14/03/23

# Προκαταρκτικά:

**Ορισμός**: Έστω $(V, \mathbb{R})$ διαν. χώρος.
Νόρμα $\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}$ με ιδιότητες:

i) $\forall \underline{u} \in V, \|\underline{u}\| \geq 0$ και $\|\underline{u}\| = 0 \Leftrightarrow \underline{u} = 0$

ii) $\forall u \in V, \lambda \in \mathbb{R}: \|\lambda \underline{u}\| = |\lambda| \|u\|$

iii) $\forall u_1, u_2 \in V: \|u_1 + u_2\| \leq \|u_1\| + \|u_2\|$.

**Παράδειγμα** $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$

i) $\|\underline{x}\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ (νόρμα-1)

ii) $\|\underline{x}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$ (νόρμα-2 - Ευκλείδια)

iii) $\|\underline{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$ $(1 \leq p < \infty)$

iv) $\|\underline{x}\|_\infty = \max_{i=1,\dots,p} |x_i|$ (νόρμα-∞)

→ Απόδειξη με ανισότητα Holder

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad (1 \leq p, q \leq \infty) \\ \text{"Συμβατικά" } \frac{1}{\infty} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\langle x, y \rangle| = |x^T y| \leq \|x\|_p \|y\|_q$$

## Ορισμός

1) Διαν. χώρος $(V, \mathbb{R})$ εφοδιασμένο με $\|\cdot\|$ συμβολίζεται ως $(V, \mathbb{R}, \|\cdot\|)$

2) Η ανοικτή σφαίρα $B_r(\underline{u}) = \{x \in V : \|x-u\| < r\}$
κλειστή σφαίρα $\overline{B_r(\underline{u})} = \{x \in V : \|x-u\| \leq r\}$

**Παράδειγμα**

$B_r(\underline{u})$: στον $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}, \|\cdot\|_p)$, $p = 1, 2, ..., \infty$

$p=1$ $B_1(u) = \{\underline{x} : |x_1| + |x_2| < 1\}$

$p=2$ $B_1(u) = \{\underline{x} : x_1^2 + x_2^2 < 1\}$

$p=\infty$ $B_1(u) = \{\underline{x} : \max\{|x_1|, |x_2|\} < 1\} = \{\underline{x} : |x_1| < 1, |x_2| < 1\}$

## Ορισμός

Ακολουθία $(\underline{v_i}) \in (V, \mathbb{R}, \|\cdot\|)$ συγκλίνει στο $v \in V$ $(\underline{v_i} \to \underline{v}, \lim v_i = v) \Leftrightarrow \|v_i - v\| \to 0, i \to \infty$ δηλαδή $\forall \varepsilon > 0 : \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \|v_i - v\| < \varepsilon \;\; \forall n > N$.

## Ορισμός

Έστω $(V, \mathbb{R}, \|\cdot\|)$. Τότε $K \subseteq V$ "κλειστό" εάν $(\forall (v_i) \in K, v_i \to \underline{v} \in V) \Rightarrow \underline{v} \in K$.

Εάν $\dim(V) < \infty \Rightarrow K \subset V$ συμπαγές $\Leftrightarrow K$ φραγμένο και κλειστό.

## Ορισμός

Έστω $f:(U,\mathbb{R},\|\cdot\|_U) \to (V,\mathbb{R},\|\cdot\|_V)$.
Η f είναι συνεχής $\underline{u} \in U \iff \forall \varepsilon>0\ \exists \delta=\delta(\varepsilon,\underline{u})>0$ :
: $\|\underline{x}-\underline{u}\|<\delta \Rightarrow \|f(\underline{x})-f(\underline{u})\|<\varepsilon$.

Λήμμα: Η νόρμα $\|\cdot\|:(V,\mathbb{R},\|\cdot\|) \to (\mathbb{R},\mathbb{R},|\cdot|)$ είναι συνεχής συνάρτηση στο $\underbrace{V,\mathbb{R}}_{}$.

## Ορισμός

Έστω $(V,\mathbb{R})$ και 2 νόρμες $\|\cdot\|_a$ και $\|\cdot\|_B$.
Τότε: $\|\cdot\|_a$ ισοδ. $\|\cdot\|_B \iff \exists m,M>0: m\|u\|_a \le \|u\|_B \le M\|u\|_a$ $\forall \underline{u} \in V$.

Παράδειγμα Στο $(\underset{=\mathbb{R}^n}{V},\mathbb{R})_n$

$$\|x\|_\infty = \max_{i=1..n}|x_i| \le \sum_{i=1}^{n}|x_i| = \|x\|_1 \le n \cdot \max_{i=1..n}|x_i| =$$

$$= n\|x\|_\infty \quad \text{Άρα } \underset{\overset{\|}{m}}{1}\cdot\|x\|_\infty \le \|x\|_1 \le \underset{\overset{\|}{M}}{n}\|x\|_\infty$$

Γενικά: Κάθε ζεύγος από νόρμες σε χώρο V, $\dim(V)<\infty$ είναι ισοδύναμες.

## Ορισμός

Έστω $\mathcal{X} = (V, \mathbb{R}, \|\cdot\|)$ τότε $(v_i) \in V$ είναι Cauchy $\Leftrightarrow$
$\|v_n - v_m\| \to 0$ για $\min(n,m) \to \infty$.
(Ισοδύναμα: εάν $\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \|v_n - v_m\| < \varepsilon$
$\forall \min(m,n) > N$)

• Αν κάθε ακολουθία Cauchy στον $\mathcal{X}$ συγκλίνει τότε $\mathcal{X}$ "πλήρης" (χώρος Banach)

## Παράδειγμα

Έστω $C^0([a,b]) = \{ f : [a,b] \to \mathbb{R}^n, f \text{ συνεχής} \}$
Ο $C^0([a,b])$ είναι διαν. χώρος επί του $\mathbb{R}$ εάν
$(x_1 + x_2)u = x_1(t) + x_2(t)$, $x_1, x_2 \in C^0[a,b]$
$(\lambda x)u = \lambda x(u)$ $x \in C^0([a,b])$

Ορίζω νόρμα $x \in C^0([a,b]) : \|x\|_c = \max\limits_{t \in [a,b]} \|x(t)\|$

Οι 3 ιδιότητες για την $\|\cdot\|_c$ επαληθεύονται εύκολα.
i) $\|x\|_c \geq 0$ και $\|x\|_c = 0 \Leftrightarrow x = 0$
ii) $\lambda \in \mathbb{R} : x \in C^0([a,b])$ $\|\lambda x\|_c = |\lambda| \|x\|_c$
iii) $\|x_1 + x_2\|_c = \max\limits_{t \in [a,b]} \|x_1(t) + x_2(t)\| = \max\limits_{t \in J} \|x_1(t) + x_2(t)\|$

▶ Ο χώρος $\mathcal{X} = (C([a,b]), \mathbb{R}, \|\cdot\|_c)$ είναι χώρος Banach. Έστω $(x_n) \in \mathcal{X}$ ακολ. Cauchy. Θ.Δ.Ο. $x_n \to x \in \mathcal{X}$.

$B_1$) Η $x_k$ συγκλίνει "κατά σημείο"

Έστω $(x_k)$ ακολουθ. Cauchy και έστω $t \in [a,b]$.
Τότε $(x_k(t))$ είναι ακολ. Cauchy στον $\mathbb{R}^n$

$\|x_k - x_m(t)\| \leq \|x_k - x_m\|_c \to 0$, $k,m \to \infty$

$\Rightarrow (x_k(t))$ είναι Cauchy και επομένως συγκλίνει σε κάποιο διάστημα $x^*(t)$.

