Θεωρία Ελέγχου

10/2/23

Σύστημα:

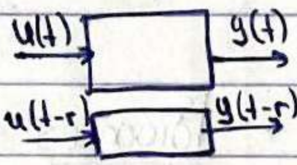
Στατικά — Δυναμικά (μνήμη)

$F(t)=k\cdot x(t)$ — $x'=f(x) \Rightarrow x(t)=x(t_0)+\int_{t_0}^{t} f(x(\tau))d\tau$

1. Ντετερμινιστικά ⟷ Στοχαστικά

2. Χρονικά Αναλλοίωτα – Χρονικά Μεταβαλλόμενα.

$x'=f(x)$ — $x'=f(t,x)$, $x'=tx$.



3. Απείρων Διαστάσεων – Πεπερασμένων Διαστάσεων

μ.δ.ε. — σ.δ.ε

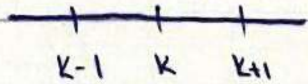
Infinite-dim — lumped.

4. Συνεχούς χρόνου – Διακριτού χρόνου – Υβριδικά

$t\in\mathbb{R}$ — $x_{k+1}=f(x_k,x_{k-1},k)$

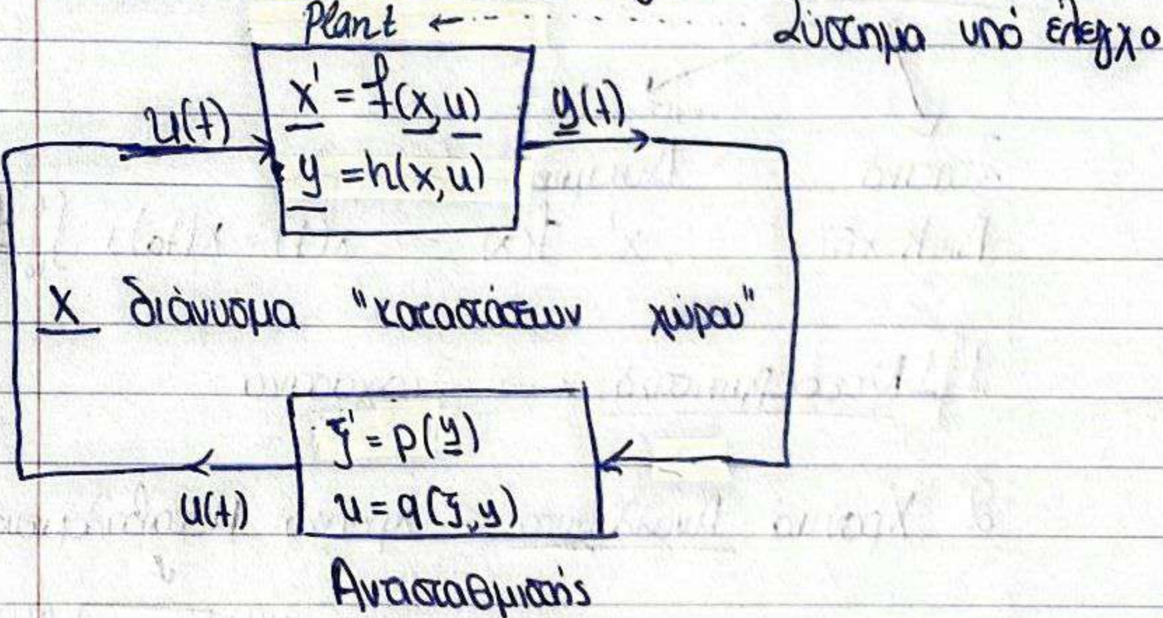
$x'=f(x,t)$

(διαφ. εξ.)



(εξισ. διαφορών)

Γενικό πρόβλημα Θ. Ελέγχου



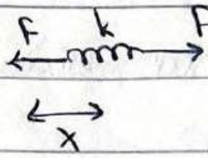
Ιδιότητες

1. Ευστάθεια
2. "Επίδοση"
3. "Ευρωστία" (Robustness)

14/2/23

Σύστημα

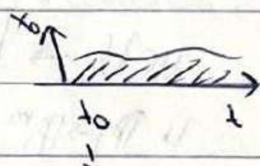
Στατικό



$F(t) = kx(t)$

Δυναμικά (μνήμη)

$$\left.\begin{aligned} x' &= f(x) \\ x(t) &= x_0 \end{aligned}\right\} \iff x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(\tau))\,d\tau$$



αρχική συνθήκη x_0

Η λύση εξαρτ. από την αρ. συν και απ' όλες τις τιμές του x σε αυτό το διάστημα.

· Γραμμικά - Μη Γραμμικά

συνεχούς χρόνου γραμ. εξισ.

Μοντέλα

① Εισόδου - Εξόδου

έχουμε ένα μαθηματικό τελεστή

ένα $\underbrace{\text{διανυσματικό χώρο}}_{u \in U}$ από συναρτήσεις εισόδου

$$u \in U \rightarrow \boxed{H(\ )} \rightarrow y \in Y$$

$$u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m \qquad y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$$

έχουμε συνάρτηση εξόδου y

$$y \in H(u)$$

② Δυναμικά Συστήματα Καταστάσεων Χώρου
(state-space)

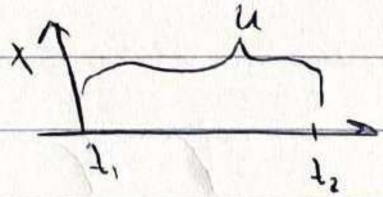
Ορίζουμε $x(t)$: Διάνυσμα εσωτερ. μεταβ. (δεν έχουμε πρόσβαση)

$$u \in U \rightarrow \boxed{\ \ \ } \rightarrow y \in Y$$

$x(t)$

π.χ. Αν ξέρουμε $(x(t_1), u_{[t_1, t_2]}) \rightarrow x(t_2)$

το διαν. εσ. κατ. μιας χρ. στιγμής t_1 και ξέρουμε και το u



Αν ξέρουμε $(x(t), u(t)) \rightarrow y(t)$

βρίσκουμε το

Αξιωματική Θεμελίωση

- Χώρος καταστάσεων $\mathcal{X}$
- Διάστημα $T \subseteq \mathbb{R}$
- Χώρος συναρτήσεων εισόδου $\mathcal{U}$
- Χώρος συναρτήσεων εξόδου $\mathcal{Y}$
- Συνάρτηση Μετάβασης (state-transition)

$$\phi : T \times T \times \mathcal{X} \times \mathcal{U} \to \mathcal{X}$$

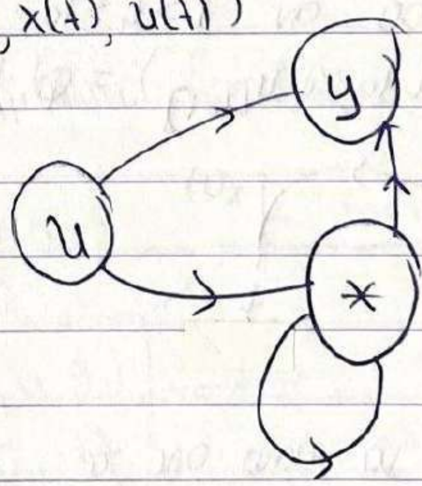
$$\phi(t_1, t_0, x(t_0), u_{[t_0, t_1]}) = x(t_1)$$

τελ. τιμή, αρχ. τιμή, αρχική καταστ., συναρ. εισόδου

- Συνάρτηση Εξόδου

$$h : T \times \mathcal{X} \times \mathcal{U} \to \mathcal{Y}$$

$$y(t) = h(t, x(t), u(t))$$



Ο χώρος του $y \subseteq$ χώρο του $\mathcal{X}$.

