Πχ
$$\underbrace{\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{A}, \quad \underbrace{\left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \hline 0 \end{array}\right]}_{b}$$

$$\{A + bf^T\} = \{(\lambda+1)\ \varphi(\lambda)\}$$
$$f^T = [f_0\ f_1 \mid f_2]$$

09/05/23

Θεωρημα: Εστω $\Sigma_i(A,B)$ π.ε (πλήρως ελέγξιμο), $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ όπου $m>1$.
Τότε $\exists\ F_0 \in \mathbb{R}^{m\times n}$ και $\underline{v} \in \mathbb{R}^m$ τ.ω $\Sigma_i(A+BF_0, B\underline{v})$ π.ε.

Αποδ: Εφόσον $\Sigma_i(A,B)$ π.ε τότε $\exists\ \underline{v} \in \mathbb{R}^m : B\underline{v} \neq 0$.
Θα δείξουμε η ακολουθία $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n\}$ που ορίζεται αναδρομικά μέσω ακολουθίας $\{u_1, u_2, \dots, u_{n-1}\} \in \mathbb{R}^m$ ως
$\underline{e}_1 = B\underline{v}$, $\underline{e}_{j+1} = A\underline{e}_j + B\underline{u}_j$, $j = 1,2,\dots,n-1$.
ώστε η $\{\underline{e}_j\}_{j=1}^n$ να είναι βάση του $\mathbb{R}^n$
Έστω ότι η ακολουθία δεν μπορεί να ολοκληρωθεί δηλαδή για κάποιο $k \leq n-1$ $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_k\}$ $\forall u \in \mathbb{R}^n$ $\underline{e}_{k+1} = A\underline{e}_k + B\underline{u} \in \langle \underline{e}_1, \dots, \underline{e}_k \rangle$
Τότε αν $\underline{u} = \underline{0}$ $A\underline{e}_k \in \langle \underline{e}_1, \dots, \underline{e}_k \rangle$
$\Rightarrow B\underline{u} \in \langle \underline{e}_1, \dots, \underline{e}_k \rangle$ $\forall \underline{u} \in \mathbb{R}^m$
$A\underline{e}_j = \underline{e}_{j+1} - B\underline{u}_j \in \langle \underline{e}_1, \dots, \underline{e}_k \rangle = E_0$ $j = 1,2,\dots,k-1$
O E_0 είναι A-αναλλοίωτος και $R(B) \subseteq E_0$.
Επομένως $\mathcal{X}_c \subseteq E_0$.
ελέγξιμος υπόχωρος

$\Rightarrow \mathbb{R}^n = \mathcal{X}_c = E_0$ ερχεται σε αντίφαση.
Επομένως $k = n$ και ο αλγόριθμος ολοκληρώνεται
Ορίζουμε $\rightarrow F_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$
$$F_0\,\underline{e}_j = \underline{u}_j \quad j = 1,2,\dots,n$$
Τότε: $\underline{e}_{j+1} = A\underline{e}_j + BF_0\,\underline{e}_j$
$$= (A+BF_0)\underline{e}_j = (A+BF_0)^2\,\underline{e}_{j-1} = \dots = (A+BF_0)^j\,\underline{e}_1, \quad j = 1,2,\dots,n-1.$$

Ο πίνακας ελεγξιμότητας του $\Sigma_i(A+BF_0, B\underline{u})$

$$\Gamma_c = [\underbrace{B\underline{u}}_{e_1} \vdots \underbrace{(A+BF_0)e_1}_{e_2} \cdots \underbrace{(A+BF_0)^{n-1}e_1}_{e_n}]$$

$\rightarrow \det(\Gamma_c) \neq 0 \rightarrow \Sigma_i(A+BF_0, B\underline{u})$ πλήρως ελ. ∎

<u>Θεώρημα</u>: Έστω $\Sigma_i(A,B)$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ π.ε. $(m>1)$

Τότε $\exists F \in \mathbb{R}^{m\times n}$ τ.ω το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του

$A_c := A+BF$ (πίνακας κλειστού βρόγχου) είναι αυθαίρετο

$\phi_{A_c}(\lambda) = \lambda^n + d_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + d_1\lambda + \lambda_0$ $(d_i \in \mathbb{R})$.