Ορίζω την συνάρτηση $: [a,b] \to x^*$, $x^*(t) = \lim_{t \to \infty} x_k(t)$

$B_2$) $x_k \xrightarrow{\text{ομοιόμ}} x$ στο $[a,b]$ πρέπει να δείξω ότι

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon) : \|x_k(t) - x^*(t)\| < \varepsilon \ \forall k < N, \forall x \in [a,b]$

Έστω $\varepsilon > 0$: Επιλέγω $N = N(\varepsilon)$, $\|x_k - x_m\|_c < \varepsilon/2$, $\forall k > N$
($x_k$: ακολ. Cauchy)

Τότε $\forall k > N : (N = N(\varepsilon))$

$\|x_k(t) - x^*(t)\| = \|x_k(t) - x_m(t) + x_m(t) - x^*(t)\| \leq$

$\leq \|x_k(t) - x_m(t)\| + \|x_m(t) - x^*(t)\| \leq$

$\leq \underbrace{\|x_k - x_m\|_c}_{< \frac{\varepsilon}{2} \text{ για } k,m > N} + \underbrace{\|x_m(t) - x^*(t)\|}_{< \frac{\varepsilon}{2} \ m > N_1(\varepsilon, t)}$

Επομένως, για οποιοδήποτε $t \in [a,b]$ Επιλέγω $m = \max(N, N_1)$

Άρα, $\forall k > N(\varepsilon)$ έχουμε $\|x_k(t) - x^*(t)\| < \varepsilon \Rightarrow x_k \xrightarrow{\text{ομοιόμ.}} x^*$

$B_3$) Έχουμε ότι $x^*(t) \in C^0([a,\beta])$ λόγω ομοιόμορφης σύγκλισης ακολουθίας $x_k \in C^0([a,\beta])$

$B_4$) $x_k \to x^*$ ως προς την νόρμα $\|\cdot\|_c$ λόγω ομοιόμορφης σύγκλισης $\exists N = N(\varepsilon) : \|x_k(t) - x^*(t)\| < \varepsilon$
$\forall t \in [a,\beta]$. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon) : \max\limits_{t \in J} \|x_k(t) - x^*(t)\| < \varepsilon$
$\forall \varepsilon > 0 : \exists N = N(\varepsilon) : \|x_k - x^*\|_c < \varepsilon$.

## Θεώρημα

Ο χώρος $(C^0(t), \mathbb{R}, \|\cdot\|_c)$ όλων των συναρτήσεων $f : E \to \mathbb{R}^n$, όπου $E$ συμπαγές και πλήρης (χώρος Banach)

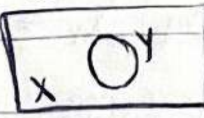
"Απόδειξη": Έστω $(f_n)$ ακολουθία Cauchy στον $C(E)$.
Πρέπει ν.δ.ο.: $f_n \to f \in C(E)$

$F(x) \in \mathbb{R}^n$
$E \subseteq \mathbb{R}^n$

Έστω $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Τότε $(f_k(x_0)) \to$ είναι Cauchy
Εφόσον $\forall \varepsilon > 0 : \exists N = N(\varepsilon) : n, m \geq N$ τότε
$\|f_n(x_0) - f_m(x_0)\| < \|f_n - f_m\|_c < \varepsilon$
και άρα $(f_n(x_0))$ cauchy $\to (f_n(x_0))$ φραγμένη και άρα $(f_n(x_0)) \subseteq K \subseteq \mathbb{R}^n$ ($K$ συμπαγές)
Bolz-Weis
$\Rightarrow (f_n(x_0))$ τουλάχ. ένα σημείο συσσώρευσης (σ.σ.)
$(\exists f_{n_k}(x_0) \to f^*(x_0)) \Rightarrow (f_n(x_0)) \to f^*(x_0)$

Πόρισμα Κλειστό υποσύνολο χώρου Banach είναι πλήρες.

Απόδειξη $(f_n) \in Y \subseteq X$, $(f_n)$ Cauchy τότε $f_n \to f^* \in X$
$\Rightarrow f^* \in Y \Rightarrow Y$ πλήρης.




Θεώρημα (Συστολής)

Έστω S κλειστό υποσύνολο χώρου Banach
$\mathcal{X}: (V, \mathbb{R}, \|\cdot\|)$ και έστω $T: S \to S$.
Έστω ότι:
$\forall x, y \in S: \|f(x) - f(y)\| \le p\|x-y\|$, $0 < p < 1$.
Τότε (i) $\exists$ μοναδικό $x^* \in S$ με $x^* = T(x^*)$ (σταθερό σημεί
ii) Αν ορίσω: $x_1 \in S$ και $x_{k+1} = T(x_k)$ τότε $x_k \to x^*$
(δηλ. $\|x_k - x^*\| \to 0$)

Απόδειξη $x_k \in S$. Έστω $\|x_{k+1} - x_k\| = \|T(x_k) - T(x_{k+1})\|$
$\le p\|x_k - x_{k+1}\| \le p^2\|x_{k-1} - x_{k-2}\| \le \dots \le p^{k-1}\|x_2 - x_1\|$

Επομένως, $\|x_{k+r} - x_k\| \le \overbrace{\|x_{k+r} - x_{k+r-1}\|}^{p^{k+r-2}} + \overbrace{\|x_{k+r-1} - x_{k+r-2}\|}^{p^{k+r-3}}$
$+ \dots + \underbrace{\|x_2 - x_1\|}_{p^{k-1}}$

$\|x_{k+r} - x_k\| \le p^k(1 + p + p^2 + \dots + p^{r-1})\|x_2 - x_1\| \le p^k \sum_{i=0}^{\infty} p^i \|x_2 - x_1\|$
$= \frac{p^k}{1-p}\|x_2 - x_1\| \xrightarrow{k \to \infty} 0$

$\Rightarrow (x_k)$ ακολ. Cauchy $\Rightarrow x_k \to x \in \mathcal{X} \Rightarrow x_k \to x \in S$
(S κλειστό)

• Θ.Δ.Ο. $x^* = T(x^*)$

$\|x^* - T(x^*)\| = \|x^* - x_k + x_k - T(x^*)\| \leq \underbrace{\|x^* - x_k\|}_{\to 0} + \|x_k - T(x^*)\| \leq$

$\|x^* - x_k\| + \|T(x_{k-1}) + T(x^*)\| \leq \underbrace{\|x^* - x_k\|}_{\to 0} + p\underbrace{\|x_{k+1} - x^*\|}_{\to 0}$.

Άρα $\|x^* - T(x^*)\| \to 0 \Rightarrow T(x^*) = x^*$

Τώρα θδο. είναι το μοναδικό σταθερό σημείο.

Έστω $x^*, y^*$ σταθ. σημεία.

$\|x^* - y^*\| = \|T(x^*) - T(y^*)\| \leq p\|x^* - y^*\| \Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{(1-p)}_{>0} \|x^* - y^*\| \leq 0 \Rightarrow \|x^* - y^*\| \leq 0 \Rightarrow x^* - y^* = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^* = y^*$.

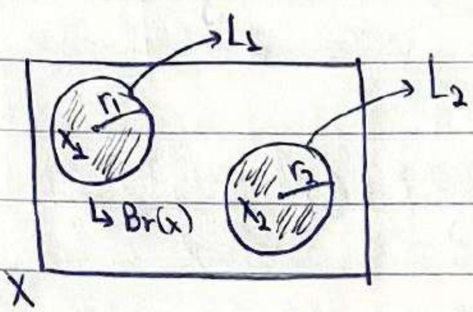
17/3/23

## Συνάρτηση Lipschitz

Έχω $f: X \to Y$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$ $Y \subseteq \mathbb{R}^n$

**Ορισμός:** Η $f: X \to Y$ είναι Lipschitz αν $\forall x_1, x_2 \in X$:
$\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq L\|x_1 - x_2\|$ (η $L > 0$ είναι σταθ. Lipschitz)

**Ορισμός:** Η $f: X \to Y$ είναι τοπικά Lipschitz αν
$\forall x \in X$ $\exists r = r(x) > 0$: η $f$ είναι Lipschitz στο $B_r(x)$




(Σε κάθε $B_{r_i}(x_i)$ η σταθερά Lipschitz δεν είναι απαραίτητα η ίδια)

**Ορισμός** Η συνάρτηση $\mathbb{R}^n \to Y \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι "ολικά Lipschitz" αν είναι Lipschitz στο πεδίο ορισμού της ($\mathbb{R}^n$).

**Παρατήρηση** Ο ορισμός επεκτείνεται σε συναρτήσεις $f(t,y)$: $f: [t_0, t_1] \times X \to Y \subseteq \mathbb{R}^n$ προσθέτοντας τον περιορισμό: "ως προς $y$ ομοιόμορφα ως προς $t$"
π.χ. η $f(t,y)$ είναι Lipschitz ως προς $y$ ομοιόμορφα

→ ως προς $t$ αν $\forall t \in [t_0, t_1]$ και $\forall x_1, x_2 \in X$ ισχυει

$$\|f(t,x_1) - f(t,x_2)\| \leq \|x_1 - x_2\|$$

<u>Λήμμα 1</u>: Έστω $f: X \to Y$ Lipschitz. Τότε είναι ομοιόμορφα συνεχής

<u>Αποδ.</u>: Έστω $\varepsilon > 0$ και έστω $L$ σταθερά Lipschitz της $f$. Επιλέγω $\delta = \frac{\varepsilon}{L} > 0$ και τοτε $\forall x_1, x_2 \in X$

$\|x_1 - x_2\| < \delta \Rightarrow \|f(x_1) - f(x_2)\| < L\|x_1 - x_2\| < \cancel{L} \cdot \frac{\varepsilon}{\cancel{L}} < \varepsilon$

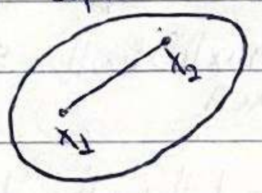
$\Rightarrow f$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

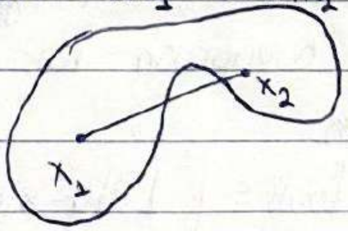
<u>Λήμμα 2</u>: Έστω $f: X \to Y$ τοπικά Lipschitz και $A \subseteq X$ συμπαγές (κλειστό και φραγμένο). Τότε, η $f$ είναι Lipschitz στο $A$.