Αξιώματα

- Αξίωμα Αιτιότητας (Causality)

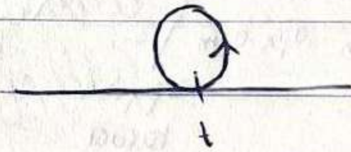
$\forall t_0 \in T \;\; \forall t \geq t_0 \;\; \forall x_0 \in \mathcal{X}$

$u_{[t_0,t]} = u'_{[t_0,t)} \Rightarrow \phi(t, t_0, x_0, u_{[t_0,t)}) = \phi(t, t_0, x_0, u'_{[t_0,t)})$

- Αξίωμα Συνέπειας (Consistensy)

$\forall t \in T \;\; \forall u \in U : \phi(t, t, x_0, u) = x_0$

(αρ. χρ. και τελ. χρ. ταυτίζονται)



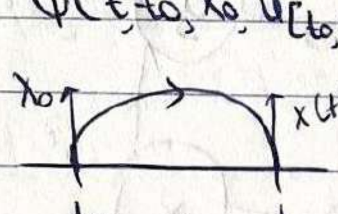
- Αξίωμα Διαχωρισμού / Ημιομάδας

$\forall t_0 \in T, \; \forall t \geq t_0, \; \forall x_0 \in \mathcal{X}, \; \forall u \in U$

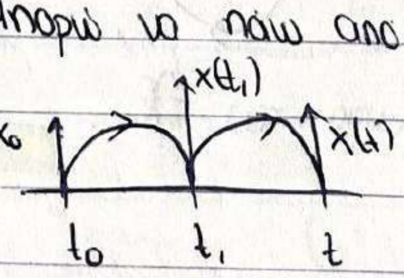
ισχύει ότι αν $t > t_1 > t_0$ τότε

$\phi(t, t_0, x_0, u_{[t_0,t]}) = \phi(t, t_1, x(t_1), u_{[t_1,t]})$

$\phi(t_1, t_0, x_0, u_{[t_0,t_1]})$



Μπορώ να πάω από το $x(t_0)$ στο $x(t)$ με δύο βήματα



Παράδειγμα

Δυναμικό σύστημα (χωρίς είσοδο)

$x' = ax \quad , \; x(t_0) = x_0$

Λύση $\Rightarrow x(t) = \underbrace{e^{a(t-t_0)} x_0}_{\phi(t, t_0, x_0)}$ $\quad \Big\{ \; \phi : T \times T \times \mathcal{X} \to \mathcal{X}$

- Αξίωμα συνέπειας: $\phi(t_0, t_0, x_0) = x_0$

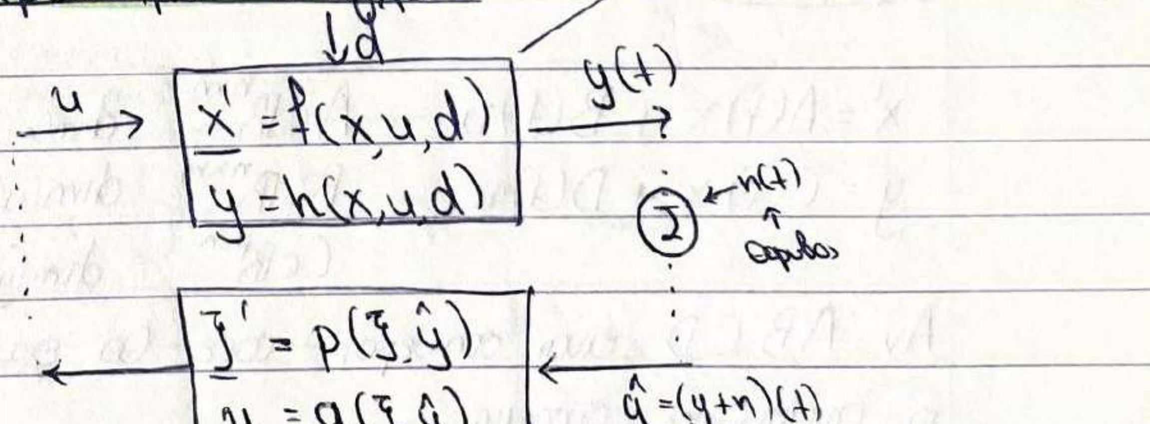
- Αξίωμα διαχωρισμού: $\underbrace{\phi(t, t_1, \phi(t_1, t_0, x_0))}_{e^{a(t-t_1)}\left(e^{a(t_1-t_0)} x_0\right)} = \phi(t, t_0, x_0) = e^{a(t-t_0)} x_0$

$\phi(t, t_0, x_0) = \phi(t+T, t_0+T, x_0)$

$e^{a(t-t_0)} x_0 = e^{a(t+\cancel{T}-t_0-\cancel{T})} x_0$

Άρα σύστημα χρονικά αναλλοίωτο.

Πρόβλημα Ελέγχου



Αντισταθμιστής

Επιλέγαμε αντισταθμιστή έτσι ώστε το σύστημα "κλειστού βρόχου" να έχει επιθυμητές ιδιότητες

α) Ευστάθεια

β) "Επίδοσης"

γ) Ευρωστεία

Αν είχα $\xrightarrow{\text{συγκεκριμένα } u} \boxed{\begin{aligned} x' &= f(x,u,d) \\ y &= h(x,u,d) \end{aligned}} \xrightarrow{\quad} y(t)$ με είσοδο d από πάνω

έτσι θα έχαμε θέμα στην ευστάθεια

Θα λεγόταν (δηλαδή χωρίς αντισταθμιστή) σύστημα "ανοιχτού βρόχου"

Μη γραμμικά

$$\left.\begin{aligned} x' &= f(x,u,t) \\ y &= h(x,u,t) \end{aligned}\right\}$$ αν δεν έχω εξάρτηση από το t θα είναι χρ. αναλλοίωτο.

Γραμμικά

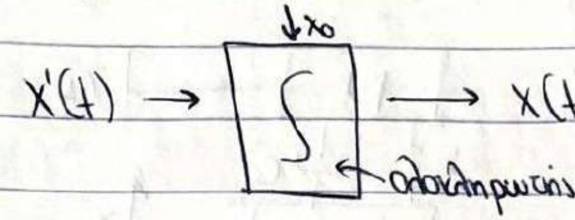
$$\begin{aligned} x' &= A(t)x + B(t)u \qquad A \in \mathbb{R}^{n\times n} \quad \dim(x) = n \quad D \in \mathbb{R}^{p\times m} \\ y &= C(t)x + D(t)u \qquad B \in \mathbb{R}^{n\times m} \quad \dim(u) = m \\ & \qquad\qquad\qquad\quad\; C \in \mathbb{R}^{p\times n} \quad \dim(y) = p \end{aligned}$$

Αν A, B, C, D είναι σταθεροί τότε θα έχω ένα χρ. αναλλοίωτο σύστημα.

