4/4/23

Ελεγξιμότητα - Προκαταρκτικά

<u>Ορισμός</u> $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ θετικά ορισμένος $(p>0)$ (θετ. ημιορισμένος $p\geq 0$) $\forall x \in O$ $(x^T A x \geq 0)$
P αρνητικά ορισμένος $P<0$, (αρν. ημιοριζμ $p\leq 0$)
αν $-P>0$ $(-P\geq 0)$

<u>Παρατήρηση</u>

$$\underline{x}^T P \underline{x} = \underline{x}^T \Big(\underbrace{\frac{P+P^T}{2}}_{P_s} + \underbrace{\frac{P-P^T}{2}}_{P_a} \Big) \underline{x} = \underline{x}^T P_s \underline{x}$$

εξαρτάται μόνο από το συμμετρικό πίνακα του P.

$\underline{x}^T \frac{P-P^T}{2} \underline{x} = 0$, διότι $P_a = -P_a^T \Rightarrow \underline{x}^T \underbrace{(P_a + P_a^T)}_{0} \underline{x} = 0$

<u>Ορίζω:</u>

$$\left.\begin{aligned} S_+^n &= \{A = A^T \in \mathbb{R}^{n\times n} \ A>0\} \\ \bar{S}_+^n &= \{A = A^T \in \mathbb{R}^{n\times n} \ A\geq 0\} \\ S^n &= \{A = A^T \in \mathbb{R}^{n\times n}\} \end{aligned}\right\} S_+^n \subseteq \bar{S}^n \subseteq S^n$$

Άρα όταν μιλάω για θετικά ορισμένο → θα μιλάω για συμμετρία.

<u>Ιδιότητες</u>

1) S_+^n κυρτός κώνος $\mathbb{R}^{n\times n}$

$$\left.\begin{aligned} &\lambda \in [0,1] \\ &P_1, P_2 \in S_+^n \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lambda p_1 + (1-\lambda) p_2 \in S_+^n$$

κώνος → $\lambda>0$, $p \in S_+^n \Rightarrow \lambda p \in S_+^n$

2) $P \in S_+^n \Rightarrow \det(P) \neq 0$ (εάν $\det P = 0 \Rightarrow \exists x \neq 0$ τ.ώ.
$Px = 0 \Rightarrow x^T P x = 0$ Άτοπο)

3) $P \in S_+^n \Rightarrow \lambda_i(P) > 0$ αφού συμμετρικό $\Rightarrow$

$P \in \bar{S}_+^n \Rightarrow \lambda_i(P) \geq 0$ πραγματικές ιδιοτιμές

$P = u \Lambda u^T$, $uu^T = I_n$ (u: ορθογώνιος), $\Lambda = diag(\Lambda)$

$u_j = (u)_j$ (j: στήλη του u)

$$\Rightarrow u_j^T P u_j = u_j^T [u_1 \cdots u_n] \Lambda \begin{bmatrix} u_1^T \\ \vdots \\ u_n^T \end{bmatrix} = e_j^T \Lambda e_j = d_j > 0$$

αφού η τετραγωνική μορφή είναι θετική

$u_j^T u_i = 0$, $j \neq i$

$u_j^T u_i = 1$, $i = j$

4) $P \in \bar{S}_+^n \Rightarrow x^T P x = 0 \Leftrightarrow Px = 0$

$(\Leftarrow)$ προφανώς $Px = 0 \Rightarrow x^T P x = x^T 0 \Rightarrow x^T P x = 0$

$(\Rightarrow)$ $x^T P x = 0$, $x^T u \Lambda u^T x = x^T [u_1 \; u_2] \begin{bmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^T \\ u_2^T \end{bmatrix} x > 0$

$\Lambda_1 = diag(\lambda_1) > 0$

$\Rightarrow x^T u_1 \Lambda_1 u_1^T x = 0 \Rightarrow x^T u_1 \Lambda_1^{1/2} \Lambda_1^{1/2} u_1^T x = 0$

$\Rightarrow \| \Lambda_1^{1/2} u_1^T x \|^2 = 0 \Rightarrow \Lambda_1^{1/2} u_1^T x = 0$

$\overset{*\Lambda_1 u_1}{\Rightarrow} u_1 \Lambda_1 u_1^T x = 0 \Rightarrow P \cdot x = 0$

5) $P(t) = \int_0^t Q(\tau) Q^T(\tau) d\tau$, $t \geq 0$ $t \in \mathbb{R}_+$

$Q \in C^0([0,t], \mathbb{R}^{n \times m})$

τότε $P(t) = P^T(t) \geq 0$ συμμετρικός, θετικός ημιορισμ. $\forall t > 0$

και $P(t_2) \geq P(t_1)$ αν $t = t_2 > t_1 \geq 0$

$\Downarrow$

$P(t_2) - P(t_1) \geq 0$ θετικά ορισμένος

Επίσης, εάν $\underline{x}^T P(t)\underline{x} = 0,\ t>0 \Rightarrow Q(t)x \equiv 0\ \forall \tau \in [0,t]$

$$0 = \underline{x}^T P(t)\underline{x} = \int_0^t \underline{x}^T Q(\tau)Q^T(\tau)x\,d\tau = \int_0^t \|Q^T(t)x\|\,d\tau \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q^T(\tau)x = 0 \quad \forall \tau \neq 0.$$

2. Θεώρημα Cayley-Hamilton

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $p(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = a_0 + a_1\lambda + \dots + a_n\lambda^n$

τότε $p(A) = O_{n\times n}$ $(\Leftrightarrow a_0 I_n + a_1 A + \dots + a_n A^n = 0)$

$(\Rightarrow A^k \in \langle I, A, \dots, A^{n-1}\rangle,\ k \in \mathbb{N}_0)$

Απόδειξη

Ορίζω $B(\lambda) = \mathrm{adj}(A - \lambda I_n) = B_0 + \lambda B_1 + \dots + \lambda^{n-1} B_{n-1}$

$$(A - \lambda I_n)(B_0 + B_1\lambda + \dots + B_{n-2}\lambda^{n-2} + B_{n-1}\lambda^{n-1}) =$$

$$= (a_0 + a_1\lambda + \dots + a_n\lambda^n) I_n.$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} -B_{n-1} &= a_n I_n \\ AB_{n-1} - B_{n-2} &= a_{n-1} I_n \\ &\vdots \\ AB_1 - B_0 &= a_1 I_n \\ AB_0 &= a_0 I_n \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} -A^n B_{n-1} &= a_n A^n \\ A^n B_{n-1} - A^{n-1} B_{n-2} &= A^{n-1} a_{n-1} \\ &\vdots \\ A^2 B_1 - AB_0 &= A a_1 \\ AB_0 &= a_0 I_n \\ \hline 0 &= p(A) \end{aligned}$$

3) A-αναλλοίωτοι υποχώροι

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και $V \subseteq \mathbb{R}^n \Rightarrow V$ A-αναλλοίωτος εάν $AV \subseteq V$ $(\forall \underline{x} \in V \Rightarrow A\underline{x} \in V)$

Παράδειγμα

$R(A) = \{A\underline{x} : \underline{x} \in \mathbb{R}^n\}$

$N(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}$

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$ τότε $\langle e_1, e_2, \dots e_k \rangle$ A-αναλλοιωτ. $k \in \{1, 2, \dots, n\}$

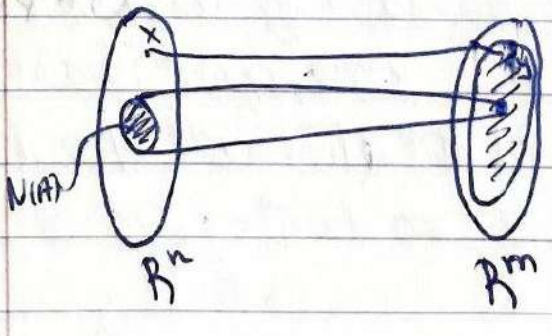
Πρόταση Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και $V \in \mathbb{R}^n$, $\dim(V) = d$ και $U = \langle \underline{u_1}, \underline{u_2}, \dots, \underline{u_n} \rangle$. Τότε
$\forall V \subseteq U \Rightarrow Au_i \in U$ $i = 1, 2, \dots, k$.