<u>Αποδ.</u>: Άσκηση

<u>Λήμμα 3</u>: Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$ συμπαγές και κυρτό και $f \in C^1(A, \mathbb{R}^m)$

[$A$ κυρτό αν $\forall x_1, x_2 \in A \Rightarrow \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \in A \ \forall \lambda \in [0,1]$ ]



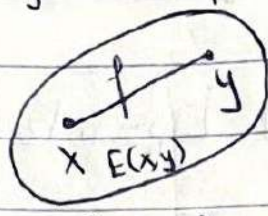

Δεν είναι κυρτό.

Τότε η $f$ είναι Lipschitz στο $A$ με σταθερά Lipschitz

$L = \max \| \underbrace{D \cdot f(x)}_{\text{πινακας Jacobian}} \|$

$$Df(x) = \left[ \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right]_{j=1,\dots,n}^{i=1,\dots,m}$$

Αποδ. Εφόσον το A είναι κυρτό κάθε ευθεία
$E(x,y) = \{ \zeta(s) : \zeta(s) = (1-s)x + sy, \ 0 \le s \le 1 \}$
ανήκει εξ ολοκλήρου στο A αν $x,y \in A$




Επομένως, $f(y)-f(x) = \int_0^1 \frac{d}{ds}(f(\zeta(s))\,ds$

$$\left( f(\zeta(s)) \Big]_{s=0}^{s=1} = f(\underbrace{\zeta_1}_{y}) - f(\underbrace{\zeta_0}_{x}) \right)$$

$$f(y)-f(x) = \int_0^1 Df(\zeta(s))\, \underbrace{\zeta'(s)}_{y-x}\, ds$$

Άρα, $\|f(y)-f(x)\| \le \int_0^1 \underbrace{\|Df(\zeta(s))\|}_{\le 1} \cdot \|y-x\|\,ds$

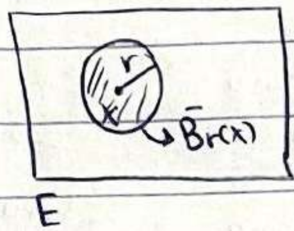
($\|Df(y-x)\| \le \|Df\|\,\|y-x\|$ Αν η νόρμα είναι επαγόμενη τότε: $\|Df\| = \max\limits_{\|u\|=1} \frac{\|Df\,u\|}{\|u\|}$ )

Εφόσον, A είναι συμπαγές και η νόρμα $\|Df\|$ είναι συνεχής συνάρτηση και: $L = \max\limits_{x \in A} \|Df(x)\|$ είναι καλά ορισμένη.

$$\|f(y)-f(x)\| \le \int_0^1 L\|y-x\|\,ds = L\|y-x\| \quad \forall x,y \in A$$

$\Rightarrow$ f είναι Lipschitz στο A με σταθερά L.

**Πόρισμα:** Αν $E\subseteq\mathbb{R}^n$ ανοικτό σύνολο και $f\in C^1(E,\mathbb{R}^m)$
[$f\in C^1(E,\mathbb{R}^m) \Leftrightarrow f:E\to\mathbb{R}^m$ συνεχής διαφορίσιμη]
Τότε η $f$ είναι τοπικά Lipschitz στο $E$




$B_r(x)\subseteq E$

Απόδ. $\forall x\in E$ $\exists \bar{B}_r(x)\subseteq E$ ($E$ ανοικτό). Το $\bar{B}_r(x)$ είναι συμπαγές (κλειστό και φραγμένο) και κυρτό. Επομένως, η $f|_{\bar{B}_r(x)}$ είναι Lipschitz και επομένως η $f$ είναι τοπικά Lipschitz στο $E$.

## Ύπαρξη και μοναδικότητα λύσης

Έστω ΠΑΤ: $x'=f(x)$, $x(t_0)=\underline{x_0}\in\mathbb{R}^n$

$f: X\to\mathbb{R}^n$ $\quad X\subseteq\mathbb{R}^n$

"τουλ. συνεχής"

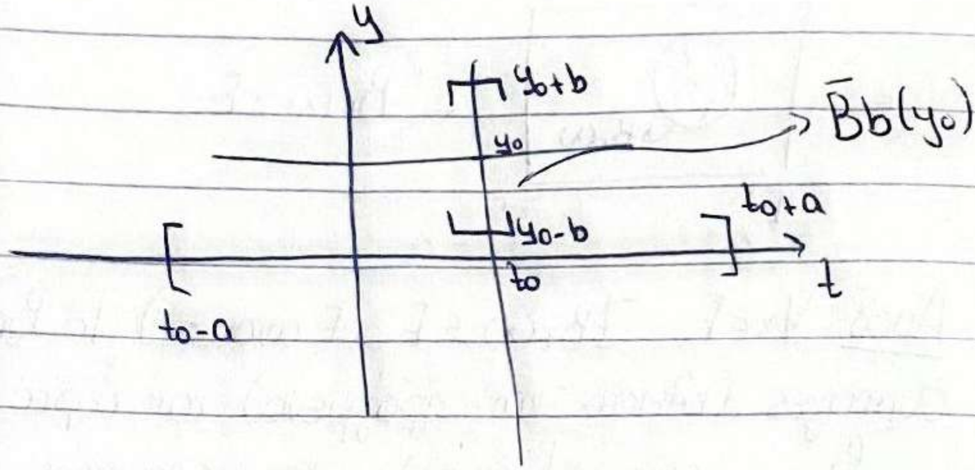
Ερώτημα: Υπάρχει μοναδική λύση του ΠΑΤ σε $t_0\in J$

$$x(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} f(x(s))\,ds \quad (*)$$

$x\in C^0(J) \Rightarrow x\in C^1(J)$ συνεχώς διαφορίσιμη.

**Θεώρημα:** Έστω ότι για $x_0\in\mathbb{R}^n$ υπάρχει $b>0$ τ.ω.: $f:\bar{B}_b(x_0)\to\mathbb{R}^n$ είναι Lipschitz με σταθερά Lipschitz $k>0$. Τότε το ΠΑΤ:

$\underline{x}' = \underline{f}(x)$ , $\underline{x}(t_0) = \underline{x_0}$ έχει μοναδική λύση σε διάστημα $t \in J = [t_0 - a, t_0 + a]$ όπου $a < \min\left(\frac{b}{M}, \frac{1}{k}\right)$.
όπου $M = \max\{\|f(x)\| : x \in \bar{B}_b(x_0)\}$




$$a = \min\left\{\frac{b}{M}, \frac{1}{k}\right\} \Rightarrow J_0 = [t_0 - a, t_0 + a]$$

21/3/23

# Ύπαρξη και Μοναδικότητα Λύσεων

**Θεώρημα**: Ο χώρος $(C^0(E,\mathbb{R}^n), \mathbb{R}, \|\cdot\|_c)$ των συνεχών συναρτήσεων $f: E \to \mathbb{R}^n$, όπου $E \subseteq \mathbb{R}^n$ συμπαγές και $\|\cdot\|_c$ είναι η sup-νόρμα $\|f\|_c = \max_{x \in \mathbb{R}} \|f(x)\|$ είναι πλήρης (χώρος Banach)

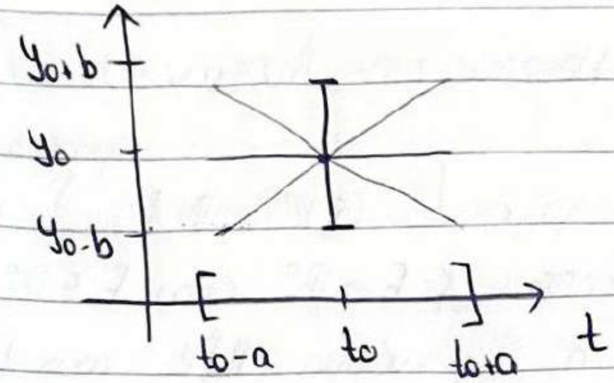
**Πόρισμα**: Κλειστό υποσύνολο χώρου Banach είναι πλήρες.

