο $\lim_{r\to\infty} \Theta(A,x,r)$ υπάρχει για κάποιο x τότε υπάρχει για όλα τα x, και είναι ανεξάρτητο του x.

<u>Θεωρημα 4</u> : Εστω A λ-ελαχιστοποιηση, τοτε

① $\Theta(A,x)$ $\exists$ $\forall$ $x \notin spt(\partial A)$

② $\Theta(A,x) \geq \frac{c_m}{\omega_m} > 0$

③ $\Theta(A,x)$ εξαρταται ανω ημισυνεχως απο A και x:

A_i λ-ελαχ.

$$\left.\begin{array}{l} A_i \xrightarrow{W} A \\ \lambda_i \longrightarrow \lambda < \infty \\ x_i \longrightarrow x \\ dist(x_i, spt\,\partial A) > \delta \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \Theta(A,x) \\ \geq \limsup_{i\to\infty} \Theta(A_i,x_i) \end{array}$$

<u>Αποδειξη</u>

① $r \to \frac{e^{\lambda\omega r}}{r^m} \mathbb{M}(A \llcorner B(x,r))$ $\uparrow$, απο Θ1.

$\Longleftrightarrow$ $e^{\lambda\omega r}\Theta(A,x,r)$ $\uparrow$ ως προς r, απο Θ1

$\therefore$ $\lim_{r\to 0} e^{\lambda\omega r}\Theta(A,x,r)$ υπαρχει.

$\Longrightarrow$ $\lim_{r\to 0} \Theta(A,x,r)$ υπαρχει $(e^{\lambda\omega r} \to 1, r\to 0)$.

② $\Theta(A,x,r) \overset{\Theta 3}{\geq} \frac{c_m}{\omega_m}$, $0 < r < dist(x, spt\,\partial A)$, $\lambda r < \frac{1}{2}$

③ Υπενθυμίζουμε χωρίς απόδειξη:

(i) Έστω $\tilde{P}_j \xrightarrow{W} A$, $\mathbb{M}(\tilde{P}_j) < C$ (αλλά όχι αναγκαστικά $\mathbb{M}(\tilde{P}_j) \longrightarrow \mathbb{M}(A)$. Τότε το

$$\tilde{\mu}_j \longleftrightarrow \tilde{P}_j \text{, συγκλίνει σταθερά σε κάποιο } \tilde{\mu}$$

και ισχύει

$$\tilde{\mu}(I) = \lim_{j \to \infty} \mu_j(I) \geq \mu_A(I)$$

$\forall\, I$ τ.ω. $\tilde{\mu}(\mathrm{fr}\, I) = 0$ και $\tilde{P}_j \cap I \to A \cap I$.

Τα δεύτερα με αυτές τις ιδιότητες είναι ανίσα

$\therefore \quad \tilde{\mu} \geq \mu_A$. (βλ. Fleming, σ 167)

(ii) Λήμμα (Fleming)

Έστω $P_j \xrightarrow{W} A$, $\mathbb{M}(P_j) \longrightarrow \mathbb{M}(A) < \infty$. Τότε

$$P_j \cap X \xrightarrow{W} A \cap X, \ \forall\, X \text{ τ.ω. } \mu_A(\mathrm{fr}\, X) = 0$$

(iii) (Evans - Gariepy σ 54).

Έστω μ, μ_k μέτρα Radon στο $\mathbb{R}^n$. Τότε εάν

$$\mu_k \to \mu \text{ ασθενώς}$$

ισχύουν τα ακόλουθα:

α) $\overline{\lim_{k \to \infty}}\, \mu_k(K) \leq \mu(K) \quad \forall$ συμπαγές $K \subset \mathbb{R}^n$

b) $\underline{\lim}_{k\to\infty} \mu_k(U) \geq \mu(U)$ $\forall$ ανοιχτό $U \subset \mathbb{R}^n$

c) $\lim_{k\to\infty} \mu_k(B) = \mu(B)$ $\forall$ φραγμένο Borel $B \subset \mathbb{R}^n$

με $\mu(\partial B) = 0$.

Έχουμε λοιπόν

$$\mu_A(B(x,r)) \leq \underline{\lim}_{i\to\infty} \mu_{A_i}(B(x_i,r))$$

$$\leq \overline{\lim}_{i\to\infty} \mu_{A_i}(B(x_i,r))$$

$$\leq \mu_A(\overline{B(x,r)}).$$

Κατά ανάλογο τρόπο $\mu_A(\partial B(x,r)) = 0$, τότε

$$\mu_A(B(x,r)) = \underline{\lim}\, \mu_{A_i}(B(x_i,r))$$

$$= \overline{\lim}\, \mu_{A_i}(B(x_i,r))$$

$$= \mu_A(\overline{B(x,r)}).$$

$\mu_A(\partial B(x,r)) = 0$ εκτός αριθμήσιμων ακτίνων r.

Για τέτοια r έχουμε

$$\mu_A(B(x,r)) = \lim_{i\to\infty} \mu_{A_i}(B(x_i,r))$$

<u>Sup</u>

$$e^{\lambda_i m r} \frac{\mu_{A_i}(B(x,r))}{\omega_m r^m} \geq \Theta(A_i, x_i)$$

$\therefore$

$$\mu_A(B(x,r)) \geq \overline{\lim_{i\to\infty}} \frac{r^m \omega_m}{e^{\lambda_i m r}} \Theta(A_i, x_i)$$

$\therefore$

$$\mu_A(B(x,r)) \geq \frac{r^m}{e^{\lambda m r}} \overline{\lim_{i\to\infty}} \Theta(A_i, x_i)$$

$$\frac{e^{\lambda m r} \mu_A(B(x,r))}{\omega_m r^m} \geq \overline{\lim} \Theta(A_i, x_i)$$

Tomando para $r \to 0$ exige

$$\Theta(A,x) \geq \overline{\lim} \Theta(A_i, x_i).$$

$0 \in \Delta$

<u>Θεώρημα 5</u> (Εφαπτόμενος Κώνος)

Έστω A λ-σύν αρνίδα, $x \notin \operatorname{spt} \partial A$.
Έστω $\{\mu_i\}$ <u>ακολουθία θετικών αριθμών</u>, $\mu_1 < \mu_2 < \dots$
$\mu_i \to +\infty$.
Θέτουμε

$$A_i := \mathcal{D}_{\mu_i}(A - x),$$

όπου

$$\mathcal{D}_{\mu_j} : y \to \mu_j (y - x) \qquad (\text{διάστολη})$$

$$\mathcal{D}_{\mu_j}(A - x) = \{ \mu_j (y - x) \mid y \in A \}.$$

Τότε η $\{A_i\}$ έχει υπακολουθία* που συγκλίνει σε ορίο C (flat αρνίδα), με τις εξής ιδιότητες:

1. $\partial C = 0$
2. C είναι <u>κώνος</u>
3. $\Theta(C, 0, r) = \Theta(A, x)$
4. C είναι 0-σύν αρνίδα.

<u>Σημ</u> (Ορ. Κώνου)

Το C είναι αναλοίωτο κάτω από την ομοθεσία

$$y \to t(y - x), \quad t > 0.$$

* Κατά πόσον ο κώνος είναι ανεξάρτητος από την υπακολουθία σχετίζεται με την ομαλότητα της A.

Απόδειξη

Έστω A λ-min :

$$(1-\lambda r)\,\mathbb{M}(A \perp B_r(x)) \le \mathcal{L}(\partial(A \perp B_r(x)))$$

$\Longrightarrow$

$$\left(1-\lambda \frac{r}{\mu_2}\right)\mathbb{M}\left(A \perp B_{\frac{r}{\mu_2}}(x)\right) \le \mathcal{L}\left(\partial\left(A \perp B_{\frac{r}{\mu_2}}(x)\right)\right),$$

δηλαδή λόγω τύπου εμβαδού

$$\left(1-\frac{\lambda}{\mu_i} r\right)\mathbb{M}(A_i \perp B_r(x)) \le \mathcal{L}(\partial(A_i \perp B_r(x))).$$

Συνεπώς

(90) A_i είναι $\frac{\lambda}{\mu_i}$ - min.

Τετριμμένα

$$\Theta(A_i, 0, r) = \Theta\left(A, x, \frac{r}{\mu_i}\right).$$

Επίσης

(91) $$\lim_i \Theta(A_i, 0, r) = \lim_i \Theta\left(A, x, \frac{r}{\mu_i}\right) = \Theta(A, x)$$

διότι το όριο στη 2η μεταβλητή υπάρχει από το $\Theta < 1$.

Για κάθε $r > 0$ έχουμε ((89), (91)).

$$\frac{\mu_{A_i}(B(x,r))}{r^m} \le \text{Σταθ.}$$

Και επομένως

$$\mu_{\partial A_i}(B(x,r)) \longrightarrow 0 .$$

Κατά συνέπεια από το Θεώρημα (αδύνατος) συγκλίσεως* (βλ σ. 65) $\exists$ υπακολουθία $\{A_i\}$ τ.ω.

(92) $$A_i \longrightarrow G \quad , \quad \partial G = \lim \partial A_i = 0 .$$

Από την (90) έπεται ότι

G σ-min (δηλαδή ελαχιστοποιεί την μάζα).

Τώρα α.ε. ως προς r (βάσει του 1ου κριτηρίου σ. 110)

(93) $$\lim_{i\to\infty} \Theta(A_i, 0, r) = \Theta(G, 0, r) ,$$

Και μαζί με την (91)

(94) $$\Theta(G, 0, r) = \Theta(A, x) \quad , \text{ α.ε. } r.$$

Από το Θ2, σ 102 έπεται ότι

G είναι κώνος με κορυφή στο $x=0$.

ΟΕΔ

**

* Εδώ κάναμε χρήση του ελάχιστου στην σ 106 $\Rightarrow$ $\mathbb{M}(A_i \llcorner B(x,r)) + \mathbb{M}(\partial A_i \llcorner B(x,r)) < \Sigma$ τελ. $\square$

§13 Η Δομή των Ελαχιστικών Κώνων

Θεώρημα

Έστω C_0 κώνος που είναι m-διάστατη ελαχιστική επιφάνεια με κορυφή στο $x=0$, και $\partial C_0 = 0$.
Έστω

$$V = \{ x \in \mathbb{R}^{m+k} : \Theta(C_0, x) = \Theta(C_0, 0) \}$$

Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

1. V είναι γραμμικός χώρος
2. C_0 είναι αναλοίωτος ως προς κάθε μετασχηματισμό κατά μήκος V, στην V ανήκουν τα V, και κατά συνέπεια

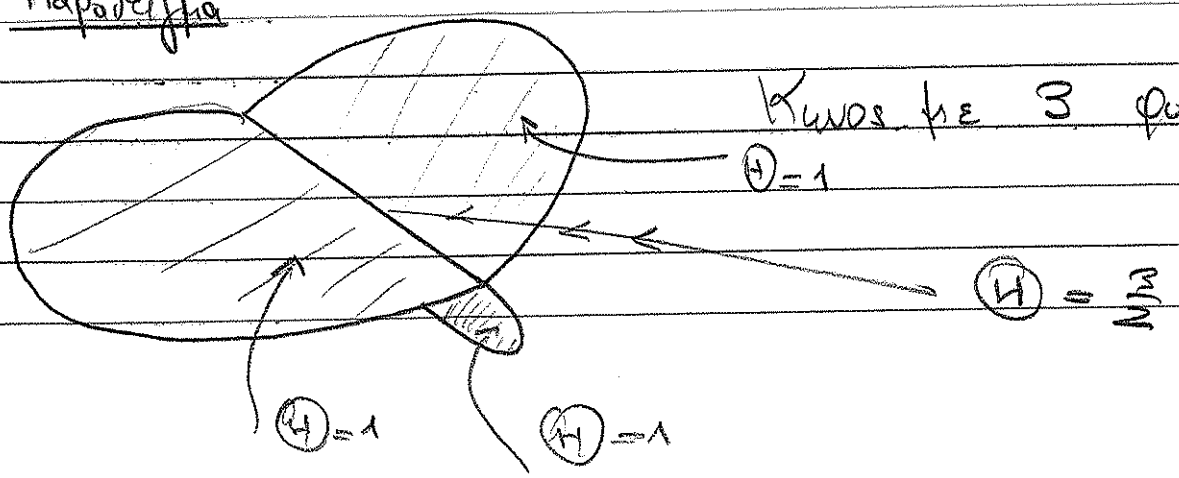
$$C_0 = V \times \tilde{C}_0 \,, \quad \tilde{C}_0 \text{ ελαχιστικός κώνος}$$