<u>Αποδ.</u>: Εφόσον $\Sigma_i(A,B)$ π.ε τότε $\exists \underline{u} \neq 0$ και $F_0 \in \mathbb{R}^{m\times n}$ τ.ω

$\Sigma_i(A+BF_0, B\underline{u})$ π.ε. Επομένως $\exists f^T \in \mathbb{R}^n$ τ.ω το χαρακτηριστικό

πολυώνυμο $\phi_{A+BF_0+B\underline{u}f^T}(\lambda)$ αυθαίρετο.

Όμως $A+BF_0 + B\underline{u}\underline{f}^T = A + B\underbrace{(F_0 + \underline{u}\underline{f}^T)}_{F}$

και επομένως $\exists F \in \mathbb{R}^{m\times n}$ τ.ω το χαρ. πολ. του $A+BF$ αυθαίρετο ∎

<u>Ορισμός</u>: $\Sigma_i(A,B)$ είναι σταθεροποιήσιμο αν $\exists F \in \mathbb{R}^{m\times n}$ τ.ω

$\sigma(A+BF) \subseteq \mathbb{C}_- = \{s \in \mathbb{C} : Re(s) < 0\}$

<u>Θεώρημα</u>: $\Sigma_i(A,B)$ σταθεροποιήσιμο $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Rank}([sI_n - A \vdots B]) = n$

$\forall s \in \overline{\mathbb{C}}_+ = \{s \in \mathbb{C} : Re(s) \geq 0\}$.

<u>Αποδ.</u>: Ορίζουμε $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\det(Q) \neq 0$ τ.ω $Q^{-1}AQ = \hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ 0 & \hat{A}_{22} \end{bmatrix}$

$\hat{B} = Q^{-1}B = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}$ όπου $\Sigma_i(\hat{A}_{11}, \hat{B}_1)$ π.ε.

Αν $F \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ορίζουμε $F = \hat{F}Q^{-1} \Leftrightarrow \hat{F} = FQ$.

Το σύστημα $\Sigma_i(A,B)$ σταθεροποιήσιμο $\Leftrightarrow$ $\Sigma_i(\hat{A},\hat{B})$ σταθεροποιήσιμο

($\hat{F} = [\hat{F}_1 \,\vdots\, \hat{F}_2]$ όπου $\hat{F}_1 \in \mathbb{R}^{m \times n_c}$, $\hat{F}_2 \in \mathbb{R}^{m \times (n - m_c)}$)

αφού: $\hat{A} + \hat{B}\hat{F} = Q^{-1}AQ + Q^{-1}BFQ = Q^{-1}(A+BF)Q$

Έστω.

Τότε $$\hat{A} + \hat{B}\hat{F} = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ 0 & \hat{A}_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ \hline 0 \end{bmatrix} [\hat{F}_1 \,\vdots\, \hat{F}_2]$$

$$= \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} + \hat{B}_1\hat{F}_1 & \hat{A}_{12} + \hat{B}_1\hat{F}_2 \\ 0 & \hat{A}_{22} \end{bmatrix}$$

και επομένως $\Sigma_i(\hat{A},\hat{B})$ σταθεροποιήσιμο $\Leftrightarrow$ $\sigma(\hat{A}_{22}) \subseteq \mathbb{C}_-$

$$\Leftrightarrow \text{Rank} \left[\begin{array}{cc|c} sI_{n_c} - \hat{A}_{11} & -\hat{A}_{12} & \hat{B}_1 \\ 0 & sI_{n-n_c} - \hat{A}_{22} & 0 \end{array}\right] = n \quad \forall s \in \overline{\mathbb{C}}_+$$