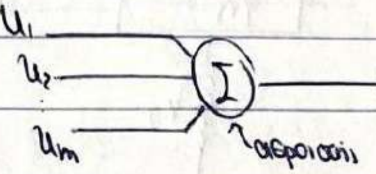
μνημονικός τρόπος για τις διαστάσεις

$$P = \begin{array}{c c} \begin{array}{cc} n & m \end{array} & \\ \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} & \begin{array}{c} n \\ p \end{array} \end{array}$$

Διάγραμμα βαθμίδων



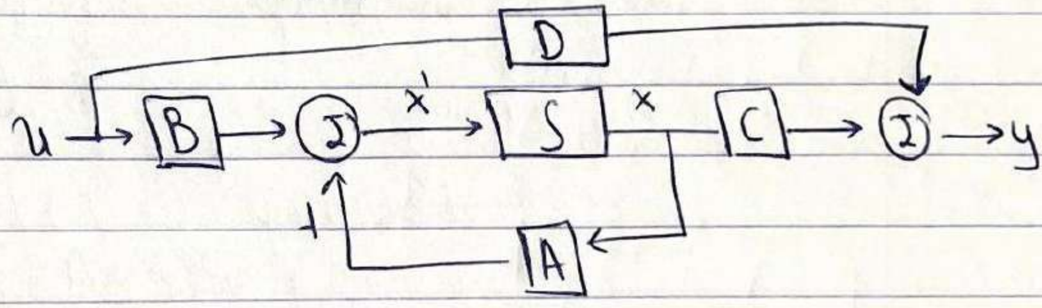
$\longrightarrow x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t}$



$\longrightarrow \sum_{i=1}^{m} u_i(t).$

$u \longrightarrow \boxed{A} \longrightarrow y = Au$

πολλαστής



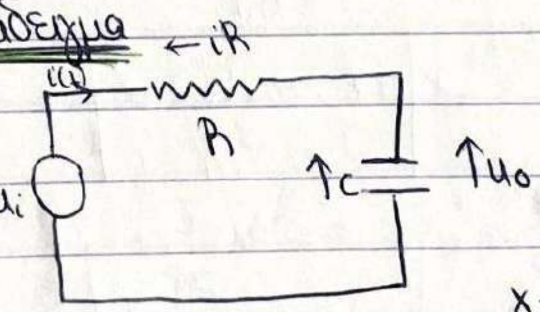
4 πολλαστές
1 ολοκλ.
2 αθροιστές

$$\begin{cases} x' = Ax + Bu \\ y = Cx + Du. \end{cases}$$

ρεύμα

$$i = \frac{u_o - u_i}{R} = C\frac{du_o}{dt}$$

Παράδειγμα



$$\Rightarrow \boxed{u_o' = \frac{1}{RC}u_o - \frac{1}{RC}u_i}$$

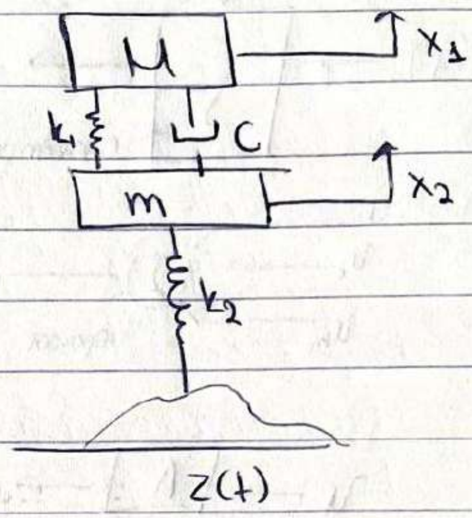
$x = y = u_o, \quad u = u_i$

$$x' = \underbrace{\frac{1}{RC}}_{A}x - \underbrace{\frac{1}{RC}}_{B}u$$

$$y = \underbrace{1}_{C}x + \underbrace{0}_{D}u$$

Παράδειγμα

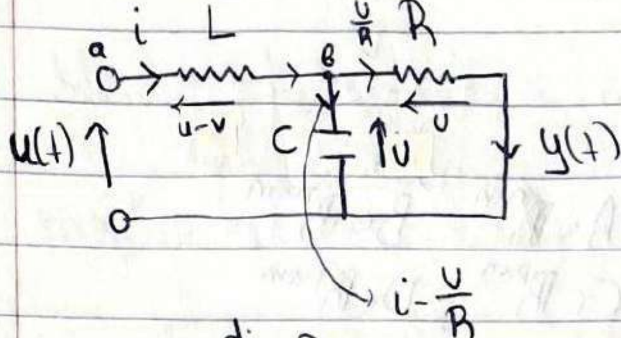
μάζες αυτοκινήτου

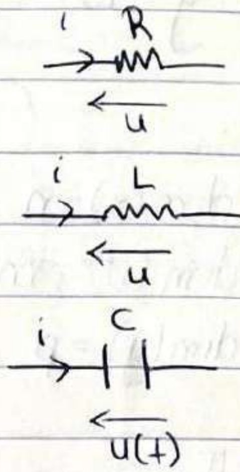


$$\left.\begin{aligned} x' &= Ax + Bz \\ y &= Cx + Dz \end{aligned}\right\}$$

28/2/23

Παράδειγμα 1 (RLC)





$u = iR$

$u(t) = L\frac{di(t)}{dt}$

$i(t) = C\frac{du}{dt}$

$$\left.\begin{aligned} u - v &= L\frac{di}{dt} \\ i - \frac{v}{R} &= C\frac{dv}{dt} \\ y &= \frac{v}{R} \end{aligned}\right\}$$

Προσπαθώ να τις γράψω σε μορφή

$$\left.\begin{aligned} \underline{x}' &= A\underline{x} + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned}\right\}$$

Θέτουμε $x_1 = i$, $x_2 = v$, $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$$\frac{di}{dt} = -\frac{1}{L}v + \frac{1}{L}u \Rightarrow x_1' = \frac{-1}{L}x_2 + \frac{1}{L}u$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{C}i - \frac{1}{RC}v \Rightarrow x_2' = \frac{1}{C}x_1 - \frac{1}{RC}x_2$$

$$\underline{x}' = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix}}^{A} \overbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}^{x} + \overbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}}^{B} u$$

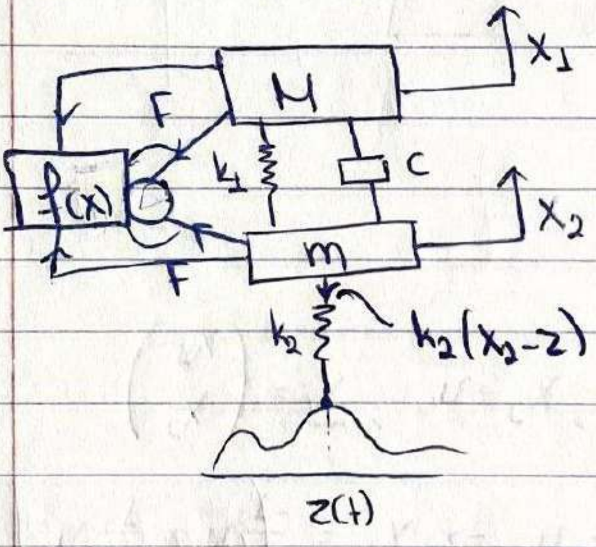
$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{B} \end{bmatrix}}_{C} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{[0]}_{D} u$$

$$\left.\begin{aligned} \dim(x) &= n \\ \dim(u) &= m \\ \dim(y) &= p \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \; B \in \mathbb{R}^{n\times m} \\ &C \in \mathbb{R}^{p\times n}, \; D \in \mathbb{R}^{p\times m} \end{aligned}$$

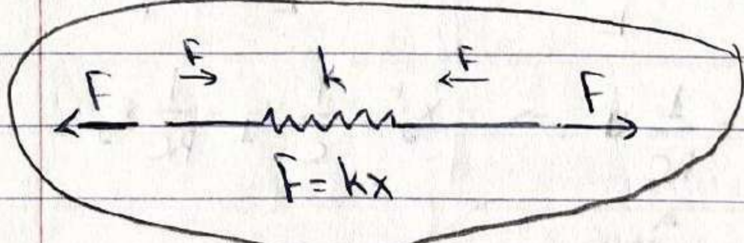
Παράδειγμα 2 (ανάρτηση αυτοκινήτου)

M, m (μάζα 1/4 σασί + τροχός)
k_1, k_2 (ελατήρια)
c (αμορτισέρ)

$x_1 > x_2$
$x_2 > z$



μετατοπίσεις από την Θ.Ι. τους.