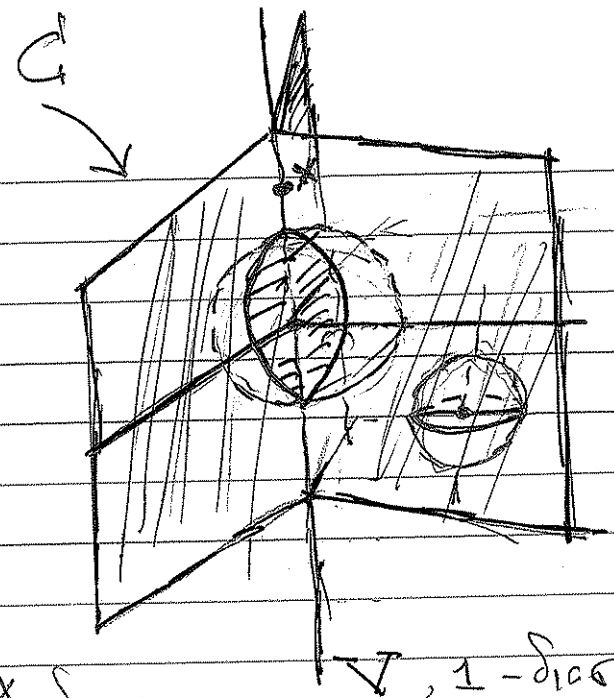
στον $V^{\perp}$, κορυφή στο $x=0$

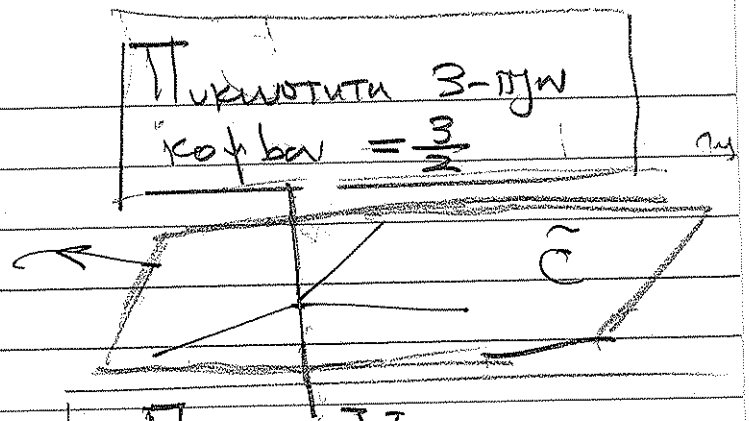
3. $\Theta(C_0, x) \leq \Theta(C_0, 0) - \delta$ για $x \notin V$ όταν $\delta = \delta_\varepsilon > 0$

$\square$

Παράδειγμα







Πυκνότητα 3-πλών κομβων $= \frac{3}{2}$

Απόδειξη

Για $x \in V$ έχουμε

$$\frac{\mathbb{M}(C \cap B_r(x))}{\pi r^2} = \frac{3\frac{\pi r^2}{2}}{\pi r^2} = \frac{3}{2}$$

(1) Έστω $x \in V$.

$$\Theta(\mathcal{C}_0, 0) = \Theta(\mathcal{C}_0, x) \quad \text{(εξ' ορισμού)}$$

$$\leq \Theta(\mathcal{C}_0, x, r) \quad \text{(μονοτονία)}$$

$$\leq \lim_{r \to \infty} \Theta(\mathcal{C}_0, x, r) := \Theta(\mathcal{C}_0)$$

$$\Theta(\mathcal{C}_0, 0) = \lim_{r \to 0} \Theta(\mathcal{C}_0, 0, r) \quad \text{(εξ' ορισμού)}$$

$$\Theta(\mathcal{C}_0, 0, r) = \Theta(\mathcal{C}_0, 0) \quad \text{(πλοτυτα κωνων } \Theta 2\text{, σλοπ)}.$$

Συνεπώς

(95) $\Theta(\mathcal{C}_0) = \Theta(\mathcal{C}_0, x) \leq \Theta(\mathcal{C}_0, x, r) = \Theta(\mathcal{C}_0)$

$\Rightarrow \Theta(\mathcal{C}_0, x, r)$ ανεξαρτητο του r

$\Longrightarrow \mathcal{C}_0$ κωνος με κορυφη στο x.

επιλυσ

(96) $\mathcal{D}_\mu(C_0 - x) = \{\mu(y-x) \mid y \in C_0\}$

$= C_0 \quad (C_0$ κυρτός στο $x)$.

(Σχόλιο

Από την (96) προκύπτει ότι $\mathcal{D}_\mu(C_0 - x) = C_0$, και συνεπώς ∀ εφαπτόμενο κυρτός στον C_0 είναι ο εαυτός του.).

Ποιοι μπορούμε να γράψουμε τον δείκτη στον C_0

$\{\mu(y-x) \mid y \in C\} = \{\mu y \mid y \in C\} - \mu x$

$= C - \mu x \quad (C$ κυρτός στο $0)$

∴

(97) $C = C - \mu x$,

άρα ο C είναι αναλοίωτος κάτω από μεταφορές σε ∀ κατεύθυνση x του V.

Παρατήρηση

Έστω $x \in V$, και $y \in R^{m+k}$ ανύσματα.
Θεωρούμε την ακτίνα $x + t(y-x)$.
Έχουμε

(98) $\Theta(C, y) = \Theta(C, x + t(y-x))$, $\forall t \neq 0$

Πραγματι:

$$\mathbb{M}(C \perp B(x+t(y-x),r))$$

$$= \mathbb{M}(C \perp B(x(1-t)+ty, r))$$

$$= \mathbb{M}(C(C - x(1-t)) \perp B(ty,r))$$

(διοτι η μορφα ειναι ανεξαρτητη κατω απο μεταφορες, και λογω (τυπ(97)))

$$= \mathbb{M}(C \perp B(ty,r)).$$

$$\Rightarrow \frac{\mathbb{M}(C \perp B(x+t(y-x),r))}{\omega_m r^m} = \frac{\mathbb{M}(C \perp B(ty,r))}{\omega_m r^m} = \frac{|t|^m \mathbb{M}(\frac{1}{t} C \perp B(y, r/t))}{\omega_m r^m}$$

$$= \frac{\mathbb{M}(C \perp B(y, \frac{r}{t}))}{\omega_m \left(\frac{r}{|t|}\right)^m} \quad \text{(ιδιοτητα κανων)},$$

απ'οσον παιρνωντας το οριο $r \to 0$, η Παρατηρηση δρουν ειναι. Εαν προσθεσεις εχουμε οτι $y \in V$, τοτε ο παραπανω λογος $= \Theta(C) = \Theta(C, y)$, οπου καναμε χρηση της (95).

$\Rightarrow$

$x, y \in V \Rightarrow$ ακτινα $\overline{xy} \subset V$

(οχι απλως ενδεχομενο τμημα)

$\Rightarrow$

V ενα γραμμικος χωρος.

(2) Ορίζουμε

$$\tilde{C} = C/V \text{ , χώρο πηλίκο :}$$

$x_1, x_2 \in C$, $x_1 \sim x_2 \iff x_1 - x_2 = \mu v$, κάποιο $v \in V$.

Έχουμε

$$C = \tilde{C} \times V$$

<u>Άσκηση 20</u>

Δείξτε ότι (i) $\tilde{C} \subset V^{\perp}$, (ii) $\tilde{C}$ κυρτός, (iii) $\tilde{C}$ σχεδόν γνήσιο επίφανεια.

(3)

$$\sup\{ \Theta(C, x) \mid x \notin V \}$$

$$= \sup\{ \Theta(C, \mathrm{Proj}_V x + \mathrm{Proj}_{V^{\perp}} x) \mid x \notin V \}$$

$$= \sup\{ \Theta(C - \mathrm{Proj}_V x, \mathrm{Proj}_V x) \mid x \notin V \}$$

$$= \sup\{ \Theta(C, \mathrm{Proj}_{V^{\perp}} x) \mid x \notin V \}$$

$$= \sup\{ \Theta(C, x) \mid x \in V^{\perp} \}$$

$$= \sup\{ \Theta(G, y) \mid y \in V^{\perp}, |y| = 1 \}$$ ($\mathbb{R}^{m+k}$)

(μέσω της (98) στην οποία εξισώσαμε $x=0$)

$$= \max\{ \text{———} \;\; // \;\; \text{———} \}$$ (συνέχεια)

$$= \Theta(G, p), \quad p \in V^{\perp}, \quad |p| = 1$$

$$\neq \Theta(G, 0), \quad \text{διότι } p \notin V.$$

Τώρα καλούμαστε χρήσιμοι της $\Theta(G, 0) = \Theta(G)$ και από Άσκηση 19 $\Theta(G) = \lim_{r \to \infty} \Theta(G, p, r)$.

Από μονοτονία

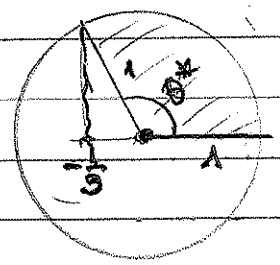
$$\Theta(G, p) \leq \Theta(G, p, r) \leq \Theta(G)$$

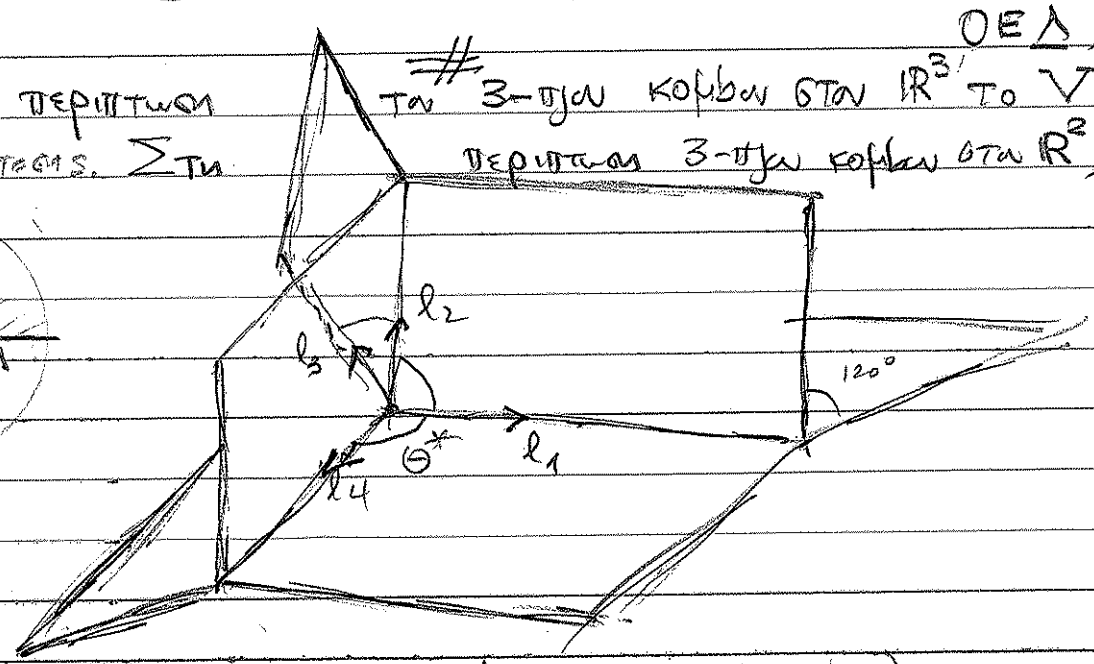
$\therefore$

$$\Theta(G, p) < \Theta(G, 0) = \Theta(G).$$

ΟΕΔ

Σημ: Στη περίπτωση # των 3-πλών κοίλων στον $\mathbb{R}^3$ το V είναι 1 διάστασης. Στη περίπτωση 3-πλών κοίλων στον $\mathbb{R}^2$, $V=0$.





