16/05/23

Εξίσωση Sylvester

$AX + XB = C$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{r\times r}$, $X, C \in \mathbb{R}^{n\times r}$

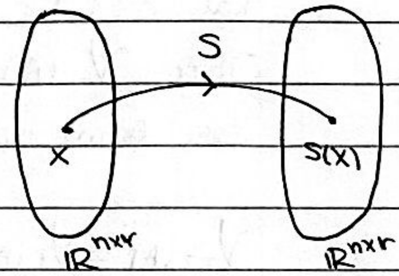
Θεώρημα

Αν $\sigma(A) \cap \sigma(-B) = \emptyset$ (δηλ. $\nexists$ κοινή ιδιοτιμή στους A και $-B$
ισοδύναμα $\lambda_i(A) + \lambda_j(B) = 0$ $\forall i = 1,2,\dots,n$
$\forall j = 1,2,\dots,n$)

Τότε $\exists$ μοναδική λύση X και αντίστροφα.

Απόδ: Έστω $S: \mathbb{R}^{n\times r} \to \mathbb{R}^{n\times r}$ γραμμικός τελεστής

$S(X) = AX + XB$



Τότε το Θεώρημα Rank-nullity λέει ότι: $\text{Rank}(S) + \underbrace{\text{null}(S)}_{\dim\ker(S)} = nr$

$\Rightarrow \ker(S) = \{0_{n\times r}\} \Leftrightarrow \text{Rank}(S) = nr$

$\Leftrightarrow S$ είναι "επί" και "1-1".

$\Downarrow$

$\forall C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ υπάρχει λύση και μάλιστα μοναδική.

(Αν $S(X_1) = C = S(X_2) \Rightarrow S(X_1 - X_2) = 0 \Rightarrow X_1 = X_2$)

Επομένως $S(X) = C$ έχει μοναδική λύση $\Leftrightarrow \ker(S) = \{0_{n\times r}\}$.

Θα δείξουμε ότι $\sigma(A) \cap \sigma(-B) = \emptyset \Leftrightarrow \ker(S) = \{0_{n\times r}\}$

• Έστω ότι A και $-B$ δεν έχουν κοινή ιδιοτιμή.

Αν $S(X) = 0 \Rightarrow AX = X(-B) \Rightarrow A^2X = AX(-B) = X(-B)^2$ και

επαγωγικά $\rightsquigarrow A^kX = X(-B)^k$ $\forall k \geq 0$.

$\Rightarrow p(A)X = Xp(-B)$ $\forall$ πολυώνυμο p.

Αν επιλέξω $p(\lambda) = \det(\lambda I - A) \Rightarrow p(A) = 0 = Xp(-B) = 0$

Από το Θεώρημα Φασματικής Απεικόνισης:

$\sigma(p(-B)) = p(\sigma(-B)) \Rightarrow p(\lambda_i(-B)) \neq 0$ $\forall i$

και εφόσον $\sigma(A) \cap \sigma(-B) = \emptyset \Rightarrow \lambda_i(p(-B)) \neq 0$ $\forall i$

$\Rightarrow \det(-B) \neq 0 \Rightarrow X = 0 \Rightarrow \ker S = \{0_{n\times r}\}$.

Αντίστροφα έστω $\lambda \in \sigma(A) \cap \sigma(-B)$.

$\Rightarrow \exists\ \underline{v} \in \mathbb{C}^n,\ \underline{v} \neq 0$ και $\exists\ \underline{w} \in \mathbb{C}^r,\ \underline{w} \neq 0$

τ.ω. $A\underline{v} = \lambda \underline{v}$, $\quad \underline{w}^T B = -\lambda \underline{w}^T$

Ορίζω $X = \underline{v}\,\underline{w}^T \neq 0$. Τότε $S(X) = (A\underline{v})\underline{w}^T + \underline{v}(\underline{w}^T B) = \lambda \underline{v}\,\underline{w}^T - \lambda \underline{v}\,\underline{w}^T = 0$.

ένας τουλάχιστον

Αν $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ τότε $Re(X)$ και $Im(X)$ είναι λύση.

$\Rightarrow \ker(S) \neq \{0\}$ ■

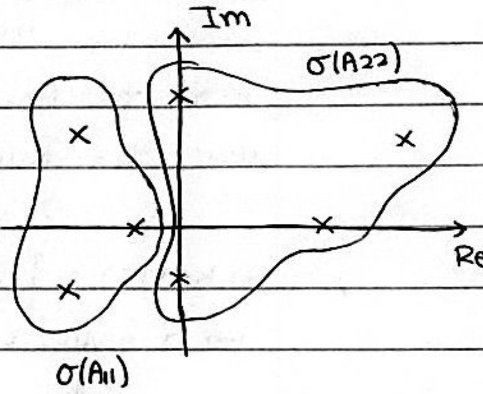
<u>Θεώρημα</u>

Έστω $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ όπου $A_{11} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$, $A_{22} \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$ $(n_1 + n_2 = n.)$

και $\sigma(A_{11}) \subseteq \mathbb{C}_-$ και $\sigma(A_{22}) \subseteq \overline{\mathbb{C}}_+$.

Τότε $V_-(A)$ (ευσταθής ιδιόχωρος)

έχει βάση από τις στήλες $\begin{bmatrix} I_{n_1} \\ 0 \end{bmatrix}$



$V_{+0}(A) = V_+(A) \oplus V_0(A)$

(όπου V_+ ασταθής και V_0 κεντρικός ιδιόχωρος του A)

έχει βάση τις στήλες $\begin{bmatrix} X \\ I_{n_2} \end{bmatrix}$ όπου X η μοναδική λύση της $-XA_{22} + A_{11}X + A_{12} = 0$.

<u>Αποδ:</u> Έστω $A \sim \underbrace{Q^{-1}AQ}_{\hat{A}}$ $\qquad Q = \begin{bmatrix} I_{n_1} & X \\ 0 & I_{n_2} \end{bmatrix}$

Τότε $\hat{A} = \begin{bmatrix} I_{n_1} & -X \\ 0 & I_{n_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n_1} & X \\ 0 & I_{n_2} \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} A_{11} & \overbrace{-XA_{22} + A_{11}X + A_{12}}^{=0} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$$

Αν $\hat{A}\underline{x} = \lambda \underline{x}$ $(\underline{x} \neq 0)$ $\Rightarrow Q^{-1}AQ\underline{x} = \lambda \underline{x} \rightarrow A(Q\underline{x}) = \lambda(Q\underline{x})$

$\rightarrow (\lambda, Q(x))$ ζεύγος ιδιοτ. ιδιοδ. του A.

Οι στήλες του $\begin{bmatrix} I_{n_1} \\ 0 \end{bmatrix}$ είναι βάση του $\mathcal{V}_-(\hat{A})$

Οι στήλες του $\begin{bmatrix} 0 \\ I_{n_2} \end{bmatrix}$ είναι βάση του $\mathcal{V}_+(\hat{A}) \oplus \mathcal{V}_0(\hat{A})$.

Επομένως οι στήλες $\begin{bmatrix} I & X \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n_1} \\ 0 \end{bmatrix}$ είναι βάση $\mathcal{V}_-(A)$

και $\begin{bmatrix} I_{n_1} & X \\