Γενικά για τα ελατήρια

Στο δικό μας παράδειγμα : $F = c \cdot x'$

$$\left.\begin{aligned} M x_1'' &= -k_1(x_1 - x_2) - c(x_1' - x_2') \\ m x_2'' &= k_1(x_1 - x_2) + c(x_1' - x_2') - k_2(x_2 - z) \end{aligned}\right\}$$

$$\underline{x} = [x_1 \ \ x_1' \ \ x_2 \ \ x_2']^T$$

$$x_1'' = -\frac{k_1}{M}x_1 - \frac{c}{M}x_1' + \frac{k_1}{M}x_2 + \frac{c}{M}x_2'$$

$$x_2'' = \frac{k_1}{m}x_1 + \frac{c}{m}x_1' - \frac{k_1+k_2}{m}x_2 - \frac{c}{m}x_2' + \frac{k_2}{m}z$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1' \\ x_1'' \\ x_2' \\ x_2'' \end{bmatrix}}_{\underline{x}'} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1}{M} & -\frac{c}{M} & \frac{k_1}{M} & \frac{c}{M} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_1}{m} & \frac{c}{m} & -\frac{k_1+k_2}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_1' \\ x_2 \\ x_2' \end{bmatrix}}_{\underline{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{k_2}{m} \end{bmatrix}}_{B} z(t)$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -\frac{k_1}{M} & -\frac{c}{M} & \frac{k_1}{M} & \frac{c}{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1' \\ x_2 \\ x_2' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} z$$

Έστω $y_1 = x_1 - x_2$

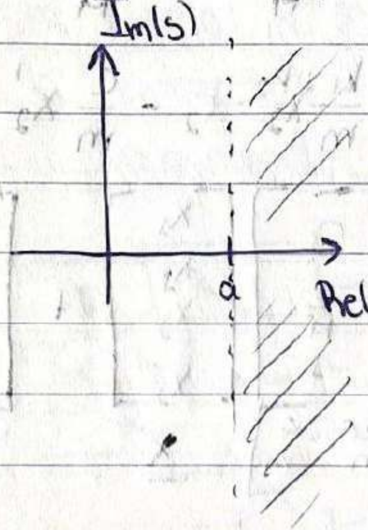
$y_2 = x_1''$

Μετασχηματισμός Laplace

Ορισμός Έστω $u : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής, λέγεται εκθετικά φραγμένη (εφ) αν υπάρχουν $a, M \in \mathbb{R} : |u(t)| \leq M e^{at} \ \forall t \geq 0$.

Τότε, $\hat{u}(s) = L(u) = \int_0^\infty u(t) e^{-st}\, dt$ και το ολοκλήρωμα συγκλίνει ομοιόμορφα $Re(s) \geq b > a$.

s μιγαδ.



Re(s)=a

Θεώρημα

1) Ο L γρ. τελεστής : $L(u_1 + u_2) = L(u_1) + L(u_2)$

$L(\lambda u) = \lambda L(u)$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $u_1, u_2, u \in \Phi$.

2) Αν u ΕΦ και $u \in C^1([0,\infty))$ τότε u' είναι ΕΦ και $L(u') = s\hat{u}(s) - u(0)$ $\quad (\hat{u}(s) = L(u))$

3) Αν u, v ΕΦ τότε $\overset{[0,+\infty)\to\mathbb{R}}{w(t)} = u*v = \int_0^t u(\tau)u(t-\tau)d\tau$ είναι ΕΦ και $L(u*v) = L(u)*L(v)$

4) $L(\;)$ αμφιμονοσήμαντη

5) u ΕΦ $\Rightarrow \hat{u}(s) \to 0$ καθώς $|s| \to \infty$

Παράδειγμα

Έστω $u:[0,\infty) \to \mathbb{R}$, $u(t) = e^{at}$

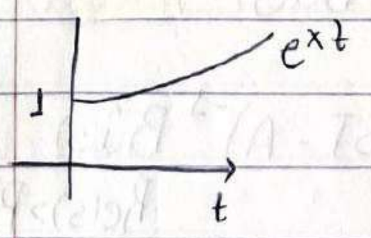
Από τον ορισμό:

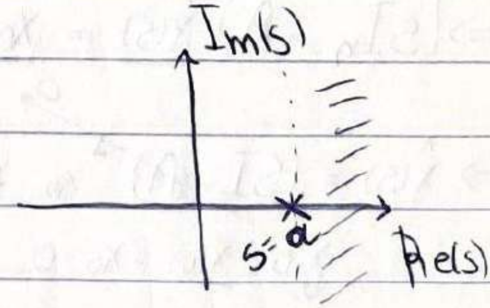
$$L(u) = \hat{u}(s) = \int_0^\infty e^{at} e^{-st} dt = \int_0^\infty e^{(a-s)t} dt =$$

$$= \frac{e^{(a-s)t}}{a-s}\Bigg|_{t=0}^{\infty} = \frac{1}{a-s}\left(1 - \lim_{t\to\infty} e^{(a-s)t}\right) = \frac{1}{a-s} \text{ αν}$$

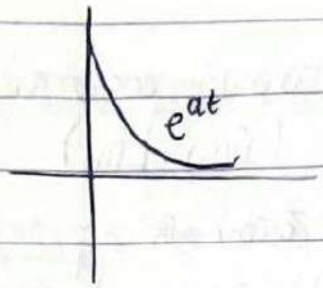
$\Leftrightarrow Re(a-s) < 0 \Leftrightarrow Re(s) > a$

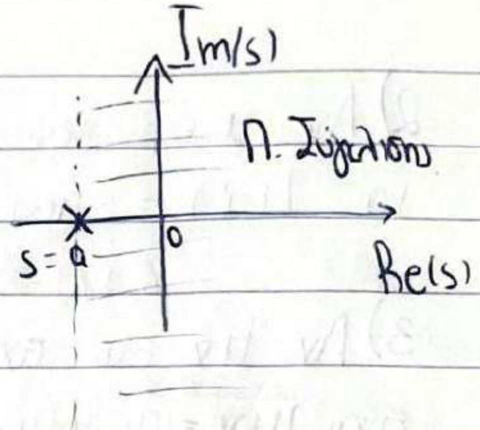
$a > 0$

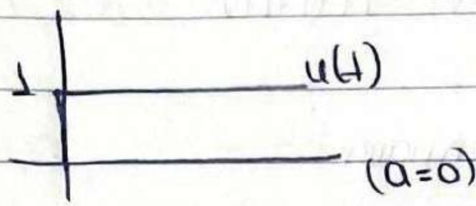




$a<0$







Συνάρτηση Μεταφοράς

Γραμμικό, χρ. αναλλοίωτο, σύστημα καταστάσεων χώρου

$$\left.\begin{aligned} \dot{\underline{x}} &= A\underline{x} + B\underline{u} \\ y &= C\underline{x} + D\underline{u} \\ \underline{x}(0) &= \underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n \end{aligned}\right\}$$

Έστω $\hat{x}(s) = L(x)$, $\hat{u}(s) = L(u)$, $\hat{y}(s) = L(y)$

Τότε, $s\hat{\underline{x}}(s) - \underline{x}_0 = A\hat{x}(s) + B\hat{\underline{u}}(s)$