**Θεώρημα (Συστολής)**: Έστω S κλειστό υποσύνολο χώρου Banach $\mathcal{X} = (\mathcal{U}, \mathbb{R}, \|\cdot\|)$ και έστω ότι $T: S \to S$.
Τότε:

(1) $\exists$ μοναδικό $x^* \in S$: $T(x^*) = x^*$ (σταθερό σημείο του T)

(2) Η ακολουθία $(x_k)$ που ορίζεται από την $x_{k+1} = T(x_k)$, $k \in \mathbb{N}$, $x_1 \in S$ συγκλίνει $x_k \to x^*$. ($\|x_k - x^*\| \to 0$) καθώς $k \to \infty$.

**Θεώρημα (Picard-Lindelöf)**: Έστω ότι για $\underline{x_0} \in \mathbb{R}^n$ υπάρχει $b > 0$ : $f: \overline{B}_b(x_0) \to \mathbb{R}^n$ είναι συνάρτηση Lipschitz με σταθερά Lipschitz $k > 0$. Τότε το Π.Α.Τ. : $\underline{\dot{x}} = \underline{f}(x)$ $\underline{x}(t_0) = \underline{x_0} \in \mathbb{R}^n$ έχει μοναδική λύση σε διάστημα $J = [t_0 - a, t_0 + a]$ αν $a < \min\left(\frac{b}{M}, \frac{1}{k}\right)$ όπου $M = \max\{\|f(x)\| : x \in \overline{B}_b(x_0)\}$.




$a < \min\left(\frac{b}{M}, \frac{1}{k}\right)$

$M = \max\{\|f(x)\| : x \in \overline{B}_b(t_0)\}$

<u>Απόδειξη</u>

· Ορίζουμε πλήρη χώρο με νόρμα $\mathcal{X} = (C^0(J, \mathbb{R}), \mathbb{R} \|\cdot\|_C)$ όπου $J = [t_0 - a, t_0 + a]$

· Ορίζουμε υποσύνολο του $\mathcal{X}$ που αποτελείται από όλες τις $x \in C^0(J, \overline{B}_b(x_0))$

· Εφόσον η $f$ είναι Lipschitz στο $\overline{B}_b(x_0)$ είναι και (ομοιόμορφα) συνεχής και επομένως $\int_a^b f(x(\tau))d\tau$. συνεχής συνάρτηση $\forall x \in C^0(J, \overline{B}_b(x_0))$.

Άρα, το ΠΑΤ

$$\left.\begin{array}{l} x' = f(x),\ x(t_0) = x_0 \\ t \in J = [t_0 - a, t_0 + a] \end{array}\right\} \Leftrightarrow x(t) = x_0 + \int_a^b f(x(\tau))d\tau \quad t \in J.$$

· Θα δείξουμε ότι ο τελεστής $T(u) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(u(\tau))d\tau$, $t \in J$ απεικονίζει το $V := C^0(J, \overline{B}_b(x_0))$, στον εαυτό του

$T : V \to \underline{V}$

• $T(x)$ συνεχής (και συνεχής διαφορίσιμη) θα δείξουμε ότι $T(x) \in V$ αν $x \in V$. Ορίζουμε $M = \max\{\|f(x)\| : x \in \overline{B}_b(x_0)\}$
Για κάθε $t \in J = [t_0 - a, t_0 + a]$

$$\|T(x)(t) - x_0\| - \left| \int_{t_0}^{t} \underbrace{\|f(x(\tau))\|}_{\leq M} d\tau \right| \leq M \underbrace{|t - t_0|}_{a} \leq Ma \leq b$$

Αν επιλέξω $a \leq \frac{b}{M}$ και $V$ κλειστό υποσύνολο του $\mathcal{X}$.

• Θα δείξουμε ότι ο $T$ είναι τελεστής συστολής $V \to V$.
Έστω $x, y \in V$. Τότε αν $t \in J$

$$\|T(x)(t) - T(y)(t)\| = \|\cancel{x_0} + \int_{t_0}^{t} f(x(\tau))d\tau - \cancel{x_0} - \int_{t_0}^{t} f(y(\tau))d\tau\|$$

$$= \left\|\int_{t_0}^{t} [f(x(\tau)) - f(y(\tau))] d\tau\right\| \leq \left| \int_{t_0}^{t} \|f(x(\tau)) - f(y(\tau))\| d\tau \right|$$

$$\leq k \left| \int_{t_0}^{t} \|x(\tau) - y(\tau)\| d\tau \right| < k|t - t_0| \max_{\tau \in J} \|x(\tau) - y(\tau)\|$$

$$\leq ka \|x - y\|_c \quad \forall t \in J$$

$$\Rightarrow \|T(x) - T(y)\|_c \leq \underbrace{ka}_{c<1} \|x - y\|_c$$

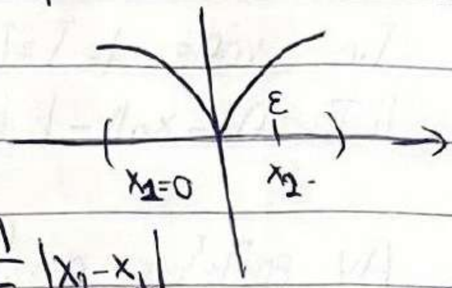
και αν $ka < 1 \Leftrightarrow a < \frac{1}{k}$ τότε ο $T$ είναι τελεστής συστολής.

• Αν $a \leq \frac{b}{M}$ τότε $T : V \to V$
-//- $a < \frac{1}{k}$ -//- $T$ είναι συστολή

Επομένως, αν $a < \min\{\frac{b}{M}, \frac{1}{k}\}$ τότε από το Θεώρημα Συστολής υπάρχει μοναδικό $x^* = T(x^*) \Leftrightarrow$ μοναδική λύση του ΠΑΤ.

Παράδειγμα Έστω το ΠΑΤ $x' = f(x)$, $f(x) = \sqrt{|x|}$

$x(0) = 0$. Η $f$ δεν είναι Lipschitz σε κάθε διάστημα $J > 0$.




Εάν $x_1 = 0, x_2 = \varepsilon > 0$

Τότε

$$|\underbrace{f(x_2)}_{\varepsilon} - \underbrace{f(x_1)}_{0}| = \varepsilon = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \varepsilon = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} |x_2 - x_1|$$

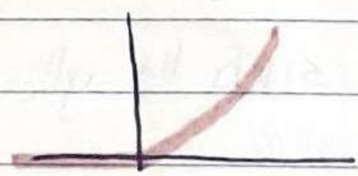
Αν υπάρχει $L > 0$ τ.ω. $|f(x_2) - f(x_1)| < L|x_2 - x_1|$ τότε

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} < L \iff L\sqrt{\varepsilon} > 1.$$

Εδώ υπάρχουν δύο λύσεις του ΠΑΤ:

$x_1(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$


$$\left.\begin{array}{ll} x_2(t) = \frac{1}{4}t^2 & t \geq 0 \\ \quad\quad\;\; = 0 & t < 0 \end{array}\right\}$$



$x_2 \in C^1(\mathbb{R})$

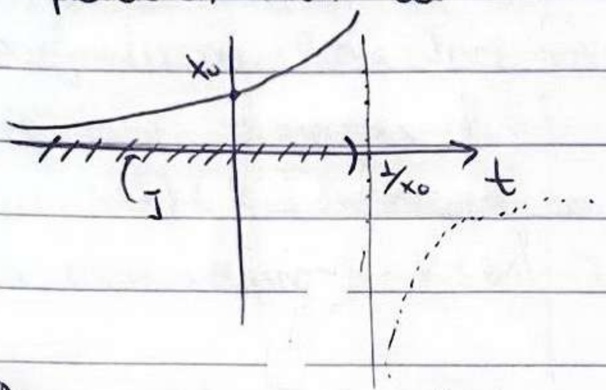
<u>Παράδειγμα</u> Εκτίμηση του μέγιστου διαστήματος ύπαρξης μοναδικότητας μέσω ΘPL.