$\Leftrightarrow \text{Rank}[sI_n - \hat{A} \,\vdots\, \hat{B}] = n \quad \forall s \in \overline{\mathbb{C}}_+ \Leftrightarrow \text{Rank}[sI_n - Q^{-1}AQ \,\vdots\, Q^{-1}B] = n$

$$\text{Rank}\left(Q^{-1}[sI - A \,\vdots\, B] \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix}\right) = n \quad \forall s \in \overline{\mathbb{C}}_+$$

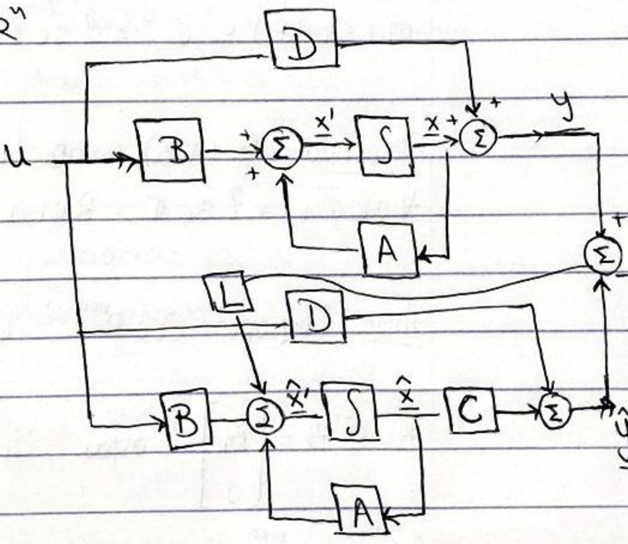
$$\Rightarrow \text{Rank}([sI - A \,\vdots\, B]) = n \quad \forall s \in \overline{\mathbb{C}}_+$$

<u>Παρατηρητές / Εκτιμητές</u>

Εκτίμηση της $x(t)$ του συστήματος με χρήση ($\underline{u}_{[0,k_1]}, \underline{y}_{[0,k_1]}$)

Σύστημα "υπό έλεγχο" (Plant)

$$\begin{cases} \underline{x}' = A\underline{x} + B\underline{u}, & \underline{x}(0) = \underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n \\ \underline{y} = C\underline{x} + D\underline{u} \end{cases}$$



Παρατηρητής (Observer)

$$\hat{\underline{x}}' = A\hat{\underline{x}} + B\underline{u} - L(y - \hat{y})$$
$$\hat{y} = C\hat{\underline{x}} + D\underline{u}$$

Ορίζω $\underline{e}(t) = \underline{x} - \underline{\hat{x}}$ (σφάλμα εκτίμησης)

$\underline{e}'(t) = \underline{x}' - \underline{\hat{x}}' = Ax + Bu - [A\underline{\hat{x}} + Bu - LC\underbrace{(x-\hat{x})}_{e}]$

$= A\underbrace{(\underline{x}-\underline{\hat{x}})}_{e} + LCe$

$\Rightarrow \underline{e}' = (A+LC)\underline{e}$, $\underline{e}(0) = e_0 = \underline{x}(0) - \underline{\hat{x}}(0)$

$\Rightarrow \underline{e}(t) = \exp((A+LC)t)e_0 \xrightarrow{t\to+\infty} 0$

$\forall \underline{e_0} \in \mathbb{R}^n$

$\underline{e}(t) \to 0$ καθώς $t \to +\infty$ $\forall \underline{e_0} \in \mathbb{R}^n$

$\Leftrightarrow \sigma(A+LC) \subseteq \mathbb{C}_-$

$\Leftrightarrow \sigma(A^T + C^T L^T) \subseteq \mathbb{C}_-$

$\Leftrightarrow \Sigma_i(A^T, C^T)$ είναι σταθεροποιήσιμο.

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $A+LC$ καθορίζεται αυθαίρετα

$\Leftrightarrow$ το χαρακτ. πολυώνυμο του $A^T + C^T L^T$ καθορίζεται αυθαίρετα

$\Leftrightarrow \Sigma_i(A^T, C^T)$ π.ε.