$\Rightarrow (sI_n - A)\,\hat{\underline{x}}(s) = \underline{x}_0 + B\hat{u}(s)$

$\Rightarrow \hat{x}(s) = \cancel{(sI-A)^{-1}\underline{x}_0}^{\,0} + (sI-A)^{-1}B\hat{u}(s)$

για $\underline{x}(0) = x_0 = 0$ $\qquad$ $Re(s) > Re(\lambda_i)$

$i = 1, \dots, n$

Επίσης, $\hat{y}(s) = C\hat{x}(s) + D\hat{u}(s)$

$$= \underbrace{\left(C(sI-A)^{-1}B + D\right)}_{\hat{G}(s)} \underline{\hat{u}(s)}$$

και $\hat{G}(s)$ είναι η συνάρτηση μεταφοράς.

$$(sI-A)^{-1} = \frac{\mathrm{adj}(sI-A)}{\det(sI-A) = \phi(s)}$$

$$\hat{G}(s) = C(sI-A)^{-1}B + D$$
$$= \frac{C \cdot \mathrm{adj}(sI-A)B + D\phi(s)}{\phi(s)} = \frac{N(s)}{\phi(s)} \quad N(s) \in \mathbb{R}^{p \times m}[s]$$

και $N_{ij}(s) = c_i^T \, \mathrm{adj}(sI-A) B_j + D_{ij}\phi(s)$

και ο βαθμός $dN_{ij} \leq n = d\phi(s)$

Αν για όλα ζεύγος (i,j): $dN_{ij} < n = d\phi$ τότε το σύστημα "αυστηρά κανονικό".

Διαφορετικά, "κανονικό"

Λύση Γραμμικών Συστημάτων

Έστω $\underline{x}' = A(t)\underline{x}$, $A_{ij} \in C^0(\mathbb{R})$

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

Το σύνολο των λύσεων είναι διαν. χώρος διάστασης n

Ορισμός Θ.Π.Λ του $x' = A(t)x$ είναι $\psi(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ τ.ω.

$\psi'(t) = A(t)\psi(t)$, $t \in \mathbb{R}$

$(\psi_i' = A(t)\psi_i$, $i = 1, .. n)$

και $\det(\psi(t)) \neq 0$ $\forall t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$ (για κάποιο $t \in \mathbb{R}$)

Θεώρημα Liouville

Αν $\psi(t)$ είναι π.λ. (πίνακας λύσεων) τότε

$$\det(\psi(t)) = \det(\psi(t_0))\, \underbrace{e^{\int_{t_0}^{t} trA(s)ds}}_{>0}$$

Θεώρημα

i) $\psi(t)$ είναι Θ.π.λ. $\Rightarrow \psi(t)\,C$ (όπου $\det(C) \neq 0$) είναι επίσης Θ.π.λ.

ii) Αν $\psi(t)$, $\psi_1(t)$ Θ.π.λ. τότε $\exists C$, $\det(C) \neq 0$:

$\psi_1(t) = \psi(t)C$

Ορισμός Έστω $\psi(t)$ Θ.π.λ. του $\underline{x}' = A(t)\underline{x}$ τότε $\Phi(t,t_0) = \psi(t)\cdot\psi^{-1}(t_0)$ λέγεται πίνακας μεταφοράς.

Ιδιότητες

(I_1) Φ ανεξάρτητος από το $\psi(t)$

Αν ψ, ψ_1 Θ.π.λ. τότε $\psi_1(t) = \psi(t)C$, $\det(C) \neq 0$

Τότε $\Phi_1(t,t_0) = \psi_1(t)\psi_1(t_0)^{-1} = \psi(t)C(\psi(t_0)C)^{-1} =$

$= \psi(t)\psi(t_0)^{-1} = \Phi(t,t_0)$

(I_2) $\Phi(t,t_0)$ καλά ορισμένος

(αν $\psi(t)$ Θ.π.λ. τότε $\det(\psi(t)) \neq 0$ $\forall t \in \mathbb{R}$)

(I_3) Έστω το Π.Α.Τ. $\dot{x} = A(t)x$, $\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$

Όλες οι λύσεις του $\dot{x} = Ax$ είναι της μορφής

$\underline{x}(t) = \psi(t)\underline{c}$. Τότε η λύση του Π.Α.Τ.

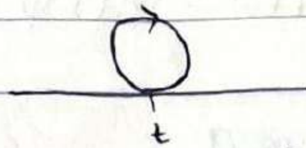
$\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0 = \psi(t_0)\underline{c} \Rightarrow \underline{c} = \psi(t_0)^{-1}x_0$ και

$\underline{x}(t) = \underbrace{\psi(t)\psi^{-1}(t)}_{\Phi}x_0$ είναι η λύση του Π.Α.Τ.

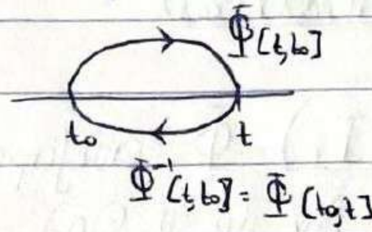
$$\Rightarrow \boxed{\underline{x}(t) = \Phi(t,t_0)\overbrace{x(t_0)}^{x_0}}$$

Ιδιότητες

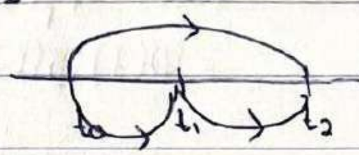
(I_1) $\Phi(t,t) = I_n$



(I_2) $\Phi^{-1}(t,t_0) = \Phi(t_0,t)$



(I_3) $\Phi[t_2,t_0] = \Phi[t_2,t_1]\cdot\Phi[t_1,t_0]$



Λύση γραμμικού συστήματος με είσοδο

$$\left.\begin{aligned} x' &= A(t)x + B(t)u(t) \\ y &= C(t)x + D(t)u(t) \\ x(t_0) &= x_0 \in \mathbb{R}^n \end{aligned}\right\}$$

Αν $u \equiv 0$ τότε $x(t) = \Phi(t,t_0)x(t_0)$ $\quad \psi(t_0) = x(t_0)$

Προσπαθώ να βρω λύση: $x(t) = \Phi(t,t_0)\psi(t)$.

$$\begin{aligned} x'(t) &= \Phi'(t,t_0)\psi(t) + \Phi(t,t_0)\psi'(t) \\ &= A(t)\Phi(t,t_0)\psi(t) + \Phi(t,t_0)\psi'(t) \\ &= A(t)\Phi(t,t_0)x(t_0) + B(t)u(t) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \psi'(t) = \Phi^{-1}(t,t_0)B(t)u(t)$$

$$\Rightarrow \psi(t) = \psi(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(\tau, t_0) B(\tau) u(\tau) d\tau$$

πολ/ζω με $\Phi(t,t_0)$ $\quad x(t_0)$

$$\Rightarrow x(t) = \Phi(t,t_0)\underbrace{\psi(t_0)}_{=x(t_0)} + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,t_0)\underbrace{\Phi^{-1}(\tau,t_0)}_{=\Phi(t_0,\tau)} B(\tau) u(\tau) d\tau$$

$$\Rightarrow x(t) = \Phi(t,t_0)\underline{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau) B(\tau) \underline{u}(\tau) d\tau.$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t)$$

$$y(t) = C(t)\left[\Phi(t,t_0)\underline{x_0} + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau) B(\tau) u(\tau) d\tau\right] + D(t)u(t)$$

Γραμμικά Χρον. Αναλλοίωτα Συστήματα (χωρίς είσοδο)

$x' = Ax$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. $x(t_0) = x_0$

$x(t) = \Phi(t,t_0)x(t_0)$ Εδώ ο $\Phi(t,t_0) = e^{A(t-t_0)}$.