Έστω $(A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n)$ όπου $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ορίζω
πίνακας

$R(A) = \{A\underline{x} : \underline{x} \in \mathbb{R}^n\} \subseteq \mathbb{R}^n$

υρήνας ← $N(A) = \{\underline{x} : Ax = 0\} \subseteq \mathbb{R}^n$

$\left.\begin{array}{l} \text{rank}(A) = \dim R(A) \\ \text{Null}(A) = \dim N(A) \end{array}\right\}$ Από Θεώρημα $\text{rank}(A) + \text{Null}(A) = n$



$$A = [U_1 : U_2] \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{bmatrix} = U_1 \Sigma U_2$$

διαγώνιος

$$U = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} p & m-p \end{array} \\ [U_1 : U_2] \end{array} \begin{array}{c} \\ p \\ m-p \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} p & n-p \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c} \Sigma & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} n \\ \begin{bmatrix} V_1^p \\ V_2^p \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ p \\ n-p \end{array}$$

Έχουμε $UU^T = U^TU = I_m$ και $VV^T = U^TV = I_n$

$$\begin{bmatrix} U_1^T \\ U_2^T \end{bmatrix} [U_1 \; U_2] = I_m$$

ορθογώνιο συμπλήρωμα

$$\left.\begin{aligned} R(A^T) = R(V_1) = R(V_2)^{\perp} = N(A)^{\perp} \\ N(A^T) = R(U_2) = R(U_1)^{\perp} = R(A)^{\perp} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} R(A^T) = N(A)^{\perp} \\ N(A^T) = R(A)^{\perp} \end{aligned}$$

$A = A^T \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad n = m$

$$A = [U_1 : U_2] \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^T \\ U_2^T \end{bmatrix}$$

Άρα θα έχω $R(A) = N(A)^{\perp}$

$$R(A) \oplus N(A) = \mathbb{R}^n$$

Ορισμός: Έστω $\Sigma_i(A,B): \left.\begin{aligned} \underline{x}' = A\underline{x} + B\underline{u} \\ \underline{x}(0) = \underline{x_0} \in \mathbb{R}^n \end{aligned}\right\}$

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \; B \in \mathbb{R}^{n \times m}$

Η αρχική κατάσταση $\underline{x_0}$ θα λέγεται ελέγξιμη εάν $\exists \underline{u} \in C^0([0, t_1], \mathbb{R}^m)$, $t_1 > 0$ τέτοια ώστε $\underline{x}(t_1) = \underline{0}$

Το $\Sigma_i(A,B)$ είναι πλήρως ελέγξιμο εάν $\underline{x_0}$ ελέγξιμη $\forall \underline{x_0} \in \mathbb{R}^n$

Έστω $\underline{x_0}$ είναι ελέγξιμη $\Rightarrow \exists t_1>0$ και $\exists u \in C^0([0,t_1],\mathbb{R}^m)$
τ.ω. $x(t_1)=0$ όπου

$$\underline{0} = x(t_1) = e^{At_1}\underline{x_0} + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} B\underline{u}(\tau)d\tau$$

$$\Rightarrow -\underline{x_0} = \int_0^{t_1} e^{-A\tau} Bu(\tau)d\tau$$

Ορίζουμε (γραμμ. τελεστή): $L(0,t_1): C^0([0,t_1]) \to \mathbb{R}^n$

$$L(0,t_1)\underline{u} = \int_0^{t_1} e^{-A\tau} Bu(\tau)d\tau$$

Επομένως $\underline{x_0}$ ελέγξιμη εάν για κάποιο $t_1>0$
$\underline{x_0} \in \mathcal{R}[L(0,t_1)]$.

Ορίζω: Ελέγξιμο υπόχωρο

$\mathcal{X} = \{x_0 \in \mathbb{R}^n : x_0 \in \mathcal{R}\, L(0,t_1],\ t_1>0\} \subseteq \mathbb{R}^n$

Αν $\Sigma_i(A,B)$: πλήρως ελέγξιμο $\Leftrightarrow \mathcal{X} = \mathbb{R}^n$

Ορισμός

πίνακας ελεγξιμότητας Gramian: $W_c(0,t_1) = \int_0^{t_1} e^{-A\tau} BB^\tau e^{-A^\tau\tau} d\tau$

Ισχύει ότι $W_c(0,t_1) = W_c^\tau(0,t_1) \geq 0,\ \forall t_1 \geq 0$

πίνακας ελεγξιμότητας

$\Gamma_c = [B \vdots AB \vdots \cdots | A^{n-1}B] \in \mathbb{R}^{n\times m}$

Θεώρημα

$\forall t_1>0$ τ.ω. $\mathcal{X} := R[L_c(0,t_1)] = R[W_c(0,t_1)] = R(\Gamma_c)$

Απόδειξη

(1) $R[W_c(0,t_1)] \subseteq R[L_c(0,t_1)]$ για κάποιο $t_1>0$

εάν $x_0 \in R[L_c(0,t_1)]$ όπου $L_c(0,t_1)(u) = \int_0^{t_1} e^{-A\tau} B \underline{u}(\tau) d\tau$

Επιλέγω: $u(\tau) = B^T e^{-A^T\tau} \xi$, $\tau\in[0,t_1]$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ αυθαίρετο

Τότε: $L_c(0,t_1)(u) = \left(\int_0^{t_1} e^{-A\tau} BB^T e^{-A^T\tau} d\tau\right)\xi = W_c(0,t_1)\xi$.

Εφόσον το $\xi\in\mathbb{R}^n$ αυθαίρετο τότε $R[W_c(0,t_1)] \subseteq R[L_c(0,t_1)]$

(2) Θα δείξω το αντίστροφο

$R[L_c(0,t_1)] \subseteq R[W_c(0,t_1)]$. Έστω $\underline{x_0} \in R[L_c(0,t_1)]$

$\Rightarrow \exists u \in C^0((0,t_1),\mathbb{R}^n)$ τ.ω. $x_0 = L_c(0,t_1)(u) =$

$= \int_0^{t_1} e^{-A\tau} B u(\tau) d\tau$

Εφόσον $W_c(0,t_1) = W_c^T(0,t_1) \geq 0$ τότε:

$R[W_c(0,t_1)] \oplus N[W_c(0,t_1)] = \mathbb{R}^n$ και $N[W_c(0,t_1)]^{\perp} = R[W_c(0,t_1)]$

Επομένως, $\underline{x_0} = \underline{x_c} + \underline{x_n}$, $\underline{x_c} \in R[W_c(0,t_1)]$, $\underline{x_n} \in N[W_c(0,t_1)]$

$\langle \underline{x_c}, \underline{x_n} \rangle = \underline{x_c}^T \cdot \underline{x_n} = 0$ είναι ορθογώνιο

Τότε $W_c(0,t_1)\underline{x_n} = 0 \Rightarrow \underline{x_n}^T W_c(0,t_1) \underline{x_n} = 0$

$\Rightarrow \int_0^{t_1} (\underline{x_n}^T e^{-A\tau} BB^T e^{-A^T\tau} x_n) d\tau = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \int_0^{t_1} \| B^T e^{-A^T\tau} \underline{x_n} \|^2 d\tau = 0 \Rightarrow B^T e^{-A^T\tau} \underline{x_n} = 0 \;\; \forall \tau \in [0,t_1]$

Επομένως, $x_0^T x_n = (\underline{x_c}^T + \underline{x_n}^T) x_n = \underline{x_n}^T \cdot \underline{x_n} = \|x_n\|^2$

$\underline{x_0} = L_c(u) = \int_0^{t_1} e^{-A\tau} B u(\tau) d\tau \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{x_0}^T \underline{x_n} = \int_0^{t_1} u^T(\tau) B^T e^{-A^T \tau} x_n d\tau = 0$

$\Rightarrow \|x_n\| = 0 \Rightarrow \underline{x_n} = 0 \Rightarrow \underline{x_0} = \underline{x_c} \Rightarrow$

$R[L_c(0, t_1)] \subseteq R[W_c(0, t_1)]$

από ①, ② έχω την "=".