Τετράπλευρος κοίλος: Οι γωνίες θ^* (γωνίες MARALDI) χαρακτηρίζεται από $\cos\theta^* = -\frac{1}{3}$, $\theta^* \simeq 109.28$. $\Theta(0) = 6\,\frac{\theta^*}{2\pi}(\cancel{\pi r^2})\frac{1}{\pi r^2} > \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

§14. Ενιοχύμενη Μονοτονία – Επιδιορθωτικά Ανισότητα – Ο επιφανειακός όρος στο αναπτύγμα της πυκνότητας

Θεώρημα (Άνω φράγμα στην λύση πυκνότητας)

A λ-min αγωνίδα, $\operatorname{spt} \partial A \cap (B(0,R)) = \emptyset$, $r = |x| < R/2$

$$(99) \qquad \frac{\mu_A B(x,r)}{r^m} \leq C_{\lambda R} \frac{\mu_A B(0,R)}{R^m}, \quad 0 < r < \frac{R}{2}$$

Απόδειξη

Μονοτονία (Θ 1 σελ 101) δίνει

$$r \to e^{\lambda m r} \frac{\mu_A B(x,r)}{r^m} \uparrow$$

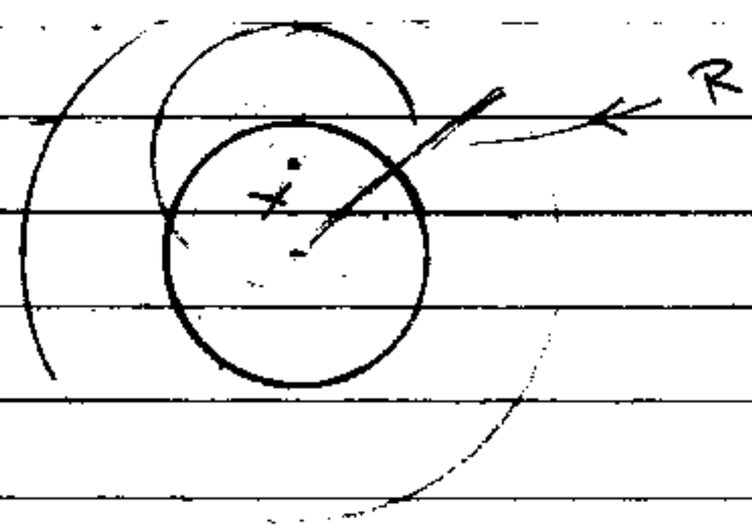
Συνεπώς

$$\frac{e^{\lambda m r} \mu_A B(x,r)}{r^m} \leq e^{\lambda m \frac{R}{2}} \frac{\mu_A B(x,R/2)}{(R/2)^m} \Rightarrow$$

$$\frac{\mu_A B(x,r)}{r^m} \leq e^{\frac{m}{2}(\lambda R)} 2^m \frac{\mu_A B(0,R)}{R^m}.$$

$(B(x,R/2) \subset B(0,R))$

ΟΕΔ



Σχόλια (Η επιπεφανειακή ιδέα, 10 έτια του 60)

Υπενθυμίζουμε κάποια πράγματα:

Έστω $r < \mathrm{dist}(0, \mathrm{spt}\,\partial A)$, ($A$ m-ομοιόμορφα, λ-min)

$u(r) := \mathbb{M}(A \llcorner B_r) = \mu_A B_r$

$\gamma(r) := \mathbb{M}(\partial(A \llcorner B_r))$

$$\frac{u(r)}{r^m} \longrightarrow \Theta, \quad r \to 0$$

$$\mathbb{L}(\partial(A \llcorner B_r)) \le \mathbb{M}\, \mathrm{Cone}_0(\partial(A \llcorner B_r))$$

$$\le \frac{r}{m}\, \mathbb{M}(\partial(A \llcorner B_r)) \quad (\text{βλ σ. 104}).$$

$\Longleftrightarrow$

$$\mathbb{L}(\partial(A \llcorner B_r)) \le \frac{r}{m}\gamma$$

$\Longleftrightarrow$

$$(100) \quad \mathbb{L}(\partial(A \llcorner B_r)) - r^m \Theta \le \frac{r}{m}\gamma - r^m \Theta$$

Από τον ορισμό του $\mathbb{L}$ βέβαια έχουμε

$$\mathbb{L}(\partial(A \llcorner B_r)) = \mathbb{M}(A \llcorner B_r) \quad \text{για } A \text{ 0-min.}$$

Σε αυτήν την περίπτωση

$$(101) \quad r^m \left(\frac{\mathbb{M}(A \llcorner B_r)}{r^m} - \Theta \right) \le \frac{r}{m}\gamma - r^m \Theta,$$

και λόγω της ομοιότητας, το αριστερό μέλος της (100) είναι θετικό. Η (100) ισχύει, όπως ειδαμε, μεσω της σχεσης με τον κωνο

Η η-εξαντλητικη ανισοτητα, η καλυτερα σταθερα $0<\eta<\lambda$, ειναι η ισοδυναμη ισχυροτερη παραλλαγη της (100):

$$(102)\quad \perp\left(\partial(A\perp B_r)\right)-r^m\Theta \le \eta\left(\frac{r}{m}\gamma-r^m\Theta\right).$$

Πραγματι εαν ισχυει η (102) σημαινει μια εκτιμηση καλυτερη απο αυτην που παρεχει η συγκριση με τον κυνο. Μαλιστα η (102) προσφερει εκτιμηση της αυξησης του γ αν $M(A\perp B)/r^m$ στην περιοχη Θ (δηλαδη εκτιμηση στην αυξηση στον εξαντλημενο κυνο) δηλ. ενα καλυτερο ειδος 2ου παραγωγου.

Op ("Κανονικοποιημενο Πλεονασμα")

$$E(r):=\frac{U(r)}{r^m}-\Theta$$

Η (102) παρεχει εκτιμηση στην $E(r)$

Εκτιμηση του Κανονικοποιημενου Πλεονασματος

(102) $\Longrightarrow$

$$\perp\left(\partial(A\perp B_r)\right)\le\eta\left(\frac{r}{m}\gamma-r^m\Theta\right)+r^m\Theta$$

Α λ-ομιν $\overset{(81)}{\Longrightarrow}$

$$(103)\quad (1-\lambda r)u \le \eta\left(\frac{r}{m}\gamma-r^m\Theta\right)+r^m\Theta.$$

1) $\lambda = 0$

$$u \leq \eta \left(\frac{r}{m} \gamma - r^m \Theta \right) + r^m \Theta \implies$$

$$u - r^m \Theta \leq \eta \left(\frac{r}{m} \gamma - r^m \Theta \right).$$

Πολλαπλασιάζοντας με $\frac{m}{\eta r}$:

$$\gamma - m r^{m-1} \Theta \geq \frac{m}{\eta r} \left(u - r^m \Theta \right) \iff$$

$$(104) \quad \left(\gamma - m r^{m-1} \Theta \right) - \frac{m}{\eta r} \left(u - r^m \Theta \right) \geq 0 .$$

Υπενθυμίζουμε (Αρ 18, τόμος του ανεβάσω)

$$u' \geq \gamma \quad \left(\text{δηλ. } \frac{d}{dr} \mathbb{M}(A \setminus B_r) \geq \mathbb{M}(\partial(A \setminus B_r)) \right)$$

$\implies$

$$u' - m r^{m-1} \Theta - \frac{m}{\eta r} \left(u - r^m \Theta \right) \geq 0$$

$\implies$

$$\left(u - r^m \Theta \right)' - \frac{m}{\eta r} \left(u - r^m \Theta \right) \geq 0 \qquad (105)$$

Θέτουμε

$$(106) \qquad w = u - r^m \Theta$$

Ορίζουμε β : διαμέρεια της

(107) $$\frac{m}{\eta} = m + \beta \qquad \left(\beta > 0 \iff \eta < 1\right)$$

(10) $\Longrightarrow$

(108) $$W' - \frac{m+\beta}{r} W \geq 0 .$$

Πολλαπλασιάζουμε με $\frac{1}{r^{m+\beta}}$:

(109) $$\left(\frac{W}{r^{m+\beta}}\right)' \geq 0 .$$

$$\mathbb{E}(r) = \frac{U(r)}{r^m} - \Theta = \frac{U(r) - r^m \Theta}{r^m} = \frac{W}{r^m}$$

(109) $\Longleftrightarrow$

(110) $$\left(\frac{\mathbb{E}(r)}{r^\beta}\right)' \geq 0 ,$$

δηλαδή

(111) $$r \longrightarrow \frac{\mathbb{E}(r)}{r^\beta} \uparrow$$

Υπενθυμίζουμε ότι η ιδιότητα της μονοτονίας

Για 0-mm δίνει ότι

$$r \to \mathbb{E}(r) \uparrow .$$

(111) $\Rightarrow$

$$\frac{\mathbb{E}(r)}{r^\beta} \le \frac{\mathbb{E}(R)}{R^\beta} \Leftrightarrow$$

(112) $$\mathbb{E}(r) \le \left(\frac{\mathbb{E}(R)}{R^\beta}\right) r^\beta .$$

<u>Παρατήρηση</u>

Βλέπουμε ότι

$$\left(\frac{\mathbb{E}(r)}{r^\beta}\right)' \ge 0 \Leftrightarrow \frac{\mathbb{E}'(r) r^\beta - \beta \mathbb{E}(r) r^{\beta-1}}{r^{2\beta}} \ge 0 .$$

Κατά συνέπεια κάτω και από την υπόθεση

$$\frac{u(r)}{r^m} \ge (H) \Leftrightarrow \mathbb{E}(r) \ge 0$$

προκύπτει ότι $\mathbb{E}'(r) \ge 0$, δηλαδή μονοτονία, και

πρόκειται η εκτίμηση

$$\mathbb{E}'(r) \ge \frac{\beta \mathbb{E}(r)}{r} .$$

2) $\underline{A \searrow -\min}$

$$m < \frac{m}{\eta}$$

Επιλέγουμε $\beta > 0$ και τέτοιο ώστε

$$m + \beta < \frac{m}{\eta} \qquad \left(0 < \beta < \frac{m}{\eta} - m \right)$$

Επίσης $\beta \geq 1$.

Ορίζουμε δ διά μέσου της

$$(1-\delta)\frac{m}{\eta} = m + \beta .$$

Τώρα επαναλαμβάνουμε στην (103):

$$(1-\lambda r)u - r^m \Phi \leq \eta \left(\frac{r}{m} \gamma - r^m \Psi \right)$$

$$\Rightarrow$$

$$(1-\lambda r)(u - r^m \Phi) \leq \eta \left(\frac{r}{m}\gamma - r^m \Psi \right) + \lambda r^{m+1} \Phi .$$

Πολλαπλασιάζουμε με $\dfrac{m}{\eta r}$:

$$\frac{1}{r}\frac{m}{\eta}(1-\lambda r)(u - r^m \Phi) \leq (\gamma - m r^{m-1} \Psi) + \frac{m\lambda}{\eta} \Phi r^m .$$

Εάν λοιπόν

$$\lambda r \leq \delta$$

τότε

$$\frac{m}{\eta}(1-\lambda r) \geq \frac{m}{\eta}(1-\delta) = m + \beta$$

$$\Rightarrow \frac{m+\beta}{r}\left(u-r^m\Theta\right)' \le \left(\gamma - m r^{m-1}\Theta\right) + \frac{m\lambda\Theta}{\eta} r^m$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\left(\gamma - m r^{m-1}\Theta\right) - \frac{m+\beta}{r}\left(u-r^m\Theta\right) + \frac{m\lambda\Theta}{\eta} r^m \ge 0.$$

Προσθέτουμε $u'-\gamma$:

$$\left(u' - m r^{m-1}\Theta\right) - \frac{m+\beta}{r}\left(u-r^m\Theta\right) + \frac{m\lambda\Theta}{\eta} r^m \ge u'-\gamma$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\left(u-r^m\Theta\right)' - \frac{m+\beta}{r}\left(u-r^m\Theta\right) + \frac{m\lambda\Theta}{\eta} r^m \ge u'-\gamma.$$