Ιδιότητες

(1) $e^{A(t+s)} = e^{At} \cdot e^{As}$ $\quad \forall t,s \in \mathbb{R}$

(2) $e^{At} = e^{A(-t)}$ $\quad t \in \mathbb{R}$

(3) $(e^{At})' = Ae^{At} = e^{At} \cdot A$

(4) $e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k \cdot t^k}{k!}$

Για γραμμικά αναλλοίωτα (χωρίς είσοδο)

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0)$$

Για $x' = Ax + Bu(t)$

$$\underline{x}(t) = e^{A(t-t_0)}\underline{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

$$\underline{y}(t) = Cx(t) + Du(t)$$

3/3/23

$$\left.\begin{aligned}\underline{x}' &= A\underline{x} \\ \underline{x(0)} &= \underline{x_0} \in \mathbb{R}^n\end{aligned}\right\} \Rightarrow \underline{x(t)} = e^{At}\underline{x_0}$$

$$\left.\begin{aligned}\underline{x}' &= A\underline{x} + B\underline{u} \\ \underline{x(0)} &= \underline{x_0} \in \mathbb{R}^n\end{aligned}\right\} \Rightarrow \underline{x(t)} = e^{At}\underline{x_0} + \int_0^t e^{A(t-\tau)}B\underline{u}(\tau)\,d\tau$$

Προκαταρτικά: Ιδιοτιμές / Ιδιοδιανύσματα

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. $(\lambda, \underline{u})$ ζεύγος ιδιοτιμής/ιδιοδιανύσματος αν $\boxed{A\underline{u} = \lambda\underline{u}}$ $(\lambda \in \mathbb{C}, \underline{u} \in \mathbb{C}^n, \underline{u} \neq 0)$

$\Downarrow$

$(\lambda I_n - A)\underline{u} = \underline{0}$. Ορίζουμε το πολυώνυμο
$\varphi(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0$

Φάσμα του A: $\sigma(A) = \{\ \lambda : \varphi(\lambda) = 0\}$

Έστω $\varphi(\lambda) = \det(\lambda I - A) = (\lambda-\lambda_1)^{\tau_1}(\lambda-\lambda_2)^{\tau_2}\dots(\lambda-\lambda_p)^{\tau_p}$
όπου $\lambda_i \neq \lambda_j$ αν $i \neq j$

Ορίζω τ_i: αλγεβρική πολλαπλότητα της λ_i $\left(\sum_{i=1}^{n}\tau_i = n\right)$

Ορίζω ιδιοχώρο $N_{\lambda_i} = \{ u \in \mathbb{C}^n : (\lambda_i I - A)\underline{u} = 0\} =$
$= \ker(\lambda_i I - A)$

$d_i = \dim(N_{\lambda_i})$: γεωμετρική πολλαπλότητα

Ιδιότητες

- $1 \le d_i \le \tau_i \quad (i=1,2,\dots,p)$

- Αν $d_i = \tau_i \ \forall i = 1,2,\dots,n$ τότε A απλής δομής
- Αν για κάποιο i $d_i < \tau_i$ τότε ο A είναι μη-απλής δομής

Εκθετικός πίνακας e^{At} (A απλής δομής)

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ με ιδιοτιμές $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ (όχι απαραίτητα διακεκριμένες). Έστω $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3, \dots, \underline{u}_n\}$ αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα

$$\boxed{A\underline{u}_i = \lambda_i \underline{u}_i \quad (i=1,2,\dots,n)}$$

$$\underbrace{A[\underline{u}_1 \ \underline{u}_2 \ \dots \ \underline{u}_n]}_{P} = \underbrace{[\underline{u}_1 \ \underline{u}_2 \ \dots \ \underline{u}_n]}_{P} \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}}_{\Lambda}$$

$$\Rightarrow \boxed{AP = P\Lambda}$$

Τότε $\det(P) \neq 0$ και $\boxed{P^{-1}AP = \Lambda}$

Έστω το ομογενές διαφ. συσ. $\underline{y}' = A\underline{y}$, $\underline{y}(0) = \underline{y}_0$
με $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ απλής δομής

Ορίζουμε $\underline{x} = P^{-1}\underline{y} \Leftrightarrow \boxed{\underline{y} = P\underline{x}}$

$$\underline{x}' = P^{-1}\underline{y}' = P^{-1}A\underline{y} = \underbrace{P^{-1}AP}_{\Lambda}\,\underline{x}$$

$$\underline{x}' = \Lambda\underline{x} \Rightarrow x_i' = \lambda_i x_i \quad (i=1,2,\dots,n)$$

$$\Rightarrow x_i(t) = c_i e^{\lambda_i t} \quad (i=1,2,\dots,n)$$

$$\underline{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ c_n e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}}_{e^{\Lambda t}} \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}}_{\underline{c}}$$

$$\underline{y}(t) = P\underline{x} = [\underline{u}_1\ \underline{u}_2\ \dots\ \underline{u}_n]\, e^{\Lambda t}\, \underline{c}$$

$$\boxed{\underline{y}(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{\lambda_i t}\, \underline{u}_i}$$

Η εκθετική συνάρτηση $e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}$

$A^0 = I_n$ $\quad A^2 = (PAP^{-1})(PAP^{-1}) = P\Lambda^2P^{-1}$ και
γενικά $A^k = P\Lambda^kP^{-1}$ για $k \geq 0$.

Τότε, $e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P\Lambda^k P^{-1} t^k}{k!} = P\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\Lambda t)^k}{k!}\right)P^{-1}$

$= P e^{\Lambda t} P^{-1}$.

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ με μιγαδική ιδιοτιμή

Έστω $(\lambda, \underline{u})$ ζεύγος ιδιοτιμής/ιδιοδιανύσματος όπου $\lambda = \sigma + i\omega$ $(\sigma, \omega \in \mathbb{R}, \omega \neq 0)$ και $\underline{u} = \underline{x} + i\underline{z}$ $(\underline{x}, \underline{z} \in \mathbb{R}^n)$
Τότε

$$A\underline{u} = \lambda \underline{u} \Rightarrow \bar{A}\bar{\underline{u}} = \bar{\lambda}\bar{\underline{u}}$$

$$\Rightarrow A\bar{\underline{u}} = \bar{\lambda}\bar{\underline{u}} \quad \Rightarrow (\bar{\lambda}, \bar{\underline{u}}) \text{ επίσης ζεύγος ιδιοτ./ιδιοδ.}$$

Επίσης:

$$A\underline{u} = \lambda\underline{u} \Rightarrow A(\underline{x} + i\underline{z}) = (\sigma + i\omega)(\underline{x} + i\underline{z})$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} A\underline{x} &= \sigma\underline{x} - \omega\underline{z} \\ A\underline{z} &= \sigma\underline{z} + \omega\underline{x} \end{aligned}\right\} \Rightarrow A[\underline{x} : \underline{z}] = [\underline{x} : \underline{z}]\begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix}$$

Έστω $n=2$. Τότε $A = [x : z]\begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix}[x : z]^{-1}$