7/4/23

$\Sigma i(A,B): \underline{x}' = A\underline{x} + B\underline{u}$, $\underline{x}(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$

Ορισμός $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ελέγξιμη εαν $\exists \underline{u} \in C^0([0,t_1], \mathbb{R}^n)$

τ.ω. $\underline{x}(t_1) = 0$ $(t_1 \in \mathbb{R})$

Εαν $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ελέγξιμη $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$ τοτε $\Sigma i(A,B)$ πλήρως ελέγξιμο

Ορίζουμε

1) $L_c(0,t_1): C^0([0,t_1], \mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}^n$

$L_c(0,t_1)(u) = \int_0^{t_1} e^{-A\tau} B u(\tau) d\tau$

$\mathcal{X}_c = \{x_0 \in \mathbb{R}^n : x_0 \in R[L_c(0,t_1)]\}$

2) $W_c(0,t_1) = \int_0^{t_1} e^{-A\tau} B B^T e^{-A^T\tau} d\tau$

$W_c(0,t_1) = W_c^T(0,t_1) \geq 0$

3) $\Gamma_c = [B \vdots AB \vdots \dots \vdots A^{n-1}B] \in \mathbb{R}^{n\times nm}$

Θεώρημα

$\mathcal{X}_c = R[L_c(0,t_1)] = R[W_c(0,t_1)] = R[\Gamma_c]$

απόδειξη (συνέχεια)..

4) $R[W_c(0,t_1)] \subseteq R(\Gamma_c)$

$\underline{x_0} \in R[W_c(0,t_1)] \Rightarrow \underline{x_0} \in R[L_c(0,t_1)] \Leftrightarrow \exists \underline{u}$ στο $C^0([0,t_1] \subseteq \mathbb{R}^m)$

τ.ω. $\underline{x_0} = \int_0^{t_1} e^{-A\tau} B u(\tau) d\tau$ επίσης:

$e^{-A\tau} = \sum_{k=0}^{n-1} A^k B_k(\tau)$, $[A^k C < [n, A, \dots, A^{n-1}>]$

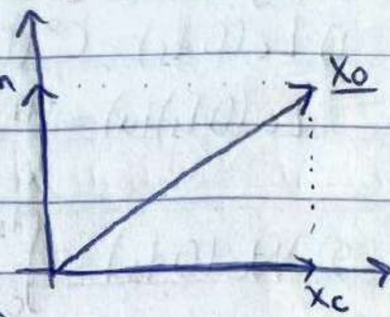
$$\Rightarrow \underline{x_0} = \int_0^{t_1} \sum_{k=0}^{n-1} A^k \beta_k(\tau) B_k(\tau) d\tau = \sum_{k=0}^{n-1} A^k B \int_0^{t_1} \underbrace{\beta_k(\tau) u(\tau) d\tau}_{a_n(t_1)}$$

$$= \underbrace{[B \vdots AB \vdots \cdots \vdots A^{n-1}B]}_{\in \mathbb{R}^{n\times m}} \begin{bmatrix} a_0(t_1) \\ \vdots \\ a_{n-1}(t_1) \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{x_0} \in R(\Gamma_c)$$

5) $R[\Gamma_c] \subseteq R[W_c(0,t_1)]$

$\underline{x_0} \in R[\Gamma_c]$: Έστω $\underline{x_0} \notin R[W_c(0,t_1)] \Rightarrow \underline{x_0} = \underline{x_c} + \underline{x_n} \cdot \underline{x_m} \neq 0$

$\langle \underline{x_c}, \underline{x_n} \rangle = x_c^T \cdot x_n = 0$



$W_c(0,t_1) \cdot x_n = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_n^T W_c(0,t_1) x_n = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \int_0^{t_1} x_n^T e^{-A\tau} B B^T e^{-A^T\tau} \underline{x_n} d\tau = 0$

$\Leftrightarrow \int_0^{t_1} \| B^T e^{-A^T\tau} x_n \|^2 d\tau = 0 \Leftrightarrow B^T e^{-A^T\tau} x_n = 0 \quad \forall \tau \in [0,t_1]$

$\Leftrightarrow x_n^T e^{A\tau} B = 0$

Θέτω $\tau = 0 \Rightarrow x_n^T B = 0$

παραγωγίζω $x_n^T e^{-A\tau} B = 0 \Rightarrow$

$(x_n^T e^{-A\tau} B)' |_{\tau=0} = 0$ και έχω επαγωγικά

$(x_n^T e^{-A\tau} B)^{(k)} |_{\tau=0} \Rightarrow x_n^T e^{-A\tau} A^k B |_{\tau=0} = x_n^T A^k B = 0 \quad k = 0 \ldots n-1$

Άρα, $x_n^T B = x_n^T AB = \ldots = x_n^T A^{n-1} B = 0 \Rightarrow$

$x_n^T [B \vdots AB \vdots \cdots \vdots A^{n-1} B] = x_n^T \Gamma_c = 0$ και από την

σχέση $\underline{x_0} = \Gamma_c \cdot n$ και την $\underline{x_n}^T \underline{x_c} = 0$ έχω

$\| \underline{x_n} \|^2 = \underline{x_n}^T \underline{x_n} = \underline{x_n}^T (\underline{x_c} + \underline{x_n}) = \underline{x_n}^T \cdot \underline{x_0} = \underline{x_n}^T \Gamma_c \cdot n = 0$

$\Rightarrow \underline{x_n} = 0$ Άτοπο! ■

Θεώρημα

$\mathcal{X}_c$ είναι ο ελάχιστος A αναλλοίωτος υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ που περιέχει το $\mathcal{R}(B)$

<u>απόδειξη</u>

$\mathcal{R}(B) \subseteq \mathcal{X}_c$ σαφές (αφού οι στήλες του B είναι οι πρώτες m-στήλες του Γ_c)

Έστω: $x \in \mathcal{X}_c$. Τότε $\exists y \in \mathbb{R}^{mxn}$ τ.ω $x = \Gamma_c y$

Έχουμε: $Ax = A[B \vdots AB \cdots \vdots A^{n-1}B]y = [AB \vdots A^2B \cdots \vdots A^nB]y$

Οι στήλες του A^nB είναι γρ. συνδιασμοί των στηλών του Γ_c. (Cayley - Hamilton) και άρα $Ax \in \mathcal{X}$ δηλ. $A\mathcal{X} \subseteq \mathcal{X}$

Έστω V ένας A-αναλλοίωτος υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ τ.ω. $\mathcal{R}(B) \subseteq \mathcal{X}_c \Rightarrow$ οι στήλες B είναι στον V. Εφόσον ο V είναι A-αναλλοίωτος οι στήλες AB είναι στον V. όμοια ισχύει και για $A^{n-1}B$. Επομένως, οι στήλες του Γ_c είναι στο V, άρα $\mathcal{X}_c \subseteq V$. Άρα $\mathcal{X}_i$ ελάχιστος υπόχωρος και περιέχει το $\mathcal{R}(B)$. ■

Λήμμα [Kalman] Έστω $\Sigma_i(A,B)$ $A \in \mathbb{R}^{nxn}$ $B \in \mathbb{R}^{nxm}$ που δεν είναι πλήρως ελέγξιμο. Τότε $\exists Q \in \mathbb{R}^{nxn}$ $\det(Q) \neq 0$ τ.ω. $\Sigma_i(A,B) \sim \Sigma_i(\hat{A},\hat{B})$ όπου $\hat{A} = Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ 0 & \hat{A}_{22} \end{bmatrix}$