Θέτουμε $w = u - r^m\Theta$ οπότε έχουμε

$$w' - \frac{m+\beta}{r} w + \frac{m\lambda\Theta}{\eta} r^m \ge u'-\gamma.$$

Πολλαπλασιάζουμε με $\frac{1}{r^{m+\beta}}$:

$$\left(\frac{w}{r^{m+\beta}}\right)' + \frac{m\lambda\Theta}{\eta} r^{-\beta} \ge \frac{u'-\gamma}{r^{m+\beta}} \quad (\ge 0)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\left(\frac{w}{r^{m+\beta}} + \frac{m\lambda\Theta}{\eta(\lambda-\beta)} r^{\lambda-\beta}\right)' \ge \frac{u'-\gamma}{r^{m+\beta}} \ge 0$$

$$\left(\mathbb{F} = \frac{u}{r^m} - \Theta = \frac{w}{r^m} \right)$$

$\Longleftrightarrow$

$$\left(\frac{\mathbb{F}(r) + m\lambda\Theta r^{\frac{\lambda}{n(1-\beta)}}}{r^\beta} \right)' \geq \frac{u' - \gamma}{r^{m+\beta}} \geq 0.$$

$\Longleftrightarrow$

$$(113) \quad \left(\frac{\mathbb{F}(r) + \mathcal{C}\lambda r}{r^\beta} \right)' \geq \frac{u' - \gamma}{r^{m+\beta}} \geq 0,$$

$$\mathcal{C} = m\Theta \frac{\lambda}{n(\lambda - \beta)}.$$

<u>Παρατηρηση</u>

Η (113) εχει ενδιαφερον μονον εαν $\mathbb{F}(r) + \mathcal{C}\lambda r \geq 0$ (διοτι τοτε παρεχει θετικο κατω φραγμα για το $(\mathbb{F}(r) + \mathcal{C}\lambda r)'$)

Περι αυτων παρατηρουμε οτι η ιδιοτητα μονοτονιας (λ-min) δινει

$$e^{\lambda m r} \frac{u(r)}{r^m} \geq \lim_{r \to 0} e^{\lambda m r} \frac{u}{r^m} \geq \Theta$$

$\Longrightarrow$

$$\frac{u(r)}{r^m} \geq e^{-\lambda m r} \Theta$$

$\Rightarrow$

$$\frac{u(r)}{r^m} - \textcircled{H} \geq \left(e^{-\lambda m r} - 1\right) \textcircled{H} \geq -\lambda m r \textcircled{H}$$

για $\lambda r \leq \delta$.

Κατά συνέπεια στη (113) για $\lambda r \leq \delta$ μπορούμε να υποστηρίξουμε ότι $\mathbb{E}(r) + C\lambda r \geq 0$.

$\square$

Οριακοποιώντας τα προηγούμενα καταλήγουμε

<u>Θεώρημα</u>

Έστω ότι ισχύει

$$\circledast \quad (1-\lambda r)u \leq \eta\left(\frac{r}{m}\gamma - r^m \textcircled{H}\right) + r^m \textcircled{H} \qquad (114)$$

για $r \in [\rho, R]$, $\lambda R \leq \delta$, $\eta < 1$.

Τότε

(115)

① $\dfrac{\mathbb{E}(r) + C\lambda r}{r^\beta}$ μη αρνητική, αύξουσα, $r \in [\rho, R]$

③ $$R^\beta \int_\rho^R \frac{u' - \gamma}{r^{m+\beta}}\, dr \leq \mathbb{E}(R) + C\lambda R.$$

(αρκεί στο 0 ταχύς),

Απόδειξη

① Προφανώς από την (113)

$\Rightarrow$

$$\frac{E(r)+C\lambda r}{r^\beta} \le \frac{E(R)+C\lambda R}{R^\beta} \Rightarrow \left(E(r)+C\lambda r\right) \le \left(\frac{r}{R}\right)^\beta \left(E(R)+C\lambda R\right)$$

Ολοκληρώνοντας $\int_\rho^R$ την (113):

$$\int_\rho^R \frac{u'-\gamma}{r^{m+\beta}}\,dr \le \int_0^R \left(\frac{E(r)+C\lambda r}{r^\beta}\right)' dr$$

$$\le \frac{E(R)+C\lambda R}{R^\beta}$$

ΟΕΔ.

Άσκηση 21

$$u' = \gamma \iff A \text{ κενός.}$$

Παρατήρηση

Η εντύπωση ② εξαρτάται την ασυμμετρία από τον κενό – πόσο "κυκλικός" μορφής πλην η εξίσωσης τοπικά. Παρατηρούμε ότι η ποσότητα

$$\int_\rho^R \frac{u'-\gamma}{r^{m+\beta}}\,dr$$

είναι ανεξάρτητη από αρχικές συνθήκες.

□

Θα δείξουμε ότι η ελαχιστη μαζα ικανοποιεται
την μοναδικοτητα του εφαπτομενου κονου.
Ανοιγουμε μια παρενθεση.

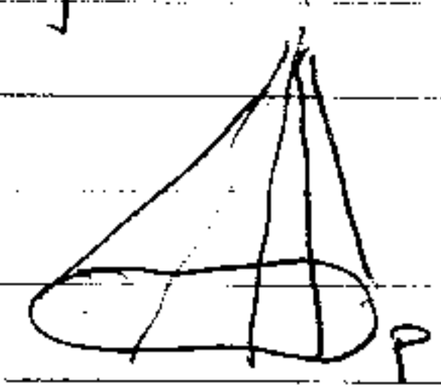
Λημμα

Εστω Γ cycle ($(m-1)$-διαστασης) που περιεχεται στην $B(0,1)$ (δηλαδη $\partial\Gamma = 0$). Τοτε ισχυει

$$L(\Gamma) = W(\Gamma).$$

Αποδειξη

1. $$W(\Gamma) = \inf_X \{\mathbb{M}(\Gamma - \partial X) + \mathbb{M}(X)\} \qquad (6.36)$$
$$\leq \inf_{\partial X = \Gamma} \{\mathbb{M}(X)\}$$
$$= L(\Gamma).$$



2. $$W(\Gamma) = \inf\{\mathbb{M}(P) + \mathbb{M}(Q) \mid \Gamma = P + \partial Q\}$$

$$\Gamma = P + \partial Q = \partial(\text{cone } P) + \partial Q$$
$$= \partial(\text{cone } P + Q)$$

$$L(\Gamma) = \mathbb{M}(\text{cone } P + Q) \leq \frac{1}{m}\mathbb{M}(P) + \mathbb{M}(Q)$$
(spt $P \subset B(0,1)$)

$\leq \mathbb{M}(P) + \mathbb{M}(Q)$

$\therefore$

$L(\Gamma) \leq W(\Gamma)$.

ΟΕΔ.

Δόγμα 22

Εστω $\partial\Gamma = 0$, $\operatorname{spt} \subset B_R(0)$, τότε

$$L(\Gamma) \leq \frac{R}{\alpha_{m+1}} W(\Gamma).$$

$\Rightarrow$ από Δόγμα 22

Πόρισμα

① $L(\Gamma) < \infty$ εάν $\partial\Gamma = 0$ και spt Γ συμπαγές

② $W(\Gamma_i - \Gamma) \to 0 \Rightarrow L(\Gamma_i - \Gamma) \to 0$

$\therefore \lim_{i \to \infty} L(\Gamma_i) = L(\Gamma)$

Θεώρημα

Εστω A_i 0-min (ομογενείς),

$W(A_i - A) \to 0$.

$\Rightarrow$

A 0-min και

$\mathbb{M}(A) = \lim \mathbb{M}(A_i)$.

Απόδειξη

$\mathbb{M}(A) \leq \underline{\lim}\ \mathbb{M}(A_i)$ (αφού κάτω ημισυνεχεία)

$= \underline{\lim}\ \perp(\partial A_i)$ (Θεώρημα σ 99)

$= \perp(\partial A)$ (Πρόταση)

$\therefore$

$\mathbb{M}(A) \leq \perp(\partial A)$

$\mathbb{M}(A) \geq \perp(\partial A)$ Τετριμμένα

$\therefore \perp(\partial A) \leq \mathbb{M}(A) \leq \underline{\lim}\ \mathbb{M}(A_i) \leq \perp(\partial A)$

Επίσης

$\mathbb{M}(A) = \perp(\partial A)$

δηλαδή A 0-min,

ΟΕΔ.

§15. Η μοναδικότητα του εξαπτόμενου Κωνα

Ο αμέσως αντικειμενικός σκοπός είναι να δείξουμε ότι η εκτίμηση (*), (114), έχει σαν ανάγκη την μοναδικότητα του εξαπτόμενου κωνα. Αυτό είναι συνδεμένο με την ομαλότητα.

$$A \perp B_R - A \perp B_\rho = A \perp (B_R \setminus B_\rho) \quad \text{(Δακτύλιος)}$$

$$\partial(A \perp B_R) - \partial(A \perp B_\rho) = \partial(A \perp (B_R \setminus B_\rho))$$

Ορισμός

Έστω $\operatorname{spt}(\partial A)$ εκτός B_R, και $r \le R$.

$$A_r := \mathcal{D}_{1/r}(A \perp B_r)$$

$$\Rightarrow (\partial A)_r = \partial(A_r) = \mathcal{D}_{1/r}(\partial(A \perp B_r))$$

Θεώρημα

$$(116) \quad \left(W(\partial A_R - \partial A_\rho)\right)^2 \le C\left(R^\beta \int_\rho^R \frac{u' - \gamma}{r^{m+\beta}}\, dr\right),$$

C εξαρτάται από το $\sup_{\rho \le r \le R} \frac{u(r)}{r^m}$. Υπόθεση: A flat αμελίδα.

Παρατήρηση

Εάν A είναι γ-min και ισχύει εντός η (*) τότε ισχύει η εκτίμηση (115) (2).

Πρόκειται λοιπόν από την (116) ότι

$$\left(W(\partial A_r - \partial A_\rho)\right)^2 \leq c\,(\mathbb{E}(r) + c\,r)$$

$(0<\rho<r)$ $\qquad \downarrow$ (οταν $r \to 0$)

0

$\therefore$

$$\sup_{0<\rho<r} W(\partial A_r - \partial A_\rho) \to 0$$

$\therefore$ ∂A_r εχει ορια οταν $r \to 0$.

Απο εδω απορρεει η μοναδικοτητα των εφαπτομενων κωνων

<u>Αποδειξη του (Η) θεωρηματος</u>

1. Εστω π η αντιστοιχη προβολη στον μοναδιαια σφαιρα,

(117) $$\pi(x) = \frac{x}{|x|}.$$

Παρατηρησε οτι

(118) $$\partial A_R - \partial A_\rho = \pi\left(\partial(A \llcorner B_R \setminus B_\rho)\right)$$
$$= \partial \pi\left(A \llcorner (B_R \setminus B_\rho)\right)$$

$$\mathbb{W}(\partial A_R - \partial A_\rho) = \mathbb{W}(\partial(A_R - A_\rho))$$
$$\leq \mathbb{W}(A_R - A_\rho)$$
$$\leq \mathbb{M}(A_R - A_\rho)$$
$$= \mathbb{M}(\pi(A \perp B_R \setminus B_\rho))$$

2. Έστω A m-πολυεδρικη αμιγής.
Πρώτα δείχνουμε την περίπτωση που το A περιέχεται σε ένα κελί. Τότε ισχύει

$$(119) \qquad \mathbb{M}(\pi A) = \int_A \frac{\sin\Theta(x)}{|x|^m}\, d\mu_A(x),$$

όπου

$\Theta(x)$ = η γωνία μεταξύ του $\frac{x}{|x|}$ και του εξωτερικού εσωτερικού στο x στην A.