$(\underline{x}, \underline{z}$ γραμ. ανεξ.$)$

Υπολογίζουμε τον e^{At} όταν $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ με ιδιοτιμές $\lambda = \sigma + i\omega$, $\bar{\lambda} = \sigma - i\omega$ και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\underline{u} = \underline{x} + i\underline{z}$ και $\bar{u} = \underline{x} - i\underline{z}$. Τότε,

$$A[u \vdots \bar{u}] = [u \vdots \bar{u}]\begin{bmatrix} \sigma+i\omega & 0 \\ 0 & \sigma-i\omega \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A = [u|\bar{u}]\begin{bmatrix} \sigma+i\omega & 0 \\ 0 & \sigma-i\omega \end{bmatrix}[u \vdots \bar{u}]^{-1}$$

$$\Rightarrow e^{At} = [u \vdots \bar{u}]\begin{bmatrix} e^{(\sigma+i\omega)t} & 0 \\ 0 & e^{(\sigma-i\omega)t} \end{bmatrix}[u|\bar{u}]^{-1}$$

$$\Rightarrow e^{At} = e^{\sigma t}[u|\bar{u}]\begin{bmatrix} e^{i\omega t} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega t} \end{bmatrix}[u|\bar{u}]^{-1}$$

Όμως, $[u \vdots \bar{u}] = [\underline{x}+i\underline{z} \vdots \underline{x}-i\underline{z}] = [\underline{x} \vdots \underline{z}]\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow e^{At} = e^{\sigma t}[\underline{x} \vdots \underline{z}]\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{i\omega t} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}^{-1}[x|z]^{-1}$$

$$\bullet \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{-2i}\begin{bmatrix} -i & -1 \\ -i & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2i}\begin{bmatrix} i & 1 \\ i & -1 \end{bmatrix}$$

$$\bullet \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{i\omega t} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2i}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{i\omega t} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i & 1 \\ i & -1 \end{bmatrix}$$

=

$$= \dots = \begin{bmatrix} 1/2\left(e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}\right) & \frac{1}{2i}\left(e^{i\omega t}-e^{-i\omega t}\right) \\ -1/2i\left(e^{i\omega t}-e^{-i\omega t}\right) & 1/2\left(e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}\right) \end{bmatrix}$$

Επομένως,

$$\boxed{e^{At}=[\underline{x} \vdots \underline{z}]\begin{bmatrix} e^{\sigma t}\cos\omega t & e^{\sigma t}\sin\omega t \\ -e^{\sigma t}\sin\omega t & e^{\sigma t}\cos\omega t \end{bmatrix}[x|z]^{-1}}$$

Γενικά για πίνακα $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ (→ απλής δομής) με ένα ζεύγος μιγαδικών συζυγών ιδιοτιμών, έχουμε:

$$A\underbrace{[u \vdots \bar{u} \vdots \overset{n-2}{U_2}]}_{P}=\underbrace{[u \vdots \bar{u} \vdots U_2]}_{P}\begin{bmatrix} \sigma+i\omega & 0 & 0 \\ 0 & \sigma-i\omega & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow e^{At}=[x|z|U_2]\left[\begin{array}{cc|c} e^{\sigma t}\cos\omega t & e^{\sigma t}\sin\omega t & 0 \\ -e^{\sigma t}\sin\omega t & e^{\sigma t}\cos\omega t & 0 \\ \hline 0 & 0 & e^{\Lambda_2 t} \end{array}\right][x|z|U_2]^{-1}$$

10/3/23

Πίνακες μη-απλής δομής

$$\left(A\in\mathbb{R}^{n\times n},\ e^{At}:\ \begin{matrix} x' = Ax + Bu \\ \underline{x}(0) = \underline{x_0}\in\mathbb{R}^n \end{matrix} \right\} \Rightarrow x(t) = e^{At}\underline{x_0} + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \Bigg)$$

Έστω $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ μη απλής δομής

$\phi(\lambda) = det(\lambda I_n - A) = (\lambda-\lambda_1)^{\tau_1}\cdots(\lambda-\lambda_p)^{\tau_p}$ $\quad \lambda_i\neq\lambda_j \quad i\neq j$

τ_i αλγεβρική πολλ/τα της λ_i

$d_i = \dim N(\lambda_i I - A) \qquad 1\leq d_i\leq\tau_i$

Αν $d_i<\tau_i$ για μία τουλάχιστον ιδιοτιμή λ_i

$\Rightarrow$ A μη-απλής μορφής

Ορισμός: Θα λέμε ότι $u\in\mathbb{C}^n$ είναι γενικευμένο ιδιο ιδιοδιάνυσμα τάξης m (που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ) αν

$(\lambda I - A)^m \underline{u} = 0$ και $(\lambda I - A)^{m-1}\underline{u}\neq 0$

Παρατήρηση: Ένα ιδιοδιάνυσμα είναι γενικευμένο τάξης $m=1$.

Μια αλυσίδα γεν. ιδιοδ. μήκους k η οποία παράγεται από κάποιο (απλό) ιδιοδιάνυσμα u_1:

$$\left.\begin{matrix} (A-\lambda I)\underline{u}_k = u_{k-1} \\ (A-\lambda I)\underline{u}_{k-1} = \underline{u}_{k-2} \\ \vdots \\ (A-\lambda I)\underline{u}_2 = \underline{u}_1 \\ (A-\lambda I)u_1 = 0 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \text{Ισχύει για } j=\{1,2,\dots,k\} \\ (A-\lambda I)^j \underline{u}_j = 0 \\ \left(j=2:\ (A-\lambda I)^2\underline{u}_2 = (A-\lambda I)\underbrace{(A-\lambda I)u_2}_{u_1} = 0\right. \end{matrix}$$

Ισοδύναμα

$$A[\underline{u}_1\ \underline{u}_2 \cdots \underline{u}_{k-1}\ \underline{u}_k] = [\underline{u}_1\ \underline{u}_2 \cdots \underline{u}_{k-1}\ \underline{u}_k] \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \lambda & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix}}_{}$$

κανονική μορφή Jordan $\longleftarrow J(\lambda)$

α) Πόσες αλυσίδες έχουμε για κάθε ιδιοτιμή $\lambda_i \in \sigma(A)$; $[d_i]$.

β)* Ποιος είναι ο αριθμός των γεν. ιδιοδ. σε κάθε αλυσίδα;

Έστω $\lambda_i \in \sigma(A)$, $i = 1, 2, \dots, p$. (τ_i = αλγ. πολλ/τα)

Για κάθε λ_i:

$$r_{k_i} = \text{Rank}(A - \lambda_i I)^k \quad k \geq 1 \qquad r_{k_i} \downarrow$$

Όταν $k = 1$: $r_{1_i} = \text{Rank}(A - \lambda_i I) = n - d_i$.