$\hat{B} = Q^{-1}B = \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$, όπου $\hat{A}_{11} \in \mathbb{R}^{n_c x n_c}$, $\hat{B}_1 = \mathbb{R}^{n_c x m}$, $n_c = \text{Rank}(\Gamma_c)$

όπου $\Gamma_c = [A \vdots AB \cdots \vdots A^{n-1}B]$ ο πίνακας ελεγξιμότητας και $\Sigma_i(\hat{A}_{11}, \hat{B}_1)$ πλήρως ελέγξιμο

$$\begin{bmatrix} z_1' \\ z_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ 0 & \hat{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} z_1' &= \hat{A}_{11} z_1 + \hat{A}_{12} z_2 + \hat{B}_1 u \\ z_2' &= \hat{A}_{21} z_2 \Rightarrow z_2(t) = e^{\hat{A}_{11} t} z_2(0) \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{tikzcd} u \arrow[r] & \boxed{\Sigma_1} \\ & \boxed{\Sigma_2} \arrow[u] \end{tikzcd} \quad \Big| \longrightarrow \boxed{\Sigma} \quad A[\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_n \,\vdots\, Q_2]$$

<u>Απόδειξη</u>

Εστω $n_c = \text{Rank}(\Gamma_c) < n$. Ορίζω $Q = [Q_1 | Q_2] \in \mathbb{R}^{n \times n}$
$Q_1 = [\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots u_{n_c}] \in \mathbb{R}^{n \times n_c}$ οπου $\{u_i\}_{i=1}^{n_c}$ βαση του
$\mathcal{X}_c = \mathcal{R}(\Gamma_c)$ και $\det Q \neq 0$.

Θ.Δ.Ο. : $Q\hat{A} = AQ$ και $B = Q\hat{B}$ δηλ.

$$[\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, u_{n_c} | Q_2] \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ 0 & \hat{A}_{22} \end{bmatrix} = A[\underline{u}_1, \dots, u_{n_c} | Q_2]$$

$$B = [u_1 \; u_2 \dots u_{n_c} | Q_2] \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Αφου $\mathcal{R}(Q_1) = \mathcal{R}(\Gamma_c) = \mathcal{R}([B \,\vdots\, AB \,\vdots\, \dots \,\vdots\, A^{n-1}B])$ ο υπόχωρος $\mathcal{R}(Q_1)$ ειναι A-αναλλοίωτος και επομένως : $Au_i \in \mathcal{R}(Q_i)$ $i = 1, 2, \dots, n_c$. Άρα, κάθε μια απο τις n_c-στήλες του AQ_1 γραφεται ως γραμ. συνδυασμός των $\{u_i\}_{i=1}^{n_c}$

δηλ. $AQ_1 = Q_1 \hat{A}_{11}$ για $\hat{A}_{11} \in \mathbb{R}^{nc \times nc}$. Επίσης $R(B) \subseteq R(\Gamma_c) \subseteq R(Q_1)$ κάθε στήλη του B γράφεται ως γραμ. συνδυασμός των $\{u_i\}_{i=1}^{nc}$ μέσω των αντίστοιχων στοιχείων κάθε στήλης του $\hat{B}_1$.

• Ο πίνακας ελεγξιμότητας του $\Sigma_i(\hat{A}, \hat{B})$ γράφεται
$$\hat{\Gamma}_c = [\hat{B} \vdots \hat{A}\hat{B} \vdots \dots \vdots \hat{A}^{n-1}\hat{B}] = [Q^{-1}B | Q^{-1}AB \vdots \dots \vdots Q^{-1}A^{n-1}B] = Q^{-1}\Gamma_c$$
Όμως
$$\hat{\Gamma}_c = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \hat{B}_1 & \hat{A}_{11}\hat{B}_1 & \dots & \hat{A}_{11}^{n-1}\hat{B}_1 \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 \end{array}\right]$$
Επομένως:
$$\mathrm{Rank}(\Gamma_c) = nc = \mathrm{Rank}(\hat{\Gamma}_c) = \mathrm{Rank}([\hat{B}_1 | \hat{A}_{11}\hat{B}_1 \vdots \dots \vdots \hat{A}_{11}^{n-1}B_1]$$
$= \mathrm{Rank}([\hat{B}_1 | \hat{A}_{11}\hat{B}_1 | \dots \vdots \hat{A}_{11}^{nc-1}\hat{B}_1])$ όπου προκύπτει από Θεωρ. Cayley-Hamilton. Άρα $\Sigma_i(\hat{A}_{11}, \hat{B}_1)$ είναι πλήρως ελέγξιμο. ∎

27/4/23

Λήμμα

Έστω $\Sigma_i(A,B)$, $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ το οποίο δεν είναι πλήρως ελέγξιμο. Τότε, $\exists Q\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $\det(Q)\neq 0$ τ.ω.:

$$\hat{A} = Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ 0 & \hat{A}_{22} \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = Q^{-1}B = \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

όπου $\hat{A}_{11}\in\mathbb{R}^{nc\times nc}$, $\hat{B}_1\in\mathbb{R}^{nc\times nc}$ όπου:

$nc = \text{rank}(\Gamma_c)$ ληΘ. $\Gamma_c = [B \vdots AB \cdots A^{n-1}B]$

και $\Sigma_j(\hat{A}_{11}, \hat{B}_1)$ είναι πλήρως ελέγξιμο

$$\begin{bmatrix} z_1' \\ z_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ 0 & \hat{A}_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} u \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z_1' = \hat{A}_{11} z_1 + \hat{A}_{12} z_2 + \hat{B}_1 u$$

$$z_2' = \hat{A}_{21} z_2 \Rightarrow z_2 = e^{\hat{A}_{21} t} z_2(0)$$

$$u \longrightarrow \boxed{z_1' = \hat{A}_{11} z_1 + \hat{A}_{2} z_2 + \hat{B}_1 u}$$

$$\uparrow z_2(t) = e^{\hat{A}_{21} t} z_1(0)$$

$$\boxed{z_2' = \hat{A}_{22} z_2}$$

Θεώρημα

Έστω $\Sigma_i(A,B)$: $\underline{x}' = A\underline{x} + B\underline{u}$

$\underline{x}(0) = \underline{x_0} \in \mathbb{R}^n$, $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ τότε τα παρακάτω ισοδύναμα:

a) $\Sigma_i(A,B)$ πλήρως ελέγξιμος ($X_c = \mathbb{R}^n$)

β) $W_c(0,t_1) = \int_0^{t_1} e^{-At} BB^T e^{-A^Tt} > 0$

γ) $rank([B \vdots AB \vdots \dots \vdots A^{n-1}B]) = n$

δ) $rank(L_c(0,t_1)) = n$, $(L_c u = \int_0^{t_1} e^{-A\tau} B u(\tau) d\tau)$

ε) $rank([sI_n - A \vdots B]) = n \quad \forall s \in \mathbb{C}$

$(rank([\lambda I_n - A \vdots B]) = n \quad)$

Απόδειξη

Εφόσον: $\mathcal{X}_i = R(W_c(0,t_1)) = R(\Gamma_c) = R(L_2(0,t_1))$

Έχουμε: $(α) \Leftrightarrow (β) \Leftrightarrow (γ) \Leftrightarrow (δ)$

$(γ) \Rightarrow (ε)$. Έστω $rank(\Gamma_c) = n$ και έστω (για αντίθεση) ότι $\exists \underline{\xi} \neq 0$ τ.ω.

$\underline{\xi}^T [\lambda I - A \vdots B] = \underline{0}^T \Rightarrow \underline{\xi}^T A = \lambda \xi^T$ και $\underline{\xi}^T B = 0$, επομένως:

$\underline{\xi}^T AB = (\xi^T A) B = \lambda \xi^T B = 0$.