Για την γενική περίπτωση μιας πολυεδρικής αμιγούς

$$(120) \qquad \mathbb{M}(\pi A) \leq \int_A \frac{\sin\Theta(x)}{|x|^m}\, d\mu_A(x)$$

(ενδεχόμενη ανισότητα λόγω διμορφίτικων πολυπλοκοτήτων)

$$= \int_A \frac{\sin\Theta(x)}{|x|^{\frac{m+\beta}{2}}} \frac{1}{|x|^{\frac{m-\beta}{2}}}\, d\mu_A(x)$$

$$\leq \left(\int_A \frac{\sin^2\theta(x)}{|x|^{m+\beta}} \, d\mu_A(x) \right)^{1/2} \left(\int_A \frac{1}{|x|^{m-\beta}} \, d\mu_A(x) \right)^{1/2}$$

$$\left(\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta \leq 2(1-\cos\theta) \right).$$

$$\leq \sqrt{2} \left(\int_A \frac{1-\cos\theta}{|x|^{m+\beta}} \, d\mu_A(x) \right)^{1/2} \left(\int_A \frac{1}{|x|^{m-\beta}} \, d\mu_A(x) \right)^{1/2}$$

$$= \sqrt{2} \left(\int_A \frac{d\mu_A(x)}{|x|^{m+\beta}} - \int_A \frac{\cos\theta(x)}{|x|^{m+\beta}} \, d\mu_A(x) \right)^{1/2}$$

$$\left(\int_A |x|^{\beta-m} \, d\mu_A(x) \right)^{1/2}.$$

<u>Ειδική Περίπτωση του τύπου του συνεφαπτόμενου</u>

Υπενθυμίζουμε τον Άξιωμα 18

$$\frac{d}{dr} M(A \perp B_r) \geq M(A \perp \partial B_r) \implies$$

$$M(A) \geq \int M(A \perp \partial B_r) \, dr = \int \gamma(r) \, dr$$

Ισχύει επίσης η εξής παρατήρηση:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f \geq 0$$

$$\int f(|x|)\, d\mu_A(x) \geq \int f(r)\, \gamma(r)\, dr$$

($f = 1$ δίνει την παραπάνω σχέση).

Μάλιστα ισχύει

<u>Άσκηση 23</u>

$$\int f(r)\, \gamma(r)\, dr = \int f(|x|) \cos\theta(x)\, d\mu_A(x).$$

Κατά συνέπεια έχουμε για μέσω της (120)

$$(121) \quad \mathbb{M}(\pi A) \leq \sqrt{2} \left(\int_A \frac{d\mu_A(x)}{|x|^{m+\beta}} - \int \frac{\gamma(r)}{r^{m+\beta}} \right)^{1/2} \left(\int |x|^{\beta - m}\, d\mu_A(x) \right)^{1/2}$$

<u>Απ.</u>

Οι προηγούμενες σχέσεις αποδείκνυνται κατ' αρχήν για πολυέδρικες αγωνίες. Ισχύουν, όμως και για ανοίκτες flat αγωνίες μέσω της προσεγγιστικής διαδικασίας:

$\exists$ A_i, πολυεδρικά,

$$A_i \longrightarrow A \qquad \text{(ταχέως συγκλίνουσα (βλ. §6))}$$

$$\mathbb{M}(A_i) \longrightarrow \mathbb{M}(A)$$

$$\Rightarrow \quad A_i \cap \partial B_r \longrightarrow A \cap \partial B_r \qquad \text{a.e. } r$$

$$\gamma(r) = \mathbb{M}(A \cap \partial B_i) \leq \underline{\lim}\, \gamma_i(r) = \underline{\lim}\, \mathbb{M}(A_i \cap \partial B_r)$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{\gamma(r)}{r^{m+\beta}}\, dr \leq \underline{\lim} \int \frac{\gamma_i(r)}{r^{m+\beta}}\, dr .$$

$\square$

Από την (121) προκύπτει ότι

(122) $\mathbb{M}(\pi(A \llcorner (B_R \setminus B_\rho)))$

$$\leq \sqrt{2} \left(\int_{B_R \setminus B_r} \frac{d\mu_A}{|x|^{m+\beta}} \int_\rho^R \frac{\gamma}{r^{m+\beta}}\, dr \right)^{1/2} \left(\int_{B_R \setminus B_\rho} |x|^{\beta-m}\, d\mu_A \right)^{1/2}$$

<u>Παρατήρηση</u>

$$\int f(|x|)\, d\mu_A = \int f(r)\, u'(r)\, dr \qquad \text{(με την βοήθεια τον κατανομών)}$$

Εφαρμογές των Παρατηρήσεων παραγράφε από την (122)

(123) $M(\pi(A \perp (B_R \setminus B_\rho)))$

$$\leq \sqrt{2}\left(\int_\rho^R \frac{u'-\gamma}{r^{m+\beta}}\,dr\right)^{1/2}\left(\int_\rho^R r^{\beta-m}u'(r)\,dr\right)^{1/2}.$$

<u>Παρατηρήσεις</u> : Μέχρι στιγμής δεν εχάρε καμία χρήση του ότι η A είναι λ-σωστή.

3η

(124) $$\int_\rho^R r^{\beta-m}u'(r)\,dr = r^{\beta-m}u(r)\Big|_\rho^R - (\beta-m)\int_\rho^R r^{\beta-m-1}u(r)\,dr$$

$$\leq \frac{R^\beta u(R)}{R^m} + (m-\beta)\int_\rho^R r^{\beta-1}\frac{u(r)}{r^m}\,dr.$$

$$\Delta := \sup_{\rho\leq r\leq R}\frac{u(r)}{r^m}$$

$$\leq \Delta\left(R^\beta + (m-\beta)\int_\rho^R r^{\beta-1}\,dr\right)$$

$$\leq \Delta\left(R^\beta + \frac{m-\beta}{\beta}R^\beta\right) = \Delta R^\beta\frac{m}{\beta}.$$

(123), (124) $\Rightarrow$

$$(125)\quad \mathbb{M}\left(\pi\left(A \perp (B_\rho \setminus B_\rho)\right)\right) \leq \sqrt{\frac{2m}{\beta}\Delta}\left(R^\beta \int \frac{u'-\gamma}{r^{m+\beta}}\,dr\right)^{1/2}$$

Η απόδειξη της (116) προκύπτει από την (118), (125)

ΟΕΔ.

§ 16 Ο Κωνος του Simons

Η πληρεστερη περιγραφης ειναι ανεξαρτητη και κανει χρηση μονο των §§ 1, και 3.

Θεωρειστε τον κωνο

(126) $$C = \{ x \in \mathbb{R}^8 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2 \},$$

μια 7-διαστατη επιφανεια στον $\mathbb{R}^8$. Πρωτον δα δειξαμε οτι η μεση καμπυλοτητα του $M := C \setminus \{0\}$ ειναι μηδεν.

Θετοντας
$$\phi(x_1, \dots, x_8) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - (x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2).$$
Εχουμε

$$\nu = \frac{D\phi}{|D\phi|} = \frac{1}{|x|}(x_1, x_2, x_3, x_4, -x_5, -x_6, -x_7, -x_8)$$

και

(127) $$(n-1)H = \operatorname{div}\left(\frac{D\phi}{|D\phi|}\right), \text{ για } x \in M, \ n = 8.$$

$$= \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{x_i}{|x|}\right) - \sum_{i=5}^{8} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{x_i}{|x|}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{4} \frac{|x|^2 - x_i^2}{|x|^3} - \sum_{i=5}^{8} \frac{|x|^2 - x_i^2}{|x|^3}$$

$$= 0, \text{ για } x \in M.$$

Άσκηση 24

Δείξτε ότι εάν B η 2η θεμελιώδης μορφή του M τότε ισχύει

(128) $$|B|^2 = \frac{6}{|x|^2}, \quad x \in M$$

Σημ: $$B = D\left(\frac{D\phi}{|D\phi|}\right)\Big|_{T_xM}$$

Υπενθυμίζουμε τον τύπο της 2ης μεταβολής της Περιμέτρου (16), §3:

(129) $$\frac{d^2}{dt^2} H^n(M_t)\Big|_{t=0} = \int_M \left(|\nabla^M \zeta|^2 - \zeta^2 |B|^2\right) dH^{n-1},$$

$\forall$ $X = \zeta \nu$, $\zeta = \zeta(x)$ ορίζεται στο M με συμπαγή φορέα.

Κάτω συνθήκες ελαχιστοποίησης στο (σταθερό σύνορο) M έχουμε ότι εάν $\forall$ $\zeta \in C_c^1(M)$

(130) $$\int_M \left(|\nabla^M \zeta|^2 - \zeta^2 |B|^2\right) dH^n \geq 0.$$

Πρόταση

Ο κύκλος M είναι ελαχιστικός.

Απόδειξη

Κατ'αρχήν υπενθυμίζουμε ότι η σύνδεση $H=0$ είναι ισοδύναμη με το ότι

$$(131) \qquad \int_M \operatorname{div}_M X \, dH^n = 0 ,$$

$\forall X \in C^1$ με αντίστοιχη φορέα (βλ. (12))

(M σταθερό σύνορο για αναφορικά τις περιμέτρου)

Επιλέγουμε

$$(132) \quad X(x) = \frac{\zeta^2}{r^2} x \quad , \zeta \in C_c^\infty(M) \text{, ανάλογο, } r=|x|$$

Έχουμε όπως στην Άσκηση 16 (σ. 95)

$$(133) \quad \operatorname{div}_M \left(\frac{x}{r^2} \zeta^2 \right) = \frac{n-2}{r^2} \zeta^2 + \frac{x}{r^2} \cdot \nabla^M \zeta^2$$

Αντικατάσταση στην (131) δίνει

Σημ.: $\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{x_i}{r^2} \right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{r^2 - x_i (2x_i)}{r^4} = \frac{n-2}{r^2}$

$$(134)\quad (n-2)\int_M \frac{\xi^2}{r^2}\,dH^n = -2\int_M \xi r^{-2} x\cdot \nabla^M \xi\,dH^n$$

$$\leq 2\left(\int_M \frac{\xi^2}{r^4}|x|^2\,dH^n\right)^{1/2}\left(\int_M |\nabla^M \xi|^2\,dH^n\right)^{1/2}$$

$\Longrightarrow$

$$(135)\quad \frac{(n-2)^2}{4}\int_M \left(\frac{\xi^2}{r^2}\right)dH^n \leq \int_M |\nabla^M \xi|^2\,dH^n.$$

Αρκεί λοιπόν για εκτίμηση, από την (130), να εξασφαλίσουμε

$$\int_M \xi^2 |B|^2\,dH^{n-1} \leq \frac{(n-2)^2}{4}\int_M \frac{\xi^2}{r^2}\,dH^n,$$

και μέσω της (128)

$$(136)\quad 6\int_M \frac{\xi^2}{r^2}\,dH^{n-1} \leq \frac{(n-2)^2}{4}\int_M \frac{\xi^2}{r^2}\,dH^n,$$

που ισχύει για $n=7$.

ΟΕΔ.

§17 Η- Επιπεριμετρικοί Κώνοι

Ο αναγνώστης πρέπει να έχει υπ'όψιν του το Λήμμα στη σ. 131.

Γ cycle $(m-1)$-διάστασης, $\Gamma \subset B(0,1)$

Τότε ισχύει

(137) $$L(\Gamma) = W(\Gamma).$$

<u>Πόρισμα</u>

Έστω C κώνος που εξαχιστοποιεί ως προς το το cycle

$$\Gamma_c := \partial(C \llcorner B(0,1))$$

Γ αυθαίρετος cycle εντός της σφαίρας $\partial B(0,1)$

Τότε ισχύει

(138) $$L(\Gamma) \leq L(\Gamma_c) + L(\Gamma - \Gamma_c)$$

$$\leq \mathbb{M}(C \llcorner B(0,1)) + L(\Gamma - \Gamma_c)$$

$$\overset{(137)}{=} \mathbb{M}(C \llcorner B(0,1)) + W(\Gamma - \Gamma_c).$$

(Η) → ω_m (Η)

Η πυκνότητα του κώνου $\Theta_c = \mathbb{M}(C \llcorner B(0,1))$ (στο 0)

(δηλ. $\dfrac{\mathbb{M}(C \llcorner B(0,r))}{r^m} = \Theta_c$, σύνολο του κώνου)

$\therefore$

(139) $$L(\Gamma) - \Theta_c \leq W(\Gamma - \Gamma_c).$$

Ορισμός (η-επιπεριμετρικός κύκλος)

Έστω G <u>εξαιρετικός κύκλος</u>, $\eta<1$.

$$\Gamma_c = \partial(G \llcorner B(0,1)) \qquad \text{(υπόθεσαμε κορυφή στο } x=0\text{)}$$

$$\theta_c = \mathbb{M}(G \llcorner B(0,1))$$

Ο G λέγεται <u>η-επιπεριμετρικός</u> εάν

<u>$\exists\ \varepsilon>0$</u> τ.ω.

$\forall \Gamma$ cycle εντός της $\partial B(0,1)$ τ.ω. $W(\Gamma-\Gamma_c)<\varepsilon \implies$

(140) $$L(\Gamma)-\theta_c \le \eta\,(\mathbb{M}(\operatorname{cone}\Gamma)-\theta_c)$$

<u>Παρατηρήσεις</u>

α) Η (140) ισχύει για $\eta=1$, τετριμμένα.