Έστω το ΠΑΤ: $x' = x^2$, $x(0) = x_0 > 0$. Η εξίσωση λύνεται αναλυτικά. Αν $x \neq 0$.

$$\int \frac{dx}{x^2} = \int dt - c \Rightarrow -\frac{1}{x} = t - c \Rightarrow x(t) = c - t \quad c \in \mathbb{R}$$

$$x(0) = x_0 = \frac{1}{c} \Rightarrow c = \frac{1}{x_0} > 0$$

Η μοναδική λύση του ΠΑΤ: $x(t) = \dfrac{1}{\frac{1}{x_0} - t} = \dfrac{x_0}{1 - x_0 t}$

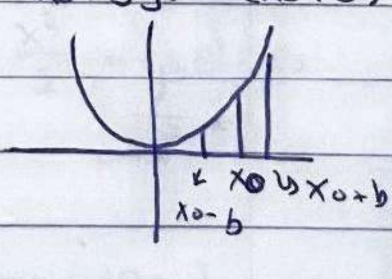



Άρα το μέγιστο διάστημα μοναδικότητας λύσης είναι $\mathcal{J} = (-\infty, \frac{1}{x_0})$ (Ανοικτό διάστημα)

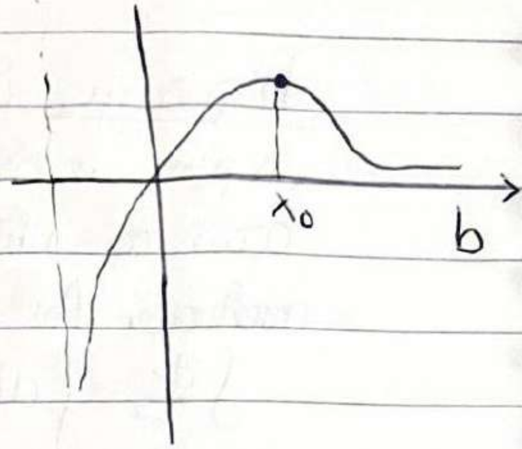
Εκρήγνυται σε πεπερασμένο χρόνο.

Το Θεώρημα εγγυείται την μοναδικότητα λύσης σε διάστημα $[t_0 - a, t_0 + a] = [-a, a] \ni 0$ όπου $a \leq \frac{b}{M}$.

Θέλω να επιλέξω $b > 0$ τ.ω. το $a$ να μεγιστοποιείται. $M = \max\{|\underbrace{f(x)}_{x^2}| : x_0 - b \leq x \leq x_0 + b\} = (x_0 + b)^2$



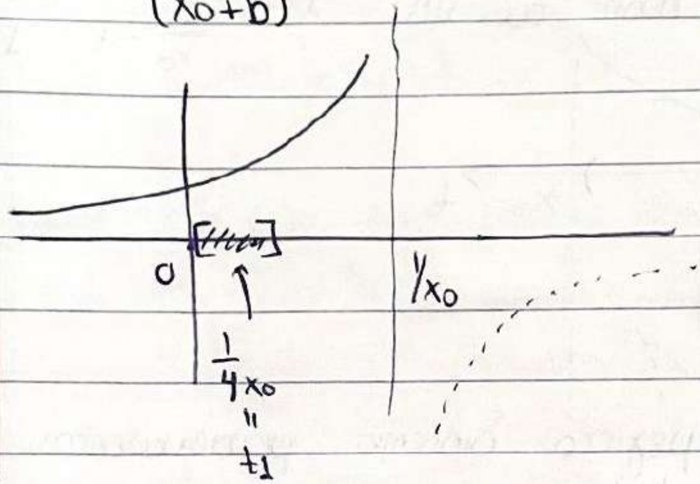
Επομένως, $a^* = \max\limits_{b \geq 0} \underbrace{\frac{b}{(x_0+b)^2}}_{g(b)}$




Τοπικό μέγιστο

$g'(b) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1(x_0+b)^2 - b\,2(x_0+b)}{(x_0+b)^2} = 0 \Rightarrow x_0 = b$$




Ορίζω νέο ΠΑΤ : $x' = x^2$, $x(t_1) = x_1$, $t_1 = \frac{1}{4x_0}$

$$x_1 = \frac{1}{\frac{1}{x_0} - t_1} = \frac{1}{\frac{4}{4x_0} - \frac{1}{4x_0}} = \frac{1}{\frac{3}{4x_0}} \Rightarrow x_1 = \frac{4x_0}{3}.$$

Εδώ η λύση επεκτείνεται στο διάστημα $[0, t_2]$ όπου $t_2 = t_1 + \frac{1}{4x_1}$. Άρα, $t_2 = \frac{1}{4x_0} + \frac{1}{4\frac{4x_0}{3}} = \frac{1}{4x_0} + \frac{3}{16x_0} =$

$= \frac{7}{16x_0}$

**Θεώρημα**: (Μέγιστο διάστημα μον. λύσης)
Έστω $E$ ανοικτό και $f: E \to \mathbb{R}^n$ ($E \subseteq \mathbb{R}^n$) και η $f$ τοπικά Lipschitz στο $E$. Τότε $\exists$ μέγιστο διάστημα $J = (a, \beta)$, $t_0 \in J$, τέτοιο ώστε το ΠΑΤ: $x' = f(x)$, $x(t_0) = x_0$ έχει μοναδική λύση $x: J \to E$

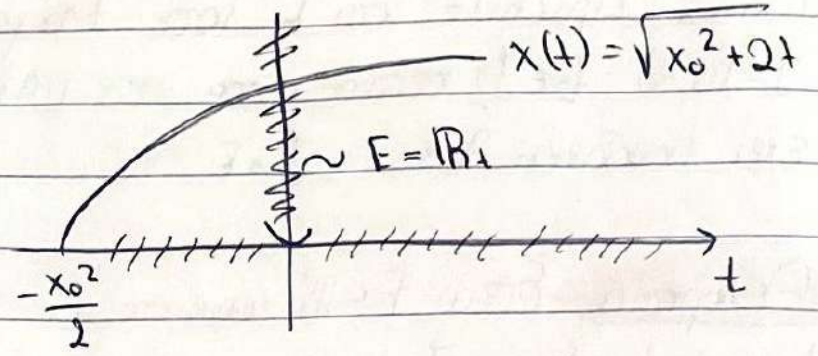
**Θεώρημα**: Έστω $E \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό και $f: E \to \mathbb{R}^n$ τοπικά Lipschitz. Έστω $J = (a, \beta)$ είναι το μέγιστο διάστημα ύπαρξης/μοναδ. λύσης. Τότε αν $\beta \in \mathbb{R}$ (πεπερασμένο) τότε για κάθε συμπαγές $K \subseteq E$ υπάρχει κάποιο $t \in (t_0, \beta)$ τ.ω. $x(t) \notin K$. [Αντίστοιχα αν $a \in \mathbb{R}$ πεπερασμένο τότε για κάθε συμπαγές $K \subseteq E$ $\exists b \in (a, t_0)$ τ.ω. $x(t) \in K$]

**Πόρισμα** Αν $\beta \in \mathbb{R}$ (πεπερασμένο)
(1) Το όριο $\lim_{t \to \beta} x(t) \notin \mathbb{R}$

ή (2) $\lim_{t \to \beta} x(t) \in \partial E$

**Παράδειγμα** Έστω το ΠΑΤ: $x' = f(x) = \frac{1}{x}$ και $x(0) = x_0 > 0$
Εφόσον η $f$ δεν ορίζεται στο $x = 0$. Ορίζαμε $E = \mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R},\ x > 0\}$ (εφόσον $x(0) = x_0 > 0$).
Αναλυτικά, $\int x\,dx = \int dt + c' \Rightarrow \frac{x^2}{2} = t + c' \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 = 2t + c$
$x^2(0) = x_0^2 = c \Rightarrow x(t) = \sqrt{x_0^2 + 2t}$,
Εφόσον $x(0) = x_0 > 0 \Rightarrow x(t) > 0$ για κάθε $t$:
$x_0^2 + 2t > 0 \Rightarrow t > -\frac{x_0^2}{2}$.

Το μέγιστο διάστημα ύπαρξης/μοναδικ λύσης είναι $J=\left(-\frac{x_0^2}{2}, \infty\right)$




$$\lim_{t\to\left(-\frac{x_0^2}{2}\right)^+} x(t)=0\in\partial E.$$

24/3/23

## Ένα βασικό Θεώρημα

**Θεώρημα** (Μέγιστο διάστημα ύπαρξης/μοναδ. λύσης)
Έστω $E \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοιχτό, και $f: E \to \mathbb{R}^n$ τοπικά Lipschitz. Τότε $\exists$ μ.δ. $J=(\alpha,\beta)$ ανοιχτό τ.ω. το ΠΑΤ: $x'=f(x)$, $x(t_0)=x_0 \in \mathbb{R}^n$ να έχει μοναδική λύση. Επιπλέον, αν $\beta \in \mathbb{R}$ (πεπερασμένο) τότε $\forall K \subseteq E$ (συμπαγή) $\exists t \in (t_0,\beta)$ τ.ω $x(t) \notin K$.

