n μεταβλητές κατάστασης    m είσοδοι

05-05-2023 Θεωρία Ελέγχου    $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$

Ένα σύστημα εισόδου $\Sigma i(A,B)$ πλήρως ελέγξιμο, αν μπορούμε σε πεπερασμένο χρόνο να μεταφέρουμε οποιαδήποτε αρχική κατάσταση στο 0 και αν κάθε αρχική κατάσταση είναι ελέγξιμη τότε λέμε ότι το σύστημά μας είναι πλήρως ελέγξιμο.

Τα βασικά κριτήρια είναι:

→ Ο πίνακας ελεγξιμότητας:

$$\text{Rank}(\Gamma_c) = n, \quad \Gamma_c = [B \;\; AB \; \cdots \; A^{n-1}B] \in \mathbb{R}^{n \times nm}$$

→ $W_c(0,t_1) > 0$, θετικά ορισμένος

$$W_c(0,t_1) = \int_0^{t_1} e^{-At} BB^T e^{-A^T t} \, dt$$

→ $\text{Rank}[sI_n - A \;\vdots\; B] = n, \quad \forall s \in \mathbb{C}$
$(\forall s \in \sigma(A))$

Για πλήρως παρατηρήσιμο: $\Sigma o(A,C)$ αν μπορούμε να συνάγουμε μονοσήμαντα την αρχική συνθήκη $x_0$.

→ $\text{Rank}(\Gamma_o) = n, \quad \Gamma_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{np \times n}$

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$
$C \in \mathbb{R}^{p \times n}$

→ $W_o(0,t_1) > 0$, θετικά ορισμένος

$$W_o(0,t_1) = \int_0^{t_1} e^{-A^T t} \cdot C^T \cdot C \cdot e^{At} \, dt$$

$$\rightarrow \text{Rank}\begin{bmatrix} sI_n - A \\ C \end{bmatrix} = n \quad \forall\ s \in \mathbb{C} \quad (s \in \sigma(A))$$

<u>Πιο χρήσιμες οι 1 και 3.</u>

B3. Δείξτε ότι: (α) $\Sigma i(A,B)$ π.ε. $\Leftrightarrow$ $\Sigma i(A+aI_n, B)$ π.ε.

(β) $\Sigma i(A,B)$ π.ε. $\Leftrightarrow$ $\Sigma i(A, BB^T)$ π.ε.

(γ) $\Sigma i(A,B)$ π.ε. $\Leftrightarrow$ $\Sigma i(A+B\underset{\downarrow}{F}, BG)$ π.ε.

πίνακας ανάδρασης

$(\det G \neq 0)$
↳ μη ιδιάζων / τετραγωνικός.

<u>Λύση</u>:

(α) $\text{Rank}[sI_n - A \vdots B] = n \quad \forall\ s \in \mathbb{C}$
$\Leftrightarrow \text{Rank}[(s-a)I_n - A \vdots B] = n \quad \forall\ s \in \mathbb{C}$

$\Leftrightarrow \text{Rank}[sI_n - (A+aI_n) \vdots B] = n \quad \forall\ s \in \mathbb{C}$

(β) $\Sigma i(A,B)$ δεν είναι πε $\Leftrightarrow$

$\exists\ \underline{\xi} \in \mathbb{R}^n, \underline{\xi} \neq 0$ : $\underline{\xi}^T[sI - A \vdots B] = 0$ κάποιο $s \in \mathbb{C}$.

$\Leftrightarrow \exists\ \underline{\xi} \in \mathbb{R}^n, \underline{\xi} \neq 0$ : $\underline{\xi}^T A = s\underline{\xi}^T$ και $\underline{\xi}^T B = 0$
↳ είναι ιδιοτιμή

$\Leftrightarrow \exists\ \underline{\xi} \neq 0$ : $\underline{\xi}^T A = s\underline{\xi}^T$ και $\underline{\xi}^T BB^T = 0$

$\Leftrightarrow \exists\ \underline{\xi} \neq 0$ : $\underline{\xi}^T [sI - A \vdots BB^T] = 0$

$\Leftrightarrow \Sigma_i(A, BB^T)$ δεν είναι π.ε.

$\left( \xi^T BB^T = 0 \Rightarrow \underline{\xi}^T BB^T \underline{\xi} = 0 \Rightarrow \|\underline{\xi}^T B\|^2 = 0 \right.$
$\left. \Rightarrow \xi^T B = 0 \right)$

(γ) $\mathrm{Rank}[sI - A - BF \,\vdots\, BG] = n \quad \forall s \in \mathbb{C}$

$\Leftrightarrow \mathrm{Rank}[sI - A : B] \underbrace{\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -F & G \end{bmatrix}}_{\det(\cdot) \neq 0} = n \quad \forall s \in \mathbb{C}$

$\Leftrightarrow \mathrm{Rank}[sI_n - A \,\vdots\, B] = n \quad \forall s \in \mathbb{C}$

(B5) Έστω $\Sigma_i(A, \underline{b})$, $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$, $\underline{b} \in \mathbb{R}^{3\times1}$
και:

$\varphi(A) = \det(\lambda I - A) = (\lambda - \lambda_0)^3$ και $d = 2$.

γεωμ. πολ

(αλγεβρική = 3)

Δείξτε ότι:
$\Sigma_i(A, \underline{b})$ δεν είναι π.ε.