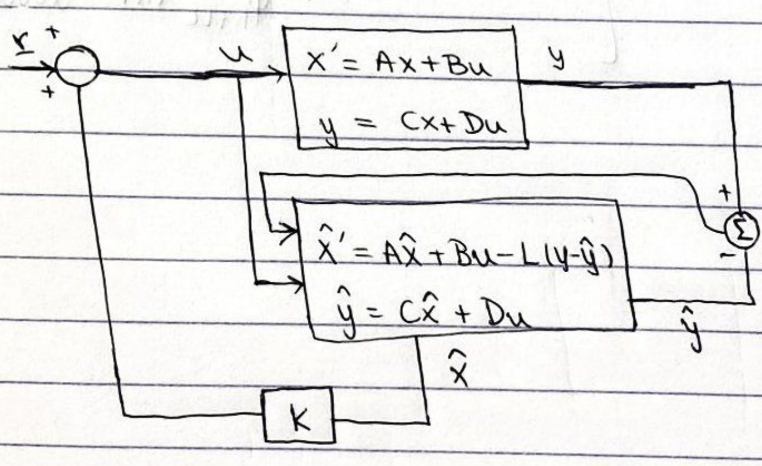
$\Leftrightarrow \Sigma_o(A, C)$ π.π.

Αρχή Διαχωρισμού

Plant: $\underline{x}' = A\underline{x} + B\underline{u}$, $\underline{y} = C\underline{x} + D\underline{u}$

Παρατ: $\underline{\hat{x}}' = A\underline{\hat{x}} + B\underline{u} - L(\underline{y}-\underline{\hat{y}})$, $\underline{\hat{y}} = C\underline{\hat{x}} + D\underline{u}$

Αν. κατ: $\underline{u} = \underline{r} + K\underline{\hat{x}}$



$\underline{x}' = A\underline{x} + B(\underline{r} + K\underline{\hat{x}}) = A\underline{x} + BK\underline{\hat{x}} + B\underline{r}$

$\underline{\hat{x}}' = A\underline{\hat{x}} + B(\underline{r} + K\underline{\hat{x}}) - LC(\underline{x} - \underline{\hat{x}})$

$= -LC\underline{x} + (A+BK+LC)\underline{\hat{x}} + B\underline{r}$

$$\begin{bmatrix} \underline{x}' \\ \hat{\underline{x}}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & BK \\ -LC & A+BK+LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \hat{\underline{x}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix} \underline{r}$$

$$\underline{\xi}' = A_c \underline{\xi} + B_c$$

Ορίζω μετασχηματισμό $(\underline{x}, \hat{\underline{x}}) \to (\underline{x}, \underline{e})$

$e = x - \hat{x}$

$\hookrightarrow \underline{x}' = A\underline{x} + BK(\underline{x} - \underline{e}) + B\underline{r}$

$$\boxed{x' = (A+BK)\underline{x} - BK\underline{e} + B\underline{r}}$$

$e' = x' - \hat{x}' = (A + \cancel{BK})\underline{x} - BK\underline{e} + \cancel{B\underline{r}} -$

$- A\hat{x} - B(r + k(\underline{x} - \underline{e})) + LCe = (A+LC)\underline{e}$

$\Rightarrow e' = (A+LC)\underline{e}$

$$\begin{bmatrix} \underline{x}' \\ \underline{e}' \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A+BK & -BK \\ 0 & A+LC \end{bmatrix}}_{A_c} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}}_{B_c} r$$

$\sigma(A_c) = \sigma(A+BK) \cup \sigma(A+LC)$

Αρχή του διαχωρισμού

$S_i(A,B)$ π.ε $\rightsquigarrow \phi_{A+BK}(\lambda)$ αυθαίρετο

$S_o(A,C)$ π.π (πλήρως παρατηρήσιμο)

$\rightsquigarrow \phi_{A+LC}(\lambda)$ αυθαίρετο.