**Λήμμα (Gronwall)**: Έστω $g,k:[0,a] \to \mathbb{R}$ συνεχής και $k(t) \geq 0$ $\forall t \in [0,a]$. Έστω $g(t) \leq G(t) = C + \int_0^t k(s)g(s)ds$
Τότε $g(t) \leq Ce^{\int_0^t k(s)ds}$ $\forall t \in [0,a]$

Απόδειξη

$G(t) \in C^1([0,a])$ και $G(0)=C$.

Παραγωγίζοντας $G'(t) = k(t)g(t) \leq k(t)G(t)$ $\forall t \in [0,a]$

$\Rightarrow G'(t) - k(t)G(t) \leq 0 \Rightarrow e^{-\int_0^t k(s)ds}(G'(t) - k(t)G(t)) \leq 0$

$\Rightarrow (e^{-\int_0^t k(s)ds} G(t))' \leq 0 \Rightarrow e^{-\int_0^t k(s)ds} G(t) \leq e^{-\int_0^t k(s)ds} G(t)\Big|_{t=0}$

$\Rightarrow g(t) \leq G(t) \leq e^{-\int_0^t k(s)ds}$

## Ολική Ύπαρξη Λύσεων

Έστω ΠΑΤ: $x'=f(x)$, $x(0)=x_0 \in \mathbb{R}^n$. Εξετάζουμε συνθήκες κάτω από τις οποίες το ΠΑΤ έχει ολική λύση ($J=\mathbb{R}$, $J=[t_0,\infty]$)

**Θεώρημα** Αν $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ και τοπικά Lipschitz και φραγμένη τότε το ΠΑΤ έχει μοναδική λύση σε όλο το $\mathbb{R}$.

**Απόδειξη** Εφόσον $f$ τοπικά Lipschitz, τότε $\exists$ μοναδ. λύση στο μέγιστο διάστημα $J = (a, b) \ni 0$.
Έστω $b \in \mathbb{R}$ (πεπερασμένο). Εφόσον η $f$ φραγμένη στο $\mathbb{R}^n$ τότε $\exists m > 0$ τ.ω. $\|f(x)\| < m \ \forall x \in \mathbb{R}^n$.
Τότε αν $t \in [0, b)$:

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(x(\tau))d\tau \Rightarrow \|x(t) - x_0\| \leq \int_0^t \underbrace{\|f(x(\tau))\|}_{\leq m} d\tau$$

$$\leq mt \leq mb \quad \forall t \in [0, b)$$

$\Rightarrow x(t) \in \overline{B}_{mb}(x_0) := K$ (συμπαγές) αδύνατον!

$\Rightarrow b = \infty$. Παρόμοια $a = -\infty$ και $J = \mathbb{R}$.

**Θεώρημα** Έστω ότι $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ολικά Lipschitz.
(δηλ. $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n : \|f(x_1) - f(x_2)\| \leq L \|x_1 - x_2\|$, $L > 0$)
Τότε το ΠΑΤ: $x' = f(x)$, $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ έχει μοναδική λύση σε όλο το $J = \mathbb{R}$

**Απόδειξη**
Έστω ότι $J = (a, b)$ είναι το μέγιστο διάστημα υπαρξης/μοναδ. της λύσης. Έστω $b \in \mathbb{R}$ (πεπερασμένο) Έστω $t \in [0, b)$. Τότε

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(x(\tau))d\tau \quad t \in [0, b)$$

$$x(t) - x_0 = \int_0^t f(x(\tau)) - f(x_0) + f(x_0) \,) d\tau$$

$$\Rightarrow \|x(t) - x_0\| = \int_0^t \|f(x(\tau)) - f(x_0)\| + \|f(x_0)\| \,) d\tau$$

$$\Rightarrow \|x(t)-x_0\| \le \int_0^t \Big( \underbrace{\|f(x(\tau)) - f(x_0)\|}_{\le k\|x(t)-x_0\|} + \|f(x_0)\|\Big) d\tau$$

$$\Rightarrow \underbrace{\|x(t)-x_0\|}_{g(t)} \le \underbrace{\|f(x_0)\| b}_{c} + \int_0^t \underbrace{k}_{>0} \underbrace{\|x(t)-x_0\|}_{g(t)} d\tau$$

$$\Rightarrow \|x(t)-x_0\| \le b\|f(x_0)\| e^{\int_0^t k ds} = b\|f(x_0)\|e^{kt} \le b\|f(x_0)\|e^{kb}$$

$\forall t \in (a,b)$

$\Rightarrow x(t) \in \bar{B}_{b\|f(x_0)\|e^{kt}}(x_0)$ συμπαγές $\Rightarrow b=\infty$, παρόμοια $a=-\infty$

**Θεώρημα** Έστω $f: E \to \mathbb{R}^n$ τοπικά Lipschitz, όπου $E$ υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και ανοιχτό. Έστω $K \subseteq E$ συμπαγές και έστω $x(0) \in K$. Έστω ότι κάθε λύση του $x' = f(x)$, $x(0) = x_0$ περιέχεται στο $K$ $\forall t > 0$. Τότε η λύση είναι μοναδική σε όλο το $J = [0, \infty)$

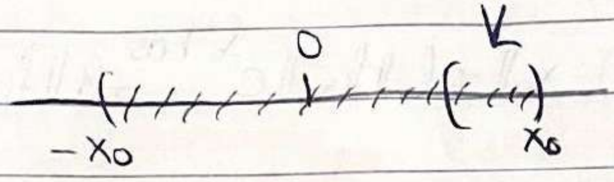
**Απόδειξη**

Εφόσον η $f$ είναι τοπικά Lipschitz τότε υπάρχει μοναδική λύση σε μέγιστο διάστημα $J = [t_0, b)$. Έστω ότι $b \in \mathbb{R}$. Εφόσον η λύση "φεύγει" έξω από κάθε συμπαγές υποσύνολο του $E$, τότε θα φύγει και έξω από το $K$ καθώς $t \to b^-$. Αδύνατον εξ υποθέσεως. Άρα $J = [0, \infty)$

Παράδειγμα Έστω το ΠΑΤ: $x' = f(x) = -x^3$, $x(0) = x_0$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \in C^1(\mathbb{R})$, $f' = -3x^2$ δεν είναι φραγμένη στο $\mathbb{R} \Rightarrow f$ τοπικά Lipschitz (μόνο)

Έστω $K = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq |x_0|\}$




$$\left.\begin{array}{l} \text{Αν } t \geq 0 \text{ και } x(t) > 0 \Rightarrow x' < 0 \text{ τότε } x \downarrow \\ \text{Αν } t \geq 0 \text{ και } x(t) < 0 \Rightarrow x' > 0 \text{ τότε } x \uparrow \end{array}\right\}$$

Άρα $\nexists\, t \geq 0$ τ.ω. $x(t) \notin K$, τελικά λύση ορίζεται $\forall t \geq 0$.

28/3/23

## Συναρτήσεις μεταφοράς

Γραμμικά - Χρονικά αναλλοίωτα

$\Sigma(A,B,C,D)$ $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $B\in\mathbb{R}^{n\times m}$, $C\in\mathbb{R}^{p\times n}$, $D\in\mathbb{R}^{p\times m}$

$$\left.\begin{aligned}\underline{\dot{x}} &= A\underline{x}+B\underline{u}\\ \underline{y} &= C\underline{x}+D\underline{u}\end{aligned}\right\}\ x(0)=x_0$$

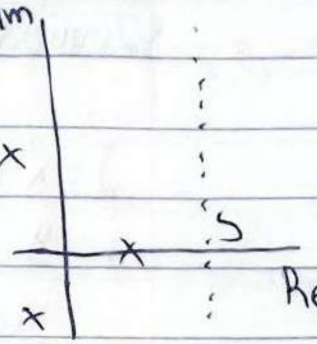
$$\mathcal{L}(x)=\int_0^{\infty} x(t)e^{-st}dt$$

$$\mathcal{L}(\dot{x}) = s\mathcal{L}(x)-x(0)$$

Έστω $\mathcal{L}(u(t)) = \hat{u}(s)$ $\quad L(y(t)) = \hat{y}(s)$

$$s\underline{\hat{x}}(s) = A\hat{x}(s)+B\hat{u}(s)$$

$$\Rightarrow \underline{\hat{x}}(s) = (sI_m-A)^{-1}B\underline{\hat{u}}(s) \qquad (Re(s)>Re(\lambda_i(A)))$$




$$\hat{y}(s) = C\underline{\hat{x}}(s)+D\underline{\hat{u}}(s)$$

$$\Rightarrow \underline{\hat{y}}(s) = [\underbrace{C(sI-A)^{-1}B+D}_{\hat{G}(s)}]\hat{u}(s)$$