2 κανονικά ιδιοδιανύσματα και 1 γενικευμένο

Λύση:

Έστω $\Sigma_i(A, \underline{b}) \sim \Sigma_i(\mathcal{J}, \hat{\underline{b}})$

$$\mathcal{J} = \left[\begin{array}{cc|c} \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \lambda_0 \end{array}\right], \quad \hat{\underline{b}} = \begin{bmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \hat{b}_3 \end{bmatrix}$$

$$P(s) = [sI_3 - \mathcal{J} \,\vdots\, \hat{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} s - \lambda_0 & -1 & 0 & \hat{b}_1 \\ 0 & s - \lambda_0 & 0 & \hat{b}_2 \\ 0 & 0 & s - \lambda_0 & \hat{b}_3 \end{array}\right]$$

$$P(\lambda_0) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & \vdots & \hat{b_1} \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & \hat{b_2} \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & \hat{b_3} \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \Big\} \text{γραμμικά εξαρτημένα}$$

, $\text{Rank}[P(\lambda_0)] < 3$

$\Rightarrow \Sigma_i(A, \underline{b})$ δεν είναι π.ε.

$\Big\{ \Gamma_c = [\hat{b} \;\; J\hat{b} \;\; J^2\hat{b}] \rightarrow \text{Rank}(\Gamma_c) < 3 \Big\}$

↳ πιο περίπλοκος τρόπος

**B18** Έστω $\Sigma_0(A, C) = \Sigma_0\Big(\underbrace{\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}}_{A}, \underbrace{[I_p \vdots 0]}_{C}\Big)$

$(A_{11} \in \mathbb{R}^{p \times p})$

Δείξτε ότι $\Sigma_0(A, C)$ π.π. $\Leftrightarrow \Sigma_0(A_{22}, A_{12})$ π.π

↳ πίνακας εξόδου

Λύση: Το $\Sigma_0(A, C)$ δεν είναι π.π. $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \exists\, \underline{\xi} \neq 0,\ s \in \mathbb{C} : \begin{bmatrix} sI - A_{11} & -A_{12} \\ -A_{21} & sI - A_{22} \\ \hline I_p & 0 \end{bmatrix} \underline{\xi} = 0$$

$\Leftrightarrow \exists\, \underline{\xi} \neq 0 = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$, $\xi_1 \in \mathbb{R}^p$, $\xi_2 \in \mathbb{R}^{n-p}$, $s \in \mathbb{C}$:

$$: \begin{bmatrix} sI - A_{11} & -A_{12} \\ -A_{21} & sI - A_{22} \\ I_p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\xi_1} \\ \underline{\xi_2} \end{bmatrix} = \underline{0}$$

$\Leftrightarrow \exists \xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \neq 0, \ s \in \mathbb{C}: \quad \cancel{(sI - A_{11})}^{0} \xi_1 - A_{12} \underline{\xi_2} = 0$

$\qquad \cancel{-A_{21}}^{0} \underline{\xi_1} + (sI - A_{22}) \xi_2 = 0$

$\Big\} \ \underline{\xi_1} = 0$

$\Leftrightarrow \exists \ \underline{\xi_2} \neq 0, \ s \in \mathbb{C}: \quad \left.\begin{matrix} -A_{12} \underline{\xi_2} = 0 \\ (sI - A_{22}) \underline{\xi_2} = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ Το γράφω σαν:

$$\begin{bmatrix} sI - A_{22} \\ A_{12} \end{bmatrix} \underline{\xi_2} = 0$$

$\Leftrightarrow \Sigma_0(A_{22}, A_{12})$ δεν είναι π.π.

(B1) Έστω $\Sigma(A, B, C)$ $\xrightarrow{}$ $4\times4$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ -1 \ 0 \ 0]$$

(α) $\mathcal{X}_c$, (ελέγξιμος υπόχωρος)

(β) $\mathcal{X}_{\bar{o}}$, μη παρατηρήσιμος υπόχωρος

(γ) Το αφήνουμε προς το παρόν.

<u>Λύση:</u>

$\Gamma_c = [\ \underline{b} \quad A\underline{b} \quad A^2\underline{b} \quad A^3\underline{b}\ ] =$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{Rank}(\Gamma_c) = 2 \Rightarrow$$

$\Sigma_i(A, B)$ δεν είναι π.ε.

$$\mathcal{X}_c = R(\Gamma_c) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

(β) $\Gamma_0 = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}$

$Rank(\Gamma_0) = 2 < 4 \Rightarrow \Sigma_0(A, C)$ δεν είναι π.π.

$\mathcal{X}_{\bar{0}} = \ker(\Gamma_0) = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^4 : \Gamma_0 \cdot \underline{x} = \underline{0} \} =$

$= \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^4 : x_1 = x_2 , x_3 = x_4 \} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$

Παρατηρούμε: $\mathcal{X}_C = \mathcal{X}_{\bar{0}}$

(γ) Να βρεθεί $Q \in \mathbb{R}^{4\times4}$, $\det(Q) \neq 0$ :

$\underline{z} = Q^{-1}\underline{x}$ ώστε:

$$\underline{z}' = \begin{bmatrix} z_1' \\ z_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A_{11}} & 0 \\ \hat{A_{21}} & \hat{A_{22}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{B_1} \\ \hat{B_2} \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} \hat{C_1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

όπου $\Sigma(\hat{A_{11}}, \hat{B_1}, \hat{C_1})$ είναι σε κανονική μορφή παρατ.

$\hat{A_{11}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix}$, $\hat{B_1}$, $\hat{C_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$