β) Η (140) ισχύει τετριμμένα εάν οποιαδήποτε πλευρά είναι ≤ 0.

Απόδειξη:

Έστω ότι το 2ο μέρος είναι αρνητικό. Τότε

$$L(\Gamma)-\theta_c \le (\mathbb{M}(\operatorname{cone}\Gamma)-\theta_c)$$

$$\le \eta\,(\mathbb{M}(\operatorname{cone}\Gamma)-\theta_c).$$

Εάν το 1ο μέρος είναι αρνητικό τότε πρόταση ισχύει.

Θεώρημα

Έστω G 1-διάστατος εξελικτικός κύκλος. Τότε ο G είναι η-επιπεριμετρικός.

Απόδειξη

• Ξεκινάμε με κάποια σχέση γενικά
Έστω K κύκλος. Θέτουμε

$$u(r) = \mathbb{M}(K \perp B(0,r)), \quad \gamma(r) = \mathbb{M}(\partial(K \perp B(0,r)))$$

Γνωρίζουμε ότι ο κύκλος χαρακτηρίζεται από την σχέση

(141) $$u'(r) = \gamma(r)$$

Παρατηρούμε ότι

(142) $$\mathbb{M}(K \perp B(0,r)) = \mathbb{M}(rK \perp B(0,1))$$
$$= \mathbb{M}(K \perp B(0,1))\, r^m$$

(141), (142) $\Rightarrow$

$$m r^{m-1}\, \mathbb{M}(K \perp B(0,1)) = \mathbb{M}(\partial(K \perp B(0,1)))$$

$\Rightarrow$

(143) $$m\, \mathbb{M}(K \perp B(0,1)) = \mathbb{M}(\partial(K \perp B(0,1)))$$

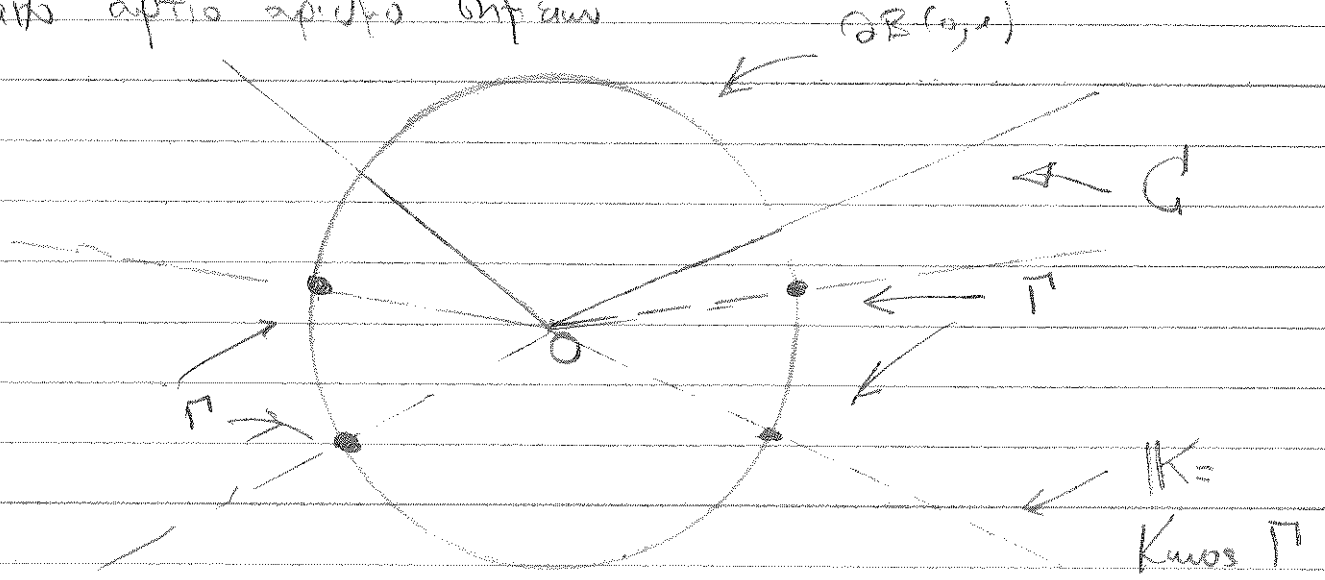
2. Θέτουμε

(144) $$S = \left\{ \sum_{i=1}^{k} |g_i| : k \in \mathbb{N},\ g_i \in G \right\}$$

Υπενθυμίζουμε ότι η G έχει τις ιδιότητες

$$|g| \geq 1 \text{ για } g \neq 0 \quad , \quad \{g : |g| \leq R\} \text{ πεπερασμένες } \forall R > 0$$

Οι cycles εντός της περιφέρειας $\partial B(0,1)$ απαρίθμησαν, από άρτιο αριθμό σημείων



Δοθέντος Γ, cycle επί της $\partial B(0;1)$ υποθέτουμε ότι και οι δύο ακμές της (140) είναι θετικές (βλ Παρατήρηση b) σ.147):

(145) $\quad \mathbb{L}(\Gamma) > \theta_c, \quad \mathbb{M}(\text{cone}\,\Gamma) > \theta_c$

$$\Gamma = \partial(K \perp B(0,1)) \quad , \quad K = \text{Κυκλος } \Gamma$$

(143) $\Longrightarrow$

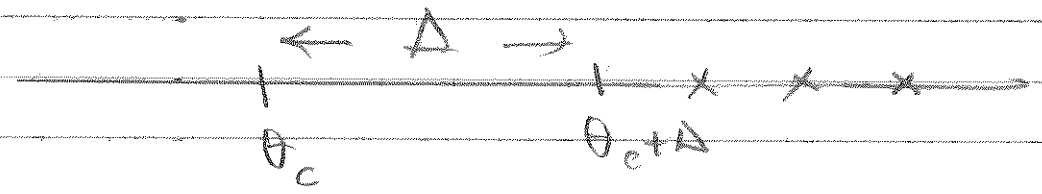
(146) $\quad \mathbb{M}(\text{Cone}\,\Gamma) = \mathbb{M}(\Gamma) \in S$

<u>Ορισμός</u> (Το Διάκενο)

$$\Delta := \text{Διάκενο} = \min\{s - \theta_c \mid s \in S, s > \theta_c\} > 0$$

Κατά συνέπεια

(147) $\mathbb{M}(\mathrm{Cone}\,\Gamma) - \theta_c \geq \Delta$



Τέλος επιλέγουμε $\varepsilon > 0$ ως εξής:

(148) $\varepsilon = \eta\,\Delta$

Έχουμε

$$L(\Gamma) - \theta_c \overset{(139)}{\leq} W(\Gamma - \Gamma_c)$$

$$< \varepsilon$$

$$\overset{(148)}{=} \eta\,\Delta$$

$$\overset{(147)}{\leq} \eta\,(\mathbb{M}(\mathrm{Cone}\,\Gamma) - \theta_c).$$

ΟΕΔ

#

<u>Λήμμα 24</u> (βλ §15, C116) και Παρατήρηση)

Έστω C η-επιπεριμετρικός κύκλος με κορυφή στο x.

Έστω ότι $\exists\, \varepsilon > 0$ με την εξής ιδιότητα

υποθέσεις
$$\begin{cases} A \ \lambda\text{-min} \\ \Phi(A,x) \geq \Theta_c \\ K < \varepsilon \quad \text{όπου} \\ K = W(\partial A_{x,R} - \Gamma_c) + \lambda R \\ A_{x,R} = \mathcal{D}_{1/\Gamma}\left(\tau_{-x}(A \llcorner B(x,R))\right) \end{cases}$$

(a-priori $\Phi(A,x) \geq \Theta_c$)

Τότε ισχύουν τα εξής

① $\Phi(A,x) = \Theta_c$.

② A έχει μιαδικό εφαπτομενο κυνο στο x.

③ Για $\rho \leq r \leq R$
$$W(\partial A_{x,R} - \partial A_{x,r}) \leq \left(\frac{r}{R}\right)^{\beta/2} K^{1/2}.$$

Ειδικά
$$W(\partial A_{x,r} - \partial A_{x,R}) \leq C K^{1/2}.$$

$\square$

§18 Το Βασικό Θεώρημα Ομαλότητας

Θεώρημα

Θεωρούμε το πρόβλημα ελαχιστοποίησης

(149) $\inf\{\Theta_{\tilde{C}} : \tilde{C}$ ελαχιστικός, m-κύκλος$\}$.

Εάν, το infimum γίνεται min για κάποιο κύκλο C

$\Longleftrightarrow$

C = m-επίπεδο με πολλαπλότητα $\frac{m}{2}$, $|g|=1$

Σημ = Εάν G είναι η ομαλή οριακή της ακολουθίας, τότε ο C είναι ένα (ομαλό) επίπεδο.

Απόδειξη

1. $T_{\tilde{C}} = \partial(\tilde{C} \llcorner B(0,1))$, $\Theta_{\tilde{C}} = \mathbb{M}(\tilde{C} \llcorner B(0,1))$

Υπενθυμίζουμε ότι για $\tilde{C}$ κύκλο έχουμε από την (143)

(150) $m\,\mathbb{M}(\tilde{C} \llcorner B(0,1)) = \mathbb{M}(\partial(\tilde{C} \llcorner B(0,1)))$.

Θεωρούμε μια ελαχιστοποιούσα ακολουθία

(151) $\mathbb{M}(\tilde{C}_n \llcorner B(0,1)) \longrightarrow \inf$.

Από τη (150), (151) προκύπτει συμπέρασμα της ακολουθίας $\{\tilde{C}_n\}$ (βλ. Θ2, §8). Κατά συνέπεια το inf στη (149) είναι = minimum και παίρνεται σε

Κάποια Αμοιβδα A

Έστω λοιπόν ότι η A είναι κύκλος, C.

2. Για $x \in \operatorname{spt} C$ ισχύει

(142) $$\Theta(C,x) = \Theta(C,0) = \Theta_C .$$

Πράγματι από το Θεώρημα στην §13, η μεγιστη πυκνότητα του κύκλου είναι στο $x=0$,

$$\Theta(C,0) \geq \Theta(C,x) .$$

Εάν τώρα είχαμε αστήριη ανισότητα, δηλαδή

$$\Theta(C,0) > \Theta(C,x)$$

Τότε ο εφαπτόμενος κύκλος του C στο x, $\operatorname{Tan}(C,x)$, ($\Theta(\operatorname{Tan}(C,x)) = \Theta(C,x)$, βλ. Θεωρ. 5, §12)

Θα είχε μικρότερη πυκνότητα από τον C', το οποίο συμφωνεί με το ότι ο C' έχει την μικρότερη δυνατή πυκνότητα. Άρα ισχύει η (142),

$$\Theta(C', x) = \Theta(C, 0) \quad \forall\, x \in \operatorname{spt} C',$$

δηλαδή

$$\operatorname{spt} C' = \{ x : \Theta(C, x) = \Theta(C, 0) \}$$

$$= \text{υπόχωρος. (ουσιώδης διάσταση)}$$

Επεται ότι C' είναι m-επίπεδο (βλ. Θεώρημα δομής ηλεκτρικών κυμάτων, §13).

3. Το αντίστροφο ισχύει ($\Leftarrow$) διότι το m-επίπεδο πολλαπλότητος q, $|q|=1$, έχει την μικρότερη δυνατή πυκνότητα.