$\hat{G}(s)$ συνάρτηση μεταφοράς

$$\underline{\hat{u}}(s)\rightarrow\boxed{\hat{G}(s)}\longrightarrow\underline{\hat{y}}(s)$$

$$(sI-A)^{-1}=\frac{adj(sI-A)}{\varphi(s)}, \quad \varphi(s)=\det(sI-A)$$

$$\hat{G}(s)=\frac{C\,adj(sI-A)B+\varphi(s)D}{\varphi(s)}=\frac{N(s)}{\varphi(s)}$$

$$G_{ij}(s)=\frac{N_{ij}(s)}{\varphi(s)} \qquad \partial N_{ij}\le n=\partial\varphi(s)$$

Αν $D_{ij}=0$, τότε $\partial N_{ij}\le n-1<\partial\varphi$ (αυστηρά κανονική

αν $\forall D_{ij}=0$ $\forall i=1,..,p$
$\forall j=1,..,m$

## Παράδειγμα

$\Sigma(A,B,C,D)$ $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2}\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix}$, $C=[1\ 0]$, $D=0$

(άρα $n=2$, $m=p=1$)

$$adj(sI_2-A)=adj\begin{bmatrix}s & -1\\ \frac{1}{2} & s+\frac{3}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s+\frac{3}{2} & 1\\ -\frac{1}{2} & s\end{bmatrix}$$

$$\phi(s)=\det(sI_2-A)=s^2+\frac{3}{2}s+\frac{1}{2}=(s+1)(s+\frac{1}{2})$$ (πόλοι της $\hat{G}(s)$)

$$\hat{G}(s)=\frac{[1\ 0]\begin{bmatrix}s+\frac{3}{2} & 1\\ -\frac{1}{2} & s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix}}{\phi(s)}=\frac{\frac{1}{2}}{(s+1)(s+\frac{1}{2})}=\frac{1}{(s+1)(2s+1)}$$

## Συνάρτηση Συχνοτήτων

$$\Sigma:\left.\begin{aligned}\underline{x}'&=A\underline{x}+B\underline{u}\\ \underline{y}&=C\underline{x}+D\underline{u}\\ \underline{x}(0)&=x_0\end{aligned}\right\}\quad \left.\begin{aligned}&Re\lambda_i(A)<0\\ &i=1,2,\dots,n\end{aligned}\right\}\ \Sigma \text{ ασ. ευσταθείς}$$

Επιλέγω $u(t)=e^{\lambda t}$, $\lambda=i\omega$, $\omega\in\mathbb{R}$, $t\geq 0$

$$\underline{x}(t)=e^{At}x_0+\int_0^t e^{A(t-\tau)}B\underbrace{\underline{u}(\tau)}_{e^{\lambda t}\underline{u}_0}d\tau \quad t\geq 0$$

Αλλαγή μεταβλητών $p=t-\tau \Rightarrow dp=-d\tau$, $p=0\Rightarrow \tau=t$

$$\underline{x}(t)=e^{At}\underline{x_0}+\int_0^t e^{Ap}Be^{\lambda(t-p)}dp\,\underline{u_0}$$

$$\underline{x}(t)=e^{At}\underline{x_0}+\int_0^t e^{(A-\lambda I)p}dp\,(Be^{\lambda t}\underline{u_0})=$$

$$=e^{At}\underline{x_0}\left[e^{(A-\lambda I)p}(A-\lambda I)^{-1}\right]_{p=0}^{t}Be^{\lambda t}\underline{u_0}$$

Παρατήρηση (παράγωγος πίνακας)

$(e^{At})' = Ae^{At} = e^{At} \cdot A$

$\lambda_i(A-\lambda I) = \lambda_i(A) - \tau\omega \neq 0$

$\underline{x}(t) = e^{At}\underline{x_0} + [e^{(A-\lambda I)t} - I](A-\lambda I)^{-1} B e^{\lambda t}\underline{u_0} =$

$= e^{At}\underline{x_0} + e^{(A-\lambda I)t}(A-\lambda I)^{-1} B e^{\lambda t}\underline{u_0} - (A-\lambda I)^{-1} B e^{\lambda t}\underline{u_0} =$

$= e^{At}[\underline{x_0} + (A - i\omega I_n)^{-1} B\underline{u_0}] + (i\omega I - A)^{-1} B\underline{u}(t)$

$y(t) = C \cdot x(t) + Du(t) = Ce^{At}\xi + [\underbrace{C(i\omega I - A)^{-1} \cdot B + D}_{G(i\omega)}]\underline{u}(t)$

Επομένως, $\underline{y}(t) = \underbrace{y_{tr}}_{\substack{\text{τείνει στο } 0 \\ \to 0}}(t) + G(i\omega)\underline{u}(t)$

$(e^{At})_{ij} = f_{ij}(t) = \sum a_j t^{k_j} e^{\lambda_j t}, \ k_j \geq 0, \ \lambda_j = \sigma_j + i\omega_j, \ \sigma_j < 0$

$|f_{ij}(t)| \leq \sum_j |a_j| t^{k_j t} e^{\sigma_j t} \to 0$ καθώς $t \to \infty$

$\Rightarrow e^{At} \to 0$ καθώς $t \to \infty$

Συνεπώς, $\|\underset{\to 0}{y_{tr}}\| \leq \|C\| \|e^{At}\| \|\xi\|$ καθώς $t \to \infty$

Επομένως, $y(t) - y_{tr}(t) = G(i\omega)e^{i\omega t}\underline{u_0}$

Έστω, $\underline{u_0} = (I_n)_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ← k γραμμή

$y(t) - y_{tr}(t) = \begin{bmatrix} G_{1k}(i\omega)e^{i\omega t} \\ \vdots \\ G_{pk}(i\omega)e^{i\omega t} \end{bmatrix}$ και $y_e(t) - (y_{tr}(t))_e = G_{ek}(i\omega) e^{i\omega t}$

$G_{ek}(i\omega) = P_{ek}(\omega)e^{i\phi_{ek}(\omega)}, \ P_{ek}(\omega) = |G_{ek}(i\omega)|, \ \phi_{ek}(\omega) = \arg(G_{ek}(\omega))$

$$y_e(t) - \overset{\to 0}{(y_{tr}(t))_e} = P_{ek}(\omega)e^{i(\omega t + \varphi_{ek}(\omega))}$$

$\omega \to G(i\omega)$ $\omega \in \mathbb{R}$ $G(i\omega) \in \mathbb{C}^{p\times m}$

$\omega \to |G_{ek}(i\omega)|$ συνάρτηση μέτρου συχνοτήτων

$\omega \to \Phi_{ek}(\omega)$ "φάσης"

Παράδειγμα $x' = -x + u$

$y = x$

$\hat{u}(s) \to \boxed{\frac{1}{s+1}} \to \hat{y}(s)$ $\frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)} = \frac{1}{s+1} \Rightarrow y' + y = u$

Συναρ. Συχνοτήτων $\hat{G}(i\omega) = \frac{1}{1+i\omega}$ $|\hat{G}(i\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}$ (LP φίλτρο) $(=a)$

$\arg[\hat{G}(i\omega)] = -\tan^{-1}(\omega)$ $(=-\phi)$

$u(t) = \cos\omega t$ $t \geq 0$, $y(t) = \underbrace{Ae^{-t}}_{t_r \to 0} + a\cos(\omega t + \phi)$

$a = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}$, $\phi = \tan^{-1}(\omega)$.

Ισοδύναμα Συστήματα

Έστω $\left.\begin{aligned} x' &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned}\right\} \Sigma$

$(A,B,C,D) \to \hat{G}(s) = D + C(s\underline{I} - A)^{-1}B$

Έστω $\underline{\hat{x}} = P^{-1}\underline{x}$, $\det(P) \neq 0$.