$\underline{\xi}^T A^2 B = (\xi^T A)(AB) = \lambda \xi^T AB = 0$

Επομένως, $\xi^T A^k B = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

Άρα, $\xi^T \underbrace{[B \vdots AB \vdots \dots \vdots A^{n-1}B]}_{\Gamma_c} = 0$, $\xi \neq 0 \Rightarrow rank(\Gamma_c) < n$.

$(ε) \Rightarrow (α)$ Έστω $rank[\lambda I - A | B] = n$, $\lambda \in \sigma(A) \Rightarrow \mathcal{I}_i(A,B)$ πλ. ελ.

Έστω (για αντίθεση) ότι $\mathcal{I}_i(A,B)$ δεν είναι πλ. ελ.

Άρα, $\exists Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ μη ιδιάζων ($det(Q) \neq 0$) τ.ω.

$Q^{-1} A Q = \hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ 0 & \hat{A}_{22} \end{bmatrix}$, $\hat{B} = Q^{-1} B = \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$, όπου $\hat{A}_{11} \in \mathbb{R}^{n_c \times n_c}$, $\hat{B}_1 \in \mathbb{R}^{n_c \times n_c}$

και $n_c = rank(\Gamma_c) < n$ και $\mathcal{I}_i(\hat{A}_{11}, \hat{B}_1)$ είναι πλ. ελ.

Έστω $\lambda \in \sigma(\hat{A}_{12}) \subseteq \sigma(\hat{A}) = \sigma(A)$

Έστω $\beta \neq 0$ τ.ω. $\beta^T \hat{A}_{22} = \lambda \beta^T$ $(\beta \in \mathbb{R}^{n-n_c})$

Ορίζω $\underline{\alpha}^T = [0_{n_c}^T \vdots \beta^T] \neq \underline{0}$

$\underline{\alpha}^T [\lambda I_n - \hat{A} \vdots \hat{B}] = [0^T \vdots \beta^T] \begin{bmatrix} \lambda I - \hat{A}_{11} & -A_{12} & \vdots & \hat{B}_1 \\ 0 & \lambda I - \hat{A}_{22} & \vdots & 0 \end{bmatrix} = 0$

$\Rightarrow \alpha^T [\lambda I_n - Q^{-1}AQ \vdots Q^{-1}B] = 0 \Rightarrow \underbrace{\alpha^T Q^{-1}}_{\gamma^T \neq 0} [\lambda I_n - A \vdots B] \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix} = 0$

$\Rightarrow \gamma^T [\lambda I_n - A \vdots B] = 0$.

Ελεγξιμότητα διαγώνιων μορφών

$\lambda_i(A,B)$ ελ. ελ. $\Leftrightarrow \lambda_i(Q^{-1}AQ, Q^{-1}B)$ $(\det Q \neq 0)$.

$\hat{\Gamma}_c = [Q^{-1}B \vdots Q^{-1}AQ \cdot Q^{-1}B \vdots \cdots \vdots Q^{-1}A^{n-1}Q \cdots Q^{-1}B]$

$= Q^{-1} [B \vdots AB \vdots \cdots \vdots A^{n-1}B] \ (\to \Gamma_c) \Rightarrow \mathrm{rank}(\hat{\Gamma}_c) = \mathrm{rank}(\Gamma_c)$

Παράδειγμα $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ $(\lambda_i \neq \lambda_j$ αν $i \neq j)$

$B = \underline{b} \in \mathbb{R}^n$, $\Lambda = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$

$AP = P\Lambda$

$\Updownarrow$

$P^{-1}AP = \Lambda$ $\quad \hat{\underline{b}} = P^{-1}\underline{b}$

$$[\lambda I_n - \Lambda \vdots \hat{\underline{b}}] = \left[\begin{array}{ccc|c} \lambda-\lambda_1 & & 0 & \tilde{b}_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \lambda-\lambda_n & \tilde{b}_n \end{array}\right] = Q(\lambda)$$

Αν $\lambda = \lambda_i$: $\mathrm{rank}(Q(\lambda)) < n \Leftrightarrow \tilde{b}_i = 0$

Παράδειγμα $\phi(A) = (\lambda - \lambda_1)^n$, $\tau = n$, $d = 2$.

$$P^{-1}AP = J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix}, \quad J_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}, \quad J_2 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}$$

$$[\lambda I_5 - J \,\vdots\, \tilde{B}] = \left[\begin{array}{cc:ccc:c} \lambda-\lambda_1 & -1 & & 0 & & \tilde{b}_{11}^T \\ 0 & \lambda-\lambda_1 & & & & \tilde{b}_{12}^T \\ \hdashline & & \lambda-\lambda_1 & -1 & 0 & \tilde{b}_{21}^T \\ & 0 & 0 & \lambda-\lambda_1 & -1 & \tilde{b}_{22}^T \\ & & 0 & 0 & \lambda-\lambda_1 & \tilde{b}_{23}^T \end{array}\right]$$

για $\lambda = \lambda_1$:

$$\left[\begin{array}{cc:ccc:c} 0 & -1 & & 0 & & \tilde{b}_{11}^T \to 0 \\ 0 & 0 & & & & \tilde{b}_{12}^T \\ \hdashline & & 0 & -1 & 0 & \tilde{b}_{21}^T \to 0 \\ & 0 & 0 & 0 & -1 & \tilde{b}_{22}^T \\ & & 0 & 0 & 0 & \tilde{b}_{23}^T \end{array}\right]$$

$$B_c = \begin{bmatrix} \tilde{b}_{12}^T \\ \tilde{b}_{23}^T \end{bmatrix}.$$

28-04-2023 Θεωρία Ελέγχου.

<u>Παρατηρησιμότητα:</u> Έστω $\Sigma_0(A,C)$ $\underline{x}' = A\underline{x}$, $\underline{x}(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$
$y = C\underline{x}$ όπου $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$.
Η κατάσταση $\underline{x_0}$ παρατηρήσιμη αν μπορεί να προσδιοριστεί μονοσήμαντα, όπου $y[0,t_1] = \{ y(t) : 0 < t < t_1 \}$
Το $\Sigma_0(A,C)$ είναι πλήρη παρατηρήσιμο αν κάθε $x_0 \in \mathbb{R}^n$ είναι παρατηρήσιμη κατάσταση.

Έστω $x_0 \in \mathbb{R}^n$, τότε $\underline{x}(t) = e^{At}\underline{x_0} \Rightarrow \underline{y}(t) = Ce^{At}\underline{x_0}$

Τότε $y(t) = C\cdot e^{At}\underline{x_0} \Rightarrow$

$$e^{A^T\tau}C^T y(\tau) = e^{A^T\tau}C^T C e^{A\tau}x_0 \Rightarrow$$

$$\int_0^{t_1} e^{A^T\tau}C^T y(\tau)d\tau = \underbrace{\left(\int_0^{t_1} e^{A^T\tau}C^T C e^{A\tau}d\tau\right)}_{W_0(0,t_1)} \cdot \underline{x_0}$$

Έστω $W_0(0,t_1) > 0 \Rightarrow x_0 = W_0^{-1}(0,t_1)\cdot\int_0^{t_1} e^{A^T\tau}C^T y(\tau)d\tau$

$\Rightarrow \Sigma_0(A,C)$ πλήρως παρατηρήσιμο.

<u>Θεώρημα:</u> Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:
(1) $\Sigma_0(A,C)$ είναι π.π.

(2) $W_0(0,t_1) > 0 \ \forall \ t_1 > 0$

(3) $\mathrm{Rank}(\Gamma_0) = n$ όπου $\Gamma_0 = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{np\times n}$

(4) $\mathrm{Rank}\begin{bmatrix} sI-A \\ C \end{bmatrix} = n$, $\forall s \in \mathbb{C}$ (ισοδύναμα $\forall \lambda \in \sigma(A)$)

(5) $\Sigma i(A^T, C^T)$ είναι πλήρες ελέγξιμο.