ΟΕΔ

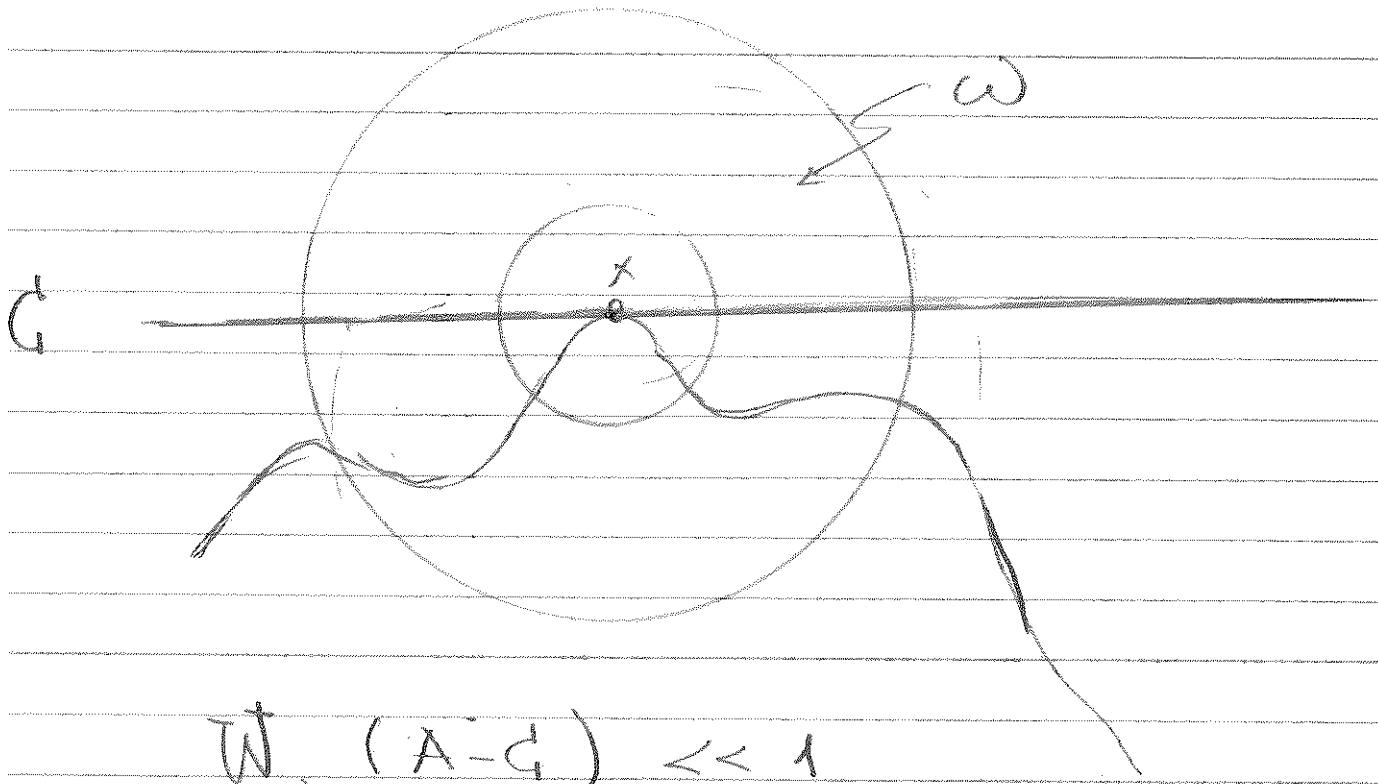
<u>Θεώρημα I</u> (Το Θεώρημα Φραγμότητος)

Εστω ότι ο εφαπτόμενος κώνος C' είναι m-επίπεδο πολλαπλότητος q, $\|q\|=1$.

Τότε ο C' είναι η-επιπεριμετρικός.

<u>Σημ</u>: Το Θεώρημα θα αποδειχθεί αργότερα, επειδή ως προς την διάσταση m. Από εδώ αποορρέουν τα βασικά θεωρήματα φραγμότητος: Εάν η A έχει εφαπτόμενο κώνο C' στο σημείο x που είναι m-επίπεδο πολλαπλότητος 1, τότε σε ένα μικρότερο σύνολο του Ω, ∂A εκτός Ω, το $\operatorname{spt} A$ είναι C^1 γραμμία ως προς το C'. Τονίζουμε ότι το Θεώρημα

εχει ενδιαφερον ακομη και εαν η A ειναι C^∞, διοτι απουσιαζει τοπολογικη πολυπλοκοτητα (χερωγια, κ.λ.π.)



$$W_\omega(A-G) \ll 1$$

$\Longrightarrow$

A γραφημα C^1

<u>Θεωρημα</u> (Σχεδον κυριο Θεωρημα)

G οπως στο Θεωρημα I, δυναδικη m-επιπεδο, $|g|=1$.

<u>Εστω</u>

A_i λ-min

και

$$(\partial A_i) \llcorner \omega = 0, \quad W_\omega(A_i - G) \to 0$$

Έστω επίσης $x_i \in (\operatorname{spt} A_i) \cap$ (κάποιο συμπαγές υποσ. του ω).
Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

(1) $\operatorname{dist}(x_i, \operatorname{spt} C) \longrightarrow 0$, $i \to \infty$.

(2) Για i αρκετά μεγάλο, η A_i έχει μηδενικό εφαπτομενικό κώνο στο x_i, που είναι επιπέδο πολλαπλότητος g, $|g| = 1$.

(3) Εάν $r_i \longrightarrow 0$ τότε

$$A_{x_i, r_i} \left(= \mathcal{D}_{1/r_i} \left(\tau_{x_i} A_i \llcorner B(x_i, r_i) \right) \right)$$

$$\downarrow (i \to \infty)$$

$$C \cap B(0,1) \qquad (\text{διάστατες σφαίρες}).$$

Απόδειξη

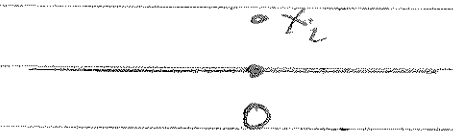
(1) Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 4, §12, με $A = C$, που μας δίνει

$$\Theta(C, x) \geq \limsup_{i \to \infty} \Theta(A_i, x_i) \geq \frac{c_m}{\omega_m},$$

όπου $x = \lim x_i'$ ($\{x_i'\}$ υπακολουθία της $\{x_i\}$)

(2) Χωρίς βλάβη της γενικότητος υποθέτουμε ότι $x = 0$.

a) Πρωτα θα δείξουμε οτι μπορουμε να υποθεσουμε οτι $x_i = 0$.



Εχουμε

$$(143) \quad W_\omega(A_i - \tau_{x_i} C) \leq W_\omega(A_i - C) + W_\omega(C - \tau_{x_i} C)$$

Εχουμε οτι $W_\omega(A_i - C) \longrightarrow 0$ εξ υποθεσεως και οτι $W_\omega(C - \tau_{x_i} C) \longrightarrow 0$ απο τον ορισμο.
Επεται οτι

$$W_\omega(A_i - \tau_{x_i} C) \longrightarrow 0$$

$\Longrightarrow$

$$W_{-x_i\omega}(\tau_{-x_i} A_i - C) \longrightarrow 0$$

(η Whitney νορμα οριζεται (βλ (20)) μεσω των IM_k, IM_{k+1}, και κατω ανωτερα ειναι αναλογωτη κατω απο μετατοπισεις).

Αντικαθιστωντας στην A_i με την $\tau_{-x_i} A_i$ μπορουμε χωρις βλαβη της γενικοτητας να υποθεσουμε οτι $x_i = 0$.

b) $W(A_i - C) \to 0$, $0 \in \operatorname{spt} A_i$

$\Longrightarrow$

$$W((A_i - C) \llcorner B(0,R)) \xrightarrow{i \to \infty} 0 \quad \text{a.a. } R.$$

(προσοχη με τον περιορισμο της Whitney νορμας

$\Longleftrightarrow$

$$W((A_i \llcorner B(0,R)) - (C \llcorner B(0,R))) \to 0, \text{ a.a. } R$$

Διαστέλλουμε με $\frac{1}{R}$:

$\Longleftrightarrow$

$$W((A_i)_{0,R} - C_1) \longrightarrow 0 \quad , C_1 = C \cap B(0,1)$$

και δια μέσου διαγωνίου επιχειρήματος εξάγοντας υπακολουθία $R_i \longrightarrow 0$ παίρνουμε

$$W(\partial(A_i)_{0,R_i} - \Gamma_c) \longrightarrow 0 \quad , \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow$

(143) $$W(\partial(A_i)_{0,R_i} - \Gamma_c) + \lambda R_i \longrightarrow 0$$

Σε αυτό το σημείο κάνουμε χρέος της Άσκησης 24.

Σκεπτόμαστε λοιπόν ότι η ακολουθία A_i έχει μηδενικό εφαπτόμενο κώνο στο $x_i = 0$, και με την εκτίμηση

(144) $$\sup_{0<r<R_i} W((\partial A_i)_r - \Gamma_c) \longrightarrow 0 .$$

Υπενθυμίζουμε ότι για να εφαρμόσουμε την Άσκηση 23 χρειαζόμαστε την υπόθεση

(145) $$\Theta(A_i, 0) \geq \Theta_c ,$$

η οποία ισχύει διότι ο C_1 έχει την ελάχιστη δυνατή πυκνότητα μεταξύ όλων των ελαχιστικών κώνων. Από το Θεώρημα 4, § 12 προκύπτει

(146) $$\Theta(A_i, 0) = \Theta_c .$$

Το μόνο που απομένει είναι να δείξουμε ότι ο εξαπτόμενος κώνος της A_i στο $x_i = 0$ είναι μη-επίπεδο πολλαπλότητας g, $|g| = 1$. Αυτό προκύπτει από το ότι το G είναι διάστατη ομάδα, οπότε η (πολλαπλότητα) g στα δεξιά πολύεται.

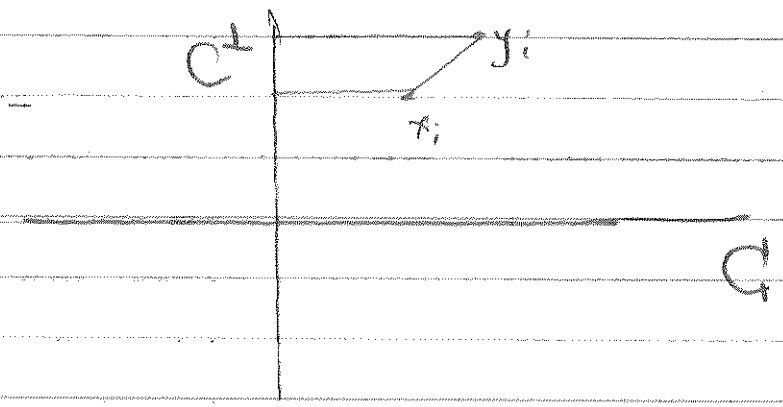
ΟΕΔ

<u>Πόρισμα</u> (Τράφυμα)

Έστω $x_i, y_i \in \operatorname{spt} A_i \cap$ (κάποιο ανοιχτό υποσύνολο του Ω), $x_i \neq y_i$.

Τότε

$$\frac{\Pi_{C^1}(x_i - y_i)}{|x_i - y_i|} \longrightarrow 0 \quad , i \to \infty$$



<u>Απόδειξη</u>

$$\underbrace{\mathcal{D}_{\frac{1}{|x_i - y_i|}}\left(T_{-x_i} A_i\right)}_{\tilde{A}_i} \longrightarrow C$$

από το Σχεδόν κυρίο Θεώρημα, σ. 155,

$$\tilde{y}_i = \frac{y_i - x_i}{|y_i - x_i|} \in \operatorname{spt} \tilde{A}_i$$

$\Longrightarrow$

$$\operatorname{dist}(\tilde{y}_i, C) \longrightarrow 0$$

$\Longrightarrow$

$$\tilde{y}_i \longrightarrow 0$$

$\Longleftrightarrow$

$$\frac{\overline{\|}_{C^\perp}(x_i - y_i)}{|x_i - y_i|} \longrightarrow 0 .$$

ΟΕΔ

<u>Πόρισμα</u> (αναδιατύπωση του προηγούμενου Πορίσματος)

Για μεγάλο i, $K \subset\subset \omega$

$(\operatorname{spt} A_i) \cap K \subset \operatorname{graph}(f_i)$

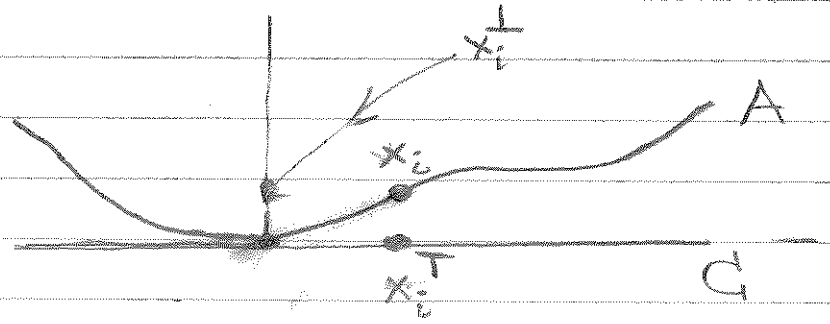
$f_i : C \to C^{\perp}$,

$f_i \to 0$ ομαλομορφα,

$\operatorname{Lip}(f_i) \to 0$.