Ποιό είναι το αντίστοιχο σύστημα κ.χ

$$\left.\begin{aligned} \hat{x}' &= P^{-1}x' = P^{-1}(Ax + Bu) = P^{-1}AP\underline{\hat{x}} + P^{-1}B\underline{u} \\ \underline{y} &= C\underline{x} + D\underline{u} = CP\underline{\hat{x}} + D\underline{u} \end{aligned}\right\}$$

$$\Sigma(A,B,C,D) \sim \Sigma(\overbrace{P^{-1}AP}^{\hat A},\ \overbrace{P^{-1}B}^{\hat B},\ \overbrace{CP}^{\hat C},\ D)$$

Η συναρ. μεταφοράς είναι αναλλοίωτη

$$\hat G = CP(sI_n - P^{-1}AP)^{-1}P^{-1}B + D =$$
$$= CP(P^{-1}(sI-A)P)^{-1}P^{-1}B + D =$$
$$= \underbrace{CPP^{-1}}_{=I}(sI-A)^{-1}\underbrace{PP^{-1}}_{=I}B + D =$$
$$= C(sI-A)^{-1}B + D$$

$$\Phi(\hat A) = \det[sI - P^{-1}AP] = \det[P^{-1}(sI-A)P] =$$
$$= \cancel{\det(P^{-1})}\det(sI-A)\cancel{\det(P)} = \Phi_A(s)$$

**Πρόβλημα Πραγματοποίησης** (μπορεί να λέγεται και αλλιώς)

μέτρο

Έστω $\hat g(s) = \dfrac{\tilde B(s)}{a(s)} = d + \dfrac{B(s)}{a(s)}$, $d \in \mathbb{R}$, $\partial B < \partial a = n$

$\hat u(s) \to \boxed{\dfrac{B(s)}{a(s)}} \to \hat y(s)$ $\quad \dfrac{1}{a(s)} = \dfrac{\hat z(s)}{\hat u(s)}$ $\quad d \neq \dfrac{B(s)}{a(s)}$

$a(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0$

$\hat u(s) \to \boxed{\dfrac{1}{a(s)}} \xrightarrow{\hat z(s)} [B(s)] \to \hat y(s)$

$\Rightarrow (s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0)\hat z(s) = \hat u(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}}$

$\underline{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n] \Rightarrow z^{(n)} + a_{n-1}z^{(n-1)} + \dots + a_0 z(t) = u(t)$

$\Rightarrow x_1 = z,\ x_2 = z',\ \dots,\ x_{n-1} = z^{(n-2)},\ x_n = z^{(n-1)}$.

$$x' = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ & 0 & & & 1 \\ & & \cdots & & 0 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\underline{b}} u$$

A companion, $(A, \underline{B})$ κανον. μορφή ελεγξιμότητας

$$\hat{y}(s) = B(s)\hat{z}(s) = (b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \dots + b_0)\hat{z}(s)$$

$$\xrightarrow{L^{-1}} y(t) = b_{n-1}\underbrace{z^{(n-1)}}_{x_n} + b_{n-2}\underbrace{z^{(n-2)}}_{x_{n-1}} + \dots + b_0\underbrace{z(t)}_{x_1}$$

$$y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-1} \end{bmatrix}}_{\underline{c}^T} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + [0]u$$

Επομένως, $\frac{\tilde{B}(s)}{a(s)} \sim (A, \underline{b}, \underline{c}^T, d)$

$$\hat{g}(s) = \frac{2s^2+s}{s^2+3s+2} = 2 + \frac{\gamma s+\delta}{s^2+3s+2} = \frac{2s^2 + \overset{1}{(6+\gamma)}s + \overset{0}{\delta+4}}{s^2+3s+2}$$

$$\Rightarrow \hat{g}(s) = \underbrace{2}_{\tilde{d}} - \frac{5s+4}{s^2+3s+2} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{c}^T = \begin{bmatrix} -4 & -5 \end{bmatrix}, \quad d = 2$$

## Συνδεσμολογία

1) Σειρά

$$y \leftarrow \underset{\hat{G}_2}{\boxed{\Sigma_2}} \leftarrow \underset{\hat{G}_1}{\boxed{\Sigma_1}} \leftarrow u$$

$$\hat{y}(s) = \hat{G}_2(s)\hat{z}(s) = \underbrace{\hat{G}_2(s)\hat{G}_1(s)}_{G(s)}u(s)$$

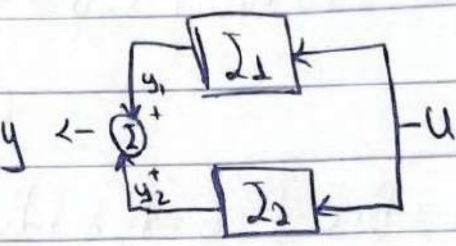
$$\Sigma_1: \left.\begin{aligned} x_1' &= A_1x_1 + B_1u \\ z &= C_1x_1 + D_1u \end{aligned}\right\} \quad \Sigma_2: \left.\begin{aligned} x_2' &= A_2x_2 + B_2z \\ y &= C_2x_2 + D_2z \end{aligned}\right\} \Longrightarrow$$

$$x_2' = A_2 x_2 + B_2 C_1 x_1 + B_2 D_1 u$$
$$y = C_2 x_2 + D_2 C_1 x_1 + D_2 D_1 u$$

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 D \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} D_2 C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_1 D_2 \end{bmatrix} u$$

2) Παράλληλη




$$\hat{y}_1(s) = \hat{G}_1(s)\hat{u}(s)$$
$$\hat{y}_2(s) = \hat{G}_2(s)\hat{u}(s)$$
$$\hat{y}(s) = \hat{y}_1(s) + \hat{y}_2(s) = \underbrace{(\hat{G}_1 + \hat{G}_2)}_{\hat{G}(s) \text{ ισοδ. σ.κ.}}\hat{u}(s)$$

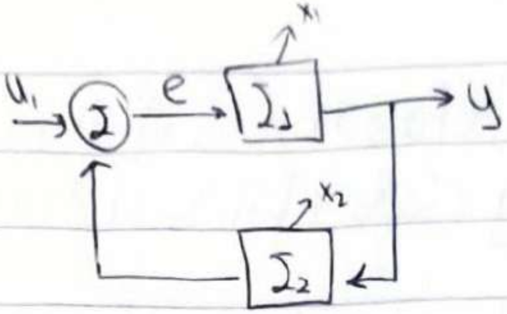
$$\left.\begin{aligned} x_1' &= A_1 x_1 + B_1 u \\ y_1 &= C_1 x_1 + D_1 u \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} x_2' &= A_2 x_2 + B_2 u \\ y_2 &= C_2 x_2 + D_2 u \end{aligned}$$

$$y = y_1 + y_2$$

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} C_1 & \cdots & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_1 + D_2 \end{bmatrix} u$$

3) Ανάδραση




$$\left.\begin{aligned} y(s) &= \hat{G}_1 \hat{e}(s) \\ P(s) &= \hat{G}_2 \hat{y}(s) \\ e &= u - i \end{aligned}\right\} \Rightarrow \hat{y} = \hat{G}_1(\hat{u} - \hat{p}) = \hat{G}_1 u - \hat{G}_1 \hat{G}_2 \hat{y}$$

$$(I + \hat{G}_1 \hat{G}_2)\hat{y} = \hat{G}_1 \hat{u}$$

$$\Rightarrow \hat{y}(s) = (I + \hat{G}_1 \hat{G}_2)^{-1} \hat{G}_1 \hat{u} = \underbrace{\hat{G}_1 (I + \hat{G}_2 \hat{G}_1)^{-1}}_{\hat{G}(s)} \hat{u}$$

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= A_1 x_1 + B_1 e \\ y &= C_1 x_1 + D_1 e \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} x_2' &= A_2 x_2 + B_2 y \\ p &= C_2 x_2 + D_2 y \end{aligned}$$

$$e = u - p$$

$$y = C_1 x_1 + D_1(u - p) = C_1 x_1 + D_1 u_1 - D_1 (C_2 x_2 + D_2 y)$$

$$\Rightarrow (I + D_1 D_2) y = C_1 x_1 - D_1 C_2 x_2 + D_1 u$$

$$\Rightarrow \underline{y = L_1 C_1 x_1 - L_1 D_1 C_2 x_2 + L_1 D_1 u}$$

$$p = C_2 x_2 + D_2 L_1 C_1 x_1 - D_2 L_1 D_1 x_2 + D_2 L_1 D_1 u \Rightarrow$$

$$p = D_2 L_1 C_1 x_1 + (C_2 - D_2 L_1 D_1 C_2) x_2 + D_2 L_1 D_1 u$$

$$x_1' = A_1 x_1 + B_1 u - B_1 \overset{p}{(\dots)}$$

$$x_2' = \dots$$

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad & \quad \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} \quad & \quad \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [\quad] u.$$