$(x' = A^T x \bar{c}\, C^T u)$ (δυικότητα, ελεγξιμ/παρατ.)

<u>Απόδειξη:</u> (3) => (1)

Έχουμε $y(t) = Ce^{At}\underline{x_0}$ =>

$$y'(t) = CAe^{At}\underline{x_0}$$

$$y''(t) = CA^2e^{At}\underline{x_0} \quad \text{κτλ. Τότε:}$$

$$y^{(k)}(t) = CA^k e^{At}\underline{x_0}$$

για $t=0$:

$$\left.\begin{array}{l} y(0) = C\underline{x_0} \\ y'(0) = CA\underline{x_0} \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(0) = CA^{n-1}\underline{x_0} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} y(0) \\ y'(0) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \underline{x_0}$$

Αν $\mathrm{rank}(\Gamma_0) = n$, τότε η εξίσωση ως προς $\underline{x_0}$ έχει μοναδική λύση => $\underline{x_0}$ π.π. => $\Sigma_0(A,C)$ είναι π.π.

(1) => (3)

Έστω $\Sigma_0(A,C)$ π.π. αλλά $\mathrm{Rank}(\Gamma_0) < n$ (για αντίφαση) τότε $\exists$ χει $\underline{x_0} \in \mathbb{R}^n$ τ.ω.: $\Gamma_0\underline{x_0} = 0$ $(\underline{x_0} \neq 0)$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \underline{x_0} = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} C\underline{x_0} = 0 \\ CA\underline{x_0} = 0 \\ \vdots \\ CA^{n-1}\underline{x_0} = 0 \end{array}\right\}$$

$\exists\, x_0 \neq 0 : CA^k\underline{x_0} = 0 \quad \forall\, k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$

Εφόσον $A^n \in \langle I, A, A^2, \dots, A^{n-1} \rangle$ τότε

Τότε $CA^k \underline{x_0} = \underline{0}$, $\forall\ k \in \mathbb{N}_0$ και

$$CA^t \underline{x_0} = 0 \quad \forall\ t \in \mathbb{R} \Rightarrow \underline{y}(t) = 0 \ \forall\ t \in [0, t_1]$$

Άρα αν $\left.\begin{array}{l} \underline{x_0} \neq 0 \Rightarrow y(t) = 0 \\ \underline{x_0} = 0 \Rightarrow y(t) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \Sigma o(A, C)$ δεν είναι π.π.

$(1) \Leftrightarrow (5)$ $[\Sigma i(A, C)$ π.π $\Leftrightarrow \Sigma i(A^T, C^T)$ π.ε.$]$

$\Sigma i(A, C)$ π.π. $\Leftrightarrow \text{Rank} \underbrace{\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}}_{\Gamma_0} = n \Leftrightarrow \text{Rank}(\Gamma_0^T) = n$

$\Leftrightarrow \text{Rank}[C^T \,\vdots\, A^T C^T \,\vdots\, (A^T)^2 C^T \,\vdots\, \dots \,|\, (A^T)^{n-1} C^T] = n$

$\Leftrightarrow \Sigma i(A^T, C^T)$ π.ε.

$(1) \Leftrightarrow (4)$ $\Sigma o(A, C)$ π.π. $\Leftrightarrow \Sigma i(A^T, C^T)$ π.ε. $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{rank}[sI - A^T \,\vdots\, C^T] = n \quad \forall\ s \in \mathbb{C} \Leftrightarrow$

$\text{rank}\begin{bmatrix} sI - A \\ C \end{bmatrix} = n \quad \forall\ s \in \mathbb{C}$.

κτλ (για $(1) \Leftrightarrow (2)$) ∎

<u>Ορισμός</u>: Ο μη-παρατηρήσιμος υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ ορίζεται το:

$$\{ \underline{x_0} \in \mathbb{R}^n : \underline{x_0} \in \ker(\Gamma_0) \} = \{ \mathcal{X}_{\bar{o}} : \Gamma_0 \underline{x_0} = 0 \}$$

$\Sigma o(A, C)$ π.π. $\Leftrightarrow \mathcal{X}_{\bar{o}} = \{\underline{0}\}$

<u>Θεώρημα</u>: $\mathcal{X}_{\bar{o}}$ είναι ο μεγαλύτερος A-αναλλοίωτος υπόχωρος που περιέχεται στον $\ker(C)$.

($\mathcal{X}_c$ ο μικρότερος A-αναλλοίωτος υπόχωρος που περιέχει $R(X)$)

Θεώρημα: Η π.π. είναι αναλλοίωτη κάτω από μετασχηματισμό ισοδυναμίας.

Απόδειξη: Έστω $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\det(Q) \neq 0$.

$$\Sigma_o(A, C) \sim \Sigma_o(\underbrace{Q^{-1}AQ}_{\hat{A}}, \underbrace{CQ}_{\hat{C}})$$

Έστω $\Gamma_o^{\hat{}}$ ο πίνακας παρατηρησιμότητας για το: $\Sigma_o(\hat{A}, \hat{B})$

Τότε:

$$\Gamma_o^{\hat{}} = \begin{bmatrix} CQ \\ CQ\underbrace{\cdot Q^{-1}}_{I}AQ \\ \vdots \\ CQQ^{-1}A^{n-1}Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CQ \\ CAQ \\ \vdots \\ CA^{n-1}Q \end{bmatrix} =$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}}_{\Gamma_o} Q = \Gamma_o Q \Rightarrow \operatorname{rank}(\Gamma_o) = \operatorname{rank}(\Gamma_{\hat{o}})$$

Λήμμα Kalman (παρατηρησιμότητα)
Έστω $\Sigma_o(A, C)$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $C \in \mathbb{R}^{p n \times n}$ δεν είναι π.π. τότε $\exists\ Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, τ.ω.

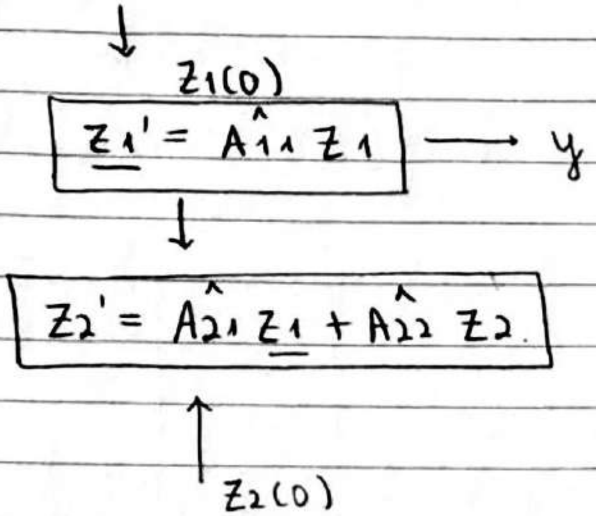
$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{A_{11}} & 0 \\ \hat{A_{21}} & \hat{A_{22}} \end{bmatrix} = Q^{-1}AQ, \quad \tilde{C} = CQ = [\,\tilde{C_1} \vdots 0\,]$$

όπου $\hat{A_{11}} \in \mathbb{R}^{n_o \times n_o}$ και $\tilde{C_1} \in \mathbb{R}^{p \times n_o}$ όπου $n_o = \operatorname{rank}(\Gamma_o) < n$ και επιπλέον το $\Sigma_o(\hat{A_{11}}, \tilde{C_1})$ είναι π.π. ∎

$$\begin{bmatrix} \underline{z_1'} \\ \underline{z_2'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & 0 \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} , \quad y = [\hat{C}_1 \vdots 0] \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow z_1' = \hat{A}_{11} z_1 , \quad z_2' = \hat{A}_{21} z_1 + \hat{A}_{22} z_2$$

$$\underline{y} = \hat{C}_1 z_1$$



Κανονική Μορφή Kalman

$$\Sigma(A, B, C, D)$$

$$\mathbb{R}^n = \mathcal{X}_{co} \oplus \mathcal{X}_{c\bar{o}} \oplus \mathcal{X}_{\bar{c}o} \oplus \mathcal{X}_{\bar{c}\bar{o}} .$$