<u>Απ</u>

Απορρέει αμέσα από το προηγούμενο Πόρισμα

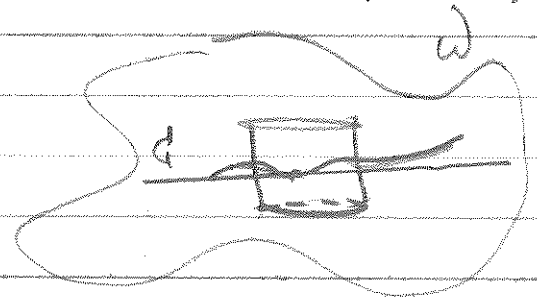


$$\frac{|x_i^{\perp}|}{|x_i|} \to 0$$

<u>Πόρισμα</u> ($\operatorname{spt} A_i$ <u>είναι</u> γράφημα, και έχει τρύπες)

Έστω

$K \equiv$ κύλινδρος



Τότε για i μεγάλο

$(\operatorname{spt} A_i) \cap K = \operatorname{graph}(f_i)$, $f_i : K \cap C \to C^{\perp}$

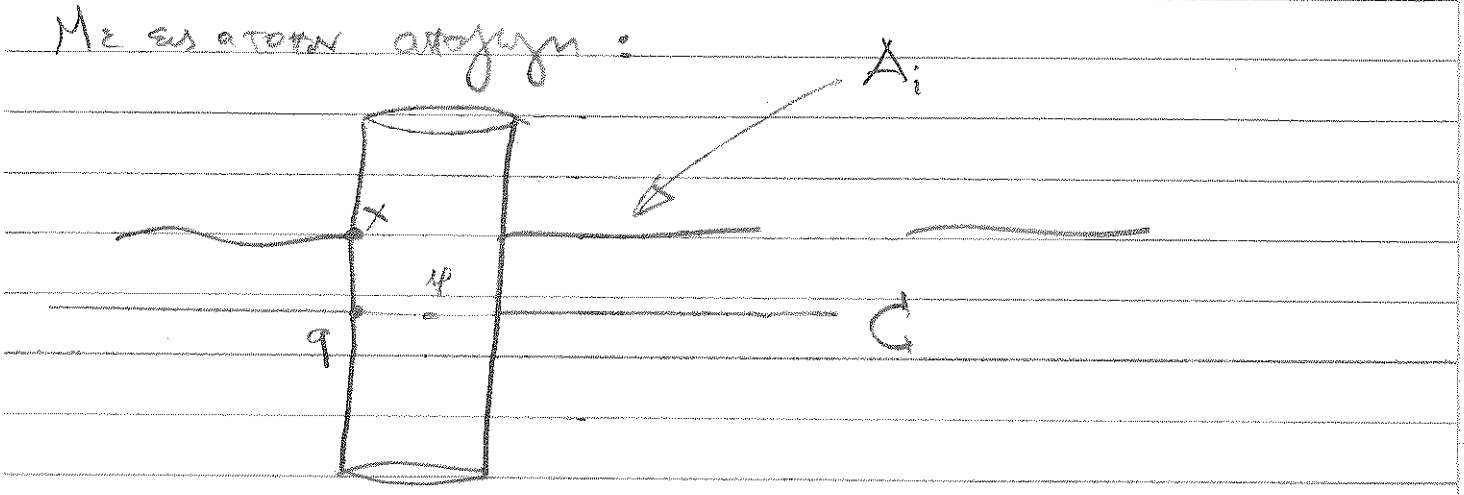
Απόδειξη

Χρειαζόμαστε να δείξουμε ότι

$$\pi(\operatorname{spt} A_i \cap K) = K \cap \operatorname{spt} C$$

για κάθε i αρκετά μεγάλο.

Με εις άτοπον απαγωγή:



$p \in \operatorname{Int}(C \cap K)$, $p \notin \pi(\operatorname{spt} A_i)$

Έστω q το σημείο της προβολής $\pi(A_i)$ που είναι κοντύτερα στο p:

$$\exists\, x \in A_i,\quad q = \pi(x).$$

Θεωρούμε

$$x_i = x, \quad A_{x_i, r_i} = \mathcal{D}_{M/r_i}\left(I_{-x_i} A_i \perp B(x_i, r_i)\right)$$

το οποίο συγκλίνει σε ημιεπίπεδο (πάντως όχι επίπεδο) που αντίκειται με Θεώρημα (Σχέδιο κύριο Θεώρημα).

ΟΕΔ.

§19 Η Απόδειξη του Θεωρήματος

Ορισμός

Φιξάρουμε $s>0$, A flat αμοιβή.

Θεωρούμε το μεταλογικό πρόβλημα

$$\min_{a} \left\{ \mathbb{M}(a) + s\,W(a-A) \right\}$$

Έστω $\tilde{A}$ οποιο πιάνεται το min.

Παρατηρούμε ότι

- $\mathbb{M}(\tilde{A}) + s\,W(\tilde{A}-A) \leq \mathbb{M}(A)$
- $W(\tilde{A}-A) \leq \frac{1}{s}\,\mathbb{M}(A)$.

- Υπάρξη προκύπτει από τη κάτω ημισυνέχεια του όρου $\mathbb{M}(\tilde{A})$ και τη συνέχεια του όρου $W(\tilde{A}-A)$. $\tilde{A}$ όχι αναγκαστικά μοναδικό.

- Έστω $\tilde{A}$ το ελάχιστο. Τότε

$$\mathbb{M}(\tilde{A}) + s\,W(\tilde{A}-A) \leq \mathbb{M}(B) + s\,W(B-A)$$

$$\leq \mathbb{M}(B) + s\,W(B-\tilde{A}) + s\,W(\tilde{A}-A)$$

$\therefore$

(147) $\mathbb{M}(\tilde{A}) \leq \mathbb{M}(B) + s\,W(B-\tilde{A}) \quad \forall B.$

$\therefore$

$$\left(1 - \frac{2s}{(m+1)} r\right) \mathbb{M}(\tilde{A} \llcorner B_r) \leq \mathbb{M}(T)$$

$\overset{(81)}{\Longrightarrow}$ $\tilde{A}$ είναι λ-ανίσο, $\lambda = \frac{2s}{m+1}$.

ΟΕΔ

Ενδιαφερόμαστε για την περίπτωση

$\operatorname{spt}(A) \subset B_1$

$\partial A = 0$ (cycle)

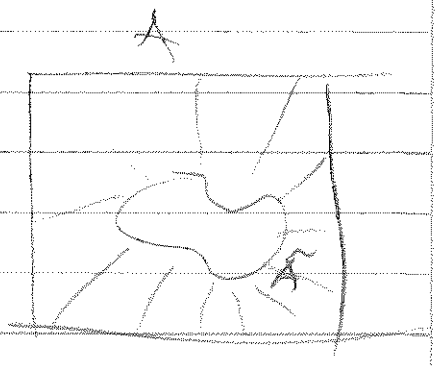
<u>Άσκηση 26</u>

$\tilde{A}$ είναι cycle

<u>Σχόλια</u>

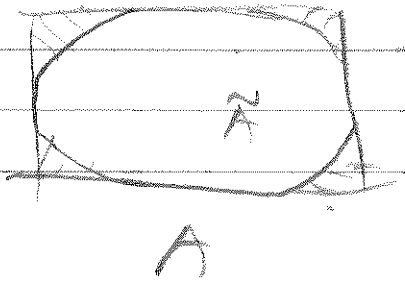
a) Τα cycles εντός του B_1

$\mathbb{N}(\cdot) = L(\cdot)$



Ελαχιστοποίηση του

$\mathbb{M}(\tilde{A}) + sL(\tilde{A} - A)$

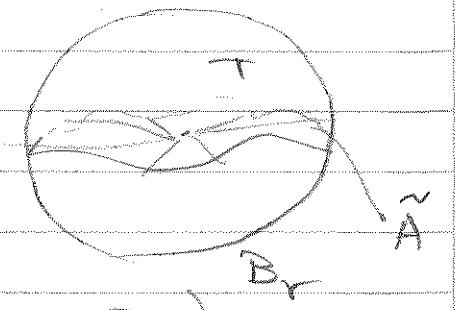


Λήμμα 25

$$\tilde{\tilde{A}} = \tilde{A} .$$

Παρατήρηση

$\tilde{A}$ είναι λ-min.



Απόδειξη

$$\mathbb{M}(\tilde{A} \llcorner B_r) \overset{(147)}{\leq} \mathbb{M}(T) + s\,\mathbb{W}((T-\tilde{A}) \llcorner B_r)$$

(υπόθεσαμε $\operatorname{spt} T \subset B_r$, $\partial T = \partial(\tilde{A} \llcorner B_r)$)

$T-\tilde{A}$ m-cycle. Κατά συνέπεια δαμπάρουμε τη κυνο:

$$\mathbb{M}(\tilde{A} \llcorner B_r) \leq \mathbb{M}(T) + s\,\mathbb{M}(\operatorname{cone}(T-\tilde{A} \llcorner B_r))$$

(υπενθυμίζουμε ότι ένας τρόπος για να εκτιμήσουμε την W-νόρμα είναι να αφαιρέσουμε κάποιο το συνόλο σαν σύνορο κάποιου άλλου συνόλου).

$$\leq \mathbb{M}(T) + \frac{sr}{m+1}\,\mathbb{M}(T-\tilde{A} \llcorner B_r)$$

Επιλέγουμε τώρα τη T να είναι το Plateau πρόβλημα με $\partial T = \partial(\tilde{A} \llcorner B_r)$:

$$\mathbb{M}(\tilde{A} \llcorner B_r) \leq \mathbb{M}(T) + \frac{sr}{m+1}\left(\mathbb{M}(T) + \mathbb{M}(\tilde{A} \llcorner B_r)\right)$$

$$\leq \mathbb{M}(T) + \frac{2sr}{m+1}\,\mathbb{M}(\tilde{A} \llcorner B_r)$$

b) A cycle εντος της σφαιρας, $\partial B(0,1)$

Ελαχιστοποιεί της $\tilde{A} \to \mathbb{M}(\tilde{A}) + s\,\mathbb{W}(\tilde{A}-A)$

Δίνει cycle $\tilde{A} \subset \partial B(0,1)$ με ένα

λ - min, λ εξαρτώμενο από το s.

$\square$

<u>Λήμμα</u>

Έστω $s>1$, C ελαχιστικός κώνος.
Έστω Γ cycle $\subset \partial B_1$ και κοντά στον Γ_c

$\Longrightarrow$

$\tilde{\Gamma}$ κοντά στον Γ_c, και $\tilde{\Gamma}$ ελαχιστοποιεί

$$\mathbb{M}(\tilde{\Gamma}) + s\,\mathbb{W}(\Gamma - \tilde{\Gamma})$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{m}\mathbb{M}(\tilde{\Gamma}) + s\,\mathbb{W}(\Gamma - \tilde{\Gamma})$$

$$\frac{1}{m}\mathbb{M}(\tilde{\Gamma}) + s\,L(\Gamma - \tilde{\Gamma}) \le \frac{1}{m}\mathbb{M}(\Gamma_c) + s\,L(\Gamma_c - \Gamma)$$

$$\le \frac{1}{m}\mathbb{M}(\tilde{\Gamma}) + L(\tilde{\Gamma} - \Gamma_c) + s\,L(\Gamma_c - \Gamma)$$

$$\le \frac{1}{m}\mathbb{M}(\tilde{\Gamma}) + L(\tilde{\Gamma} - \Gamma)$$

$$+ L(\Gamma - \Gamma_c) + s\,L(\Gamma_c - \Gamma)$$

$$(s-1)\, L(\Gamma-\tilde{\Gamma}) \leq (s+1)\, L(\Gamma-\Gamma_c)$$

$$L(\Gamma-\tilde{\Gamma}) \leq \frac{s+1}{s-1}\, L(\Gamma-\Gamma_c)$$

$$\parallel$$

$$W(\Gamma-\tilde{\Gamma}) \leq \frac{s+1}{s-1}\, W(\Gamma-\Gamma_c)$$

$\square$