(Rank-nullity: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $\text{Rank}(A) + \underbrace{\text{Null}(A)}_{\dim \ker(A)} = n$]

Ορίζουμε l_i: Ελάχιστος ακέραιος: $r_{l_i, i} = r_{l_i + 1, i}$

Τότε, $r_{l_i, i}$ η μεγαλύτερη τάξη απο γεν. διαν. (πάντα λ_i)

Χαρακτηριστική Segré

$$S_i = [n - r_{i1}, r_{i1} - r_{i2}, \dots, r_{l_{i-1},i} - r_{l_i,i}]$$

Το πλήθος των γεν. ιδιοδ. $1^{ης}$ τάξης $= n - r_{i1} = d_i$

-//- -//- $2^{ης}$ τάξης $= r_{i1} - r_{i2}$

Το πλήθος -//- l_i τάξης $= r_{l_{i-1},i} - r_{l_i,i}$

Διάγραμμα Ferrer μας δείχνει πως τα γεν. ιδιοδιαν. κατανέμονται στις d_i αλυσίδες (d_i - Jordan blocks)

Παράδειγμα: $A \in \mathbb{R}^{10\times10}$, $\lambda_0 \in \sigma(A)$

$r_1 = \text{Rank}(A-\lambda_0 I)^1 = 5$, $r_2 = 3$, $r_3 = 2$, $\overbrace{r_4 = 1, r_5 = 1}^{l=4}$

$l=4$ γιατί 4 στοιχεία?

$$S = [\underbrace{\overset{=10}{n} - \overset{=5}{r_1}}_{5}, \underbrace{5-3}_{2}, \underbrace{3-2}_{1}, \underbrace{2-1}_{1}]$$

5 γεν. $1^{ης}$ τάξης
2 γεν. $2^{ης}$ τάξης
1 γεν. $3^{ης}$ τάξης
1 γεν. $4^{ης}$ τάξης

Διάγραμμα Ferrer

$n - r_1 = 5$:	*	*	*	*	*
$r_1 - r_2 = 2$:	*	*			
$r_2 - r_3 = 1$:	*				
$r_3 - r_4 = 1$:	*				
	4	2	1	1	1

Jordan block 4x4 ← 4

2 → Jordan 2x2

$\underbrace{1 \quad 1 \quad 1}$ 3 Jordan blocks 1x1

$J = diag\{J_1, J_2, J_3, J_4, J_5\}$

$J_1 = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$, $J_2 = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$, $J_3 = J_4 = J_5 = [\lambda]$.

<u>Θεώρημα:</u> Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ με p διακεκρ. ιδιοτιμές $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\}$ και αντίστοιχα Jordan blocks $\{J_1(\lambda_1) \dots J_p(\lambda_p)\}$ διαστάσεων $\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_p\}$.
Έστω U ο πίνακας γεν. διανυσμάτων, ώστε,

$$A = U \underbrace{diag\{J_1, J_2, \dots J_p\}}_{J} U^{-1}$$

Τότε $e^{At} = U e^{Jt} U^{-1}$ όπου $e^{Jt} = diag\{e^{J_1 t}, e^{J_2 t}, \dots, e^{J_p t}\}$
Αν $J_i = diag\{J_{i1}, J_{i2}, \dots J_{id_i}\}$, $i = 1, 2, \dots, p$ και

$$J_{ij} = J_{ij}(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & 0 \dots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}$$

Τότε $e^{J_i t} = diag\{e^{J_{i1} t}, \dots, e^{J_{id_i} t}\}$ και

$$e^{J_{ij} t} = \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{1}{2!} t^2 & \dots & \frac{t^{k_{ij}-1}}{(k_{ij}-1)!} \\ 0 & 1 & t & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{1}{2!} t^2 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & t \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} e^{\lambda_i t}$$

Λήμμα Αν $A,B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ τότε $AB=BA \Rightarrow e^{(A+B)t} = e^{At}\cdot e^{Bt}$

Απόδειξη Ορίζω $\Phi(t) = e^{(A+B)t}\cdot e^{-At}\cdot e^{-Bt}$. Τότε

$$\Phi'(t) = e^{(A+B)t}(A+B)e^{-At}e^{-Bt} + e^{(A+B)t}(-A)e^{-At}e^{-Bt} +$$
$$+ e^{(A+B)t}e^{-At}(-B)e^{-Bt} =$$
$$= e^{(A+B)t}\left[(\cancel{A}+B)e^{-At} - \cancel{Ae^{-At}} - e^{-At}B\right]e^{-Bt} =$$

$$= e^{(A+B)t}\left[Be^{-At} - e^{-At}B\right]e^{-Bt} = 0$$

$$\downarrow$$

$$\left[Be^{-At} - e^{-At}B = B\left(I - At + \frac{A^2t^2}{2!} + \dots\right) - e^{-At} = e^{-At}B - e^{-At}B = 0\right]$$

Άρα, $\Phi'(t) = 0 \Rightarrow \Phi(t) = \Phi(0) = e^{(A+B)t}\cdot e^{-At}\cdot e^{-Bt}\Big|_{t=0} = I$

$$\Rightarrow e^{(A+B)t}\cdot e^{-At}\cdot e^{-Bt} = I \Rightarrow e^{(A+B)t}\cdot e^{-At} = e^{Bt} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow e^{(A+B)t} = e^{Bt}\cdot e^{At} = e^{At}\cdot e^{Bt}$$

$$J_{ij} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{k_{ij}\times k_{ij}} = \lambda_i I_{k_{ij}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}}_{N_{ij}}$$

Ο N_{ij} μηδενοδύναμος:

$$N_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}, \quad N_{ij}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 0 \\ & & & 0 \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad N_{ij}^{k_{ij}} = 0$$

Γενικά, $N_{ij}^k = 0$, $k \geq k_{ij}$

- $e^{N_{ij}t} = I + N_{ij}t + \frac{N_{ij}^2 t^2}{2!} + \dots\dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{N_{ij}^k t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{k_{ij}-1} \frac{N_{ij}^k t^k}{k!}$

- $e^{J_{ij}t} = e^{t\lambda I_{k_{ij}} + tN_{ij}} = e^{\lambda t} I_{k_{ij}} \cdot \sum_{k=0}^{k_{ij}-1} \frac{t^k \cdot N_{ij}^k}{k!} =$

$= e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{k_{ij}-1} \frac{t^k N_{ij}^k}{k!}$.

Παράδειγμα $J = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right] = \text{diag}\{J_1, J_2\}$

$\phi(\lambda) = (\lambda-1)^3(\lambda-2)$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda = \lambda_1 = 1 : \tau_1 = 3, d_1 = 1 \\ \lambda = \lambda_2 = 2 : \tau_2 = d_2 = 1 \end{array}\right\}$$

$e^{Jt} = \left[\begin{array}{c|c} e^{J_1 t} & 0 \\ \hline 0 & e^{J_2 t} \end{array}\right]$, $e^{J_1 t} = e^{\lambda_1 t \underline{\underline{I_3}} + \underline{\underline{N_3}} t}$ $\quad N_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow N_3^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow N_3^3 = 0 = N_3^k \quad k \geq 3$.

$e^{J_1 t} = e^t \cdot \left[I_3 + N_3 t + \frac{N_3^2 t^2}{2!} \right] =$

$= e^t \left\{ \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{t^2}{2!} \right\} =$

$$=e^t\begin{bmatrix}1 & t & \frac{1}{2}t^2\\0 & 1 & t\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}, \quad e^{Jt}=\left[\begin{array}{ccc:c} e^t & te^t & \frac{1}{2}t^2e^t & 0\\ 0 & e^t & te^t & 0\\ 0 & 0 & e^t & 0\\ \hdashline 0 & 0 & 0 & e^{2t}\end{array}\right]$$

Παράδειγμα Να λυθεί το ΠΑΤ

$$y' = \begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}y + \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \quad \underline{y}(0)=\underline{y}_0=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$$y(t)=e^{At}\underline{y_0}+\int_0^t e^{A(t-\tau)}b\,d\tau, \quad e^{At}=\begin{bmatrix}e^t & te^t\\0 & e^t\end{bmatrix}=$$

$$=\int_0^t \begin{bmatrix}e^{t-\tau} & (t-\tau)e^{t-\tau}\\0 & e^{t-\tau}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}d\tau =$$

$$=\begin{bmatrix}\int_0^t e^{t-\tau}d\tau\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e^t\int_0^t e^{-\tau}d\tau\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e^t\left[\frac{e^{-\tau}}{-1}\right]_{\tau=0}^{t}\\0\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}e^t(1-e^{-t})\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e^t-1\\0\end{bmatrix}$$