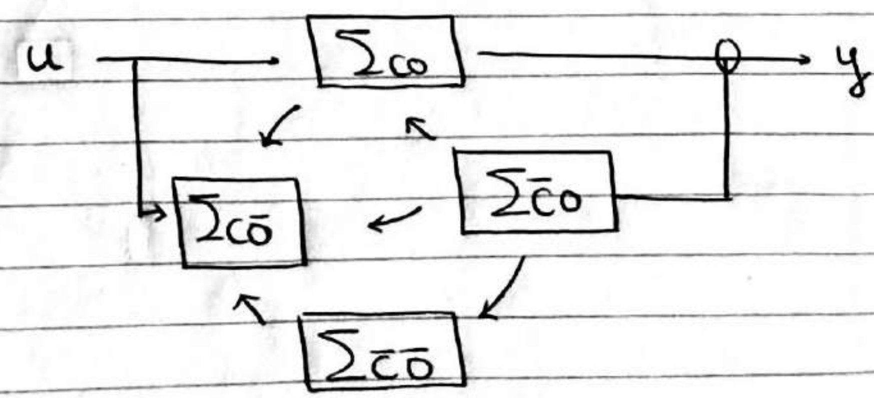
$$\mathcal{X}_c = R(\Gamma_c) \qquad \Rightarrow \mathcal{X}_{c\bar{o}} = \mathcal{X}_c \wedge \mathcal{X}_{\bar{o}}$$

$$\mathcal{X}_{\bar{o}} = \ker(\Gamma_o)$$

$$\mathcal{X}_{c\bar{o}} \oplus \mathcal{X}_{\bar{c}\bar{o}} = \mathcal{X}_{\bar{o}}$$

$$\mathcal{X}_{c\bar{o}} \oplus \mathcal{X}_{co} = \mathcal{X}_c$$

$$(\mathcal{X}_{co} \oplus \mathcal{X}_{c\bar{o}} \oplus \mathcal{X}_{\bar{c}\bar{o}}) \oplus \mathcal{X}_{\bar{c}o} = \mathbb{R}^n$$



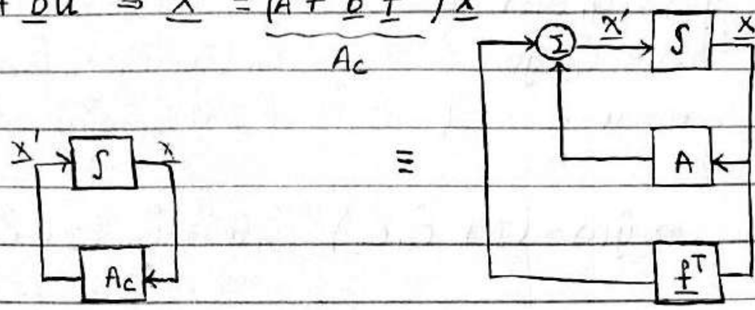
02/05/23

Αναδραση Καταστάσεων

Έστω $\Sigma_i(A,\underline{b})$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\underline{b} \in \mathbb{R}^n$ πλήρως ελέγξιμο. ($\det(\Gamma_c) \neq 0$)

Έστω $u = \underline{f}^T \underline{x}$, τότε το σύστημα "κλειστού βρόγχου"

$$\underline{x}' = A\underline{x} + \underline{b}u \Rightarrow \underline{x}' = \underbrace{(A + \underline{b}\,\underline{f}^T)}_{A_c}\underline{x}$$



Έστω το χαρακτ. πολυώνυμο του A ($\det(\lambda I_n - A)$) είναι

$$\varphi_A(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$$

Ορίζουμε $\{\underline{q}_n, \underline{q}_{n-1}, \dots, \underline{q}_1\}$

$$\begin{cases} \underline{q}_n = \underline{b} \\ \underline{q}_{n-1} = A\underline{q}_n + a_{n-1}\underline{b} = A\underline{b} + a_{n-1}\underline{b} \\ \underline{q}_{n-2} = A\underline{q}_{n-1} + a_{n-2}\underline{b} = A^2\underline{b} + a_{n-1}A\underline{b} + a_{n-2}\underline{b} \\ \vdots \\ \underline{q}_1 = A\underline{q}_2 + a_1\underline{b} = A^{n-1}\underline{b} + a_{n-1}A^{n-2}\underline{b} + \dots + a_1\underline{b} \end{cases}$$

Λήμμα: (1) $A\underline{q}_1 + a_0\underline{b} = 0$

(2) $Q = [\underline{q}_1\ \underline{q}_2\ \dots\ \underline{q}_n] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $\det(Q) \neq 0$

αν και μόνο αν $\Sigma_i(A,\underline{b})$ πλήρως ελέγξιμο

Αποδ: (1) $A(A^{n-1}\underline{b} + a_{n-1}A^{n-2}\underline{b} + \dots + a_1\underline{b}) + a_0\underline{b} =$

$= A^n\underline{b} + a_{n-1}A^{n-1}\underline{b} + \dots + a_1A\underline{b} + a_0 I_n\underline{b} =$

$= (A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_1A + a_0 I_n)\underline{b} = \varphi_A(A)\underline{b} = 0$

(2) $[\underline{q}_1\ \underline{q}_2\ \cdots\ \underline{q}_{n-1}\ \underline{q}_n] = \underbrace{[\underline{b}\ A\underline{b}\ \cdots\ A^{n-2}\underline{b}\ A^{n-1}\underline{b}]}_{\Gamma_c} \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & 1 \\ \vdots & & a_{n-1} & 1 & 0 \\ \vdots & & 1 & 0 & \vdots \\ a_{n-2} & ⋰ & & & \vdots \\ a_{n-1} & 1 & & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{H_a}$

Πίνακας Hankel

$Q = \Gamma_c H a$

$\det(Q) = \det(\Gamma_c)(-1)^{n+1}$

$\Rightarrow \det(Q) \neq 0 \iff \Sigma_i(A, \underline{b})$ πλ. ελέγξιμο. ∎

<u>Θεώρημα</u>

$\Sigma_i(A, \underline{b})$ πλ. ελέγξιμο $\iff \exists\, Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\det(Q) \neq 0$ τ.ω

$$\Sigma_i(A, \underline{b}) \overset{Q}{\sim} \Sigma_i(\tilde{A}, \tilde{\underline{b}}) \quad \begin{pmatrix} \tilde{A} = Q^{-1} A Q \\ \tilde{\underline{b}} = Q^{-1}\underline{b} \\ \tilde{\underline{x}} = Q^{-1}\underline{x} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\underline{b}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

<u>Αποδ</u>: ($\Rightarrow$) Έστω ότι $\Sigma_i(A, \underline{b})$ πλ ελ. Ορίζουμε $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ από τις αναδρομικές εξισώσεις. Τότε $\det(Q) \neq 0$ και μπορούμε να επαληθεύσουμε $Q\tilde{\underline{b}} = \underline{b}$, $AQ = Q\tilde{A}$

$$[\underline{q}_1\ \underline{q}_2\ \ \underline{q}_n]\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \underline{q}_n = \underline{b}.$$

$$A[\underline{q}_1\ \underline{q}_2 \cdots \underline{q}_n] = [\underline{q}_1\ \underline{q}_2 \cdots \underline{q}_n]\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix}}_{\tilde{A}}$$

($\Leftarrow$) Υπολογίζουμε τον $\tilde{\Gamma}_c = [\tilde{\underline{b}}\ \ \tilde{A}\tilde{\underline{b}} \cdots \tilde{A}^{n-1}\tilde{\underline{b}}]$

$$\tilde{\underline{b}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \tilde{A}\tilde{\underline{b}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ * \end{bmatrix} \quad \tilde{A}^2\tilde{\underline{b}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ * \\ * \end{bmatrix}$$

$$\text{Άρα} \quad \tilde{\Gamma}_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \iddots & * \\ \vdots & \vdots & 1 & & * \\ \vdots & 0 & & & * \\ 0 & 1 & * & & * \\ 1 & * & * & & * \end{bmatrix} \quad \det(\tilde{\Gamma}_c) \neq 0 \iff \Sigma_i(\tilde{A}, \tilde{\underline{b}}) \text{ π.ε}$$

$$\iff \Sigma_i(A, \underline{b}) \text{ π.ε}$$

__Θεώρημα__

$\Sigma_i(A,b)$ πλ. ελέγξιμο $\Leftrightarrow$ $\forall$ επιθυμητό $d(s) \in \mathbb{R}[s]$ βαθμού n με $d_n = 1$ $\exists\ \underline{f} \in \mathbb{R}^n$ τ.ω το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $A_c = A + b\underline{f}^T$, $\phi_{A_c}(\lambda) = d(s)$.

__Αποδ:__ $(\Rightarrow)$ Εφόσον $\Sigma_i(A,b)$ π.ε $\exists\ Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\det(Q) \neq 0$ τ.ω $\Sigma_i(A,\underline{b}) \overset{Q}{\sim} \Sigma_i(\tilde{A},\tilde{b})$ είναι σε κανονική μορφή ελεγξιμότητας

$$Q^{-1}AQ = \tilde{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ -a_0 & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \tilde{b} = Q^{-1}b = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} \underline{x}' &= A\underline{x} + \underline{b}u \\ \tilde{\underline{x}}' &= \tilde{A}\tilde{\underline{x}} + \tilde{\underline{b}}u \\ \tilde{\underline{x}} &= Q^{-1}\underline{x} \end{aligned}\right\}$$

Έστω ότι στις νέες συντεταγμένες $u = \tilde{\underline{f}}^T\tilde{\underline{x}}$, ορίζω $\underline{f}^T = \tilde{\underline{f}}^T Q^{-1}$

Τότε $\tilde{\underline{x}}' = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{\underline{b}}\,\tilde{\underline{f}}^T\tilde{x}$

$$\tilde{\underline{x}}' = \underbrace{(\tilde{A} + \tilde{\underline{b}}\underline{f}^T)}_{A_c}\tilde{\underline{x}}$$

Στις αρχικές συντεταγμένες,

$$\underline{x}' = Ax + bu = (\underbrace{Q\tilde{A}Q^{-1}}_{A} + \underbrace{Q\tilde{\underline{b}}}_{b}\underbrace{\tilde{f}^T Q^{-1}}_{f^T})x = Q(\tilde{A} + \tilde{\underline{b}}\tilde{f}^T)Q^{-1}\cdot x$$

ελεγκτού βρόχου $\leftarrow$ $$\tilde{A}_c = \tilde{A} + \tilde{\underline{b}}\tilde{\underline{f}}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tilde{f}_0 & \cdots & \tilde{f}_{n-1} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \vdots & & \ddots & \\ \vdots & & & 1 \\ -a_0+\tilde{f}_0 & \cdots & \cdots & -a_{n-1}+\tilde{f}_{n-1} \end{bmatrix}$$

Ορίζοντας: $-d_i = -a_i + \tilde{f}_i$ $\quad i = 0,1,\ldots,n-1$ $\quad \Leftrightarrow \tilde{f}_i = a_i - d_i$

Τότε, $\phi_{\tilde{A}_c}(\lambda) = d(\lambda) = \lambda^n + d_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + d_0$

$\Rightarrow \phi_{\tilde{A}_c}(\lambda) = d(\lambda)$ (χαρακτ. πολυώνυμο $A + \underline{b}f^T$ $\quad \underline{f}^T = \tilde{\underline{f}}^T Q^{-1}$)

$(\hat{Q} = \Gamma_c H_a)$

« $\varphi_{A+bf^T}(\lambda)$

(<=) Έστω ότι το χαρακτ πολυώνυμο $\varphi_{A_c}(\lambda)$ επιλέγεται αυθαίρετα

Έστω (για αντίφαση) ότι το $\Sigma_i(A, \underline{b})$ δεν είναι πλήρως ελέγξιμο

Τότε $\exists R \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\det(R) \neq 0$ τ.ω. $\Sigma_i(A, \underline{b}) \overset{R}{\sim} \Sigma_i(\hat{A}, \hat{b})$

όπου,

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ 0 & \hat{A}_{22} \end{bmatrix}, \quad \underline{\hat{b}} = \begin{bmatrix} \hat{b}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \hat{A}_{11} \in \mathbb{R}^{n_c \times n_c}, \ \hat{b}_1 \in \mathbb{R}^{n_c \times 1}$$

όπου $n_c = \mathrm{Rank}(\Gamma_c) < n$

και $\Sigma_i(\hat{A}_{11}, \hat{b}_1)$ πλ. ελεγξ

Έστω $\underline{\hat{f}} \in \mathbb{R}^n$, $\hat{f} = [\hat{f}_1^T \ \hat{f}_2^T]$ $\quad \underline{\hat{f}}_1 \in \mathbb{R}^{n_c}$ $\quad \underline{\hat{f}}_2 \in \mathbb{R}^{n-n_c}$

Τότε,

$$\hat{A}_c = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ 0 & \hat{A}_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{b}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{f}_1^T & \vdots & \hat{f}_2^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} + \hat{b}_1 \hat{f}_1^T & \hat{A}_{12} + \hat{b}_1 \hat{f}_2^T \\ 0 & \hat{A}_{22} \end{bmatrix}$$

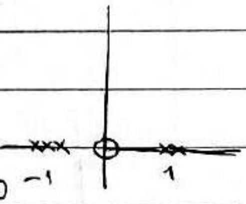
Τότε $\phi_{\hat{A}+\hat{b}\hat{f}^T}(\lambda) = \phi_{A+bf^T}(\lambda) = \phi_{\hat{A}_{11}+\hat{b}_1\hat{f}_1^T}(\lambda) \cdot \det(\lambda I_{n-n_c} - \hat{A}_{22})$

πχ

$\Sigma_i(A, b)$ $\quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\varphi_{A+bf^T}(\lambda) = d(\lambda) = (\lambda+1)^3$

$\sigma(A) = \{1, 1, 0\}$



$\phi_A(\lambda) = \lambda(\lambda-1)^2 = \lambda(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = \lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda + 0$

$\Gamma_c = [\underline{b} \ \ A\underline{b} \ \ A^2\underline{b}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$\det(\Gamma_c) = -1 \neq 0$

$\Sigma_i(A, \underline{b})$ πλ. ελέγξιμο

$\left.\begin{aligned} d(s) &= \lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 \\ a(s) &= \lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda + 0 \end{aligned}\right\}$ $\qquad H_a = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\underline{d}^T = [1 \ \ 3 \ \ 3]$

$\underline{a}^T = [1 \ \ -2 \ \ 1]$ $\qquad A_c = A + \underline{b}\,\underline{f}^T$ (Επαλήθευση)

$\underline{f}^T = (\underline{a} - \underline{d})^T (\Gamma_c H_a)^{-1} = [-5 \ \ -8 \ \ -7]$

Ex

$$\underbrace{\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{\underline{A}} , \quad \underbrace{\left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \hline 0 \end{array}\right]}_{\underline{b}}$$

$$\{A + \underline{b}\underline{f}^T\} = \{(\lambda+1)\ \varphi(\lambda)\}$$

$$f^T = [f_0\ f_1 \mid f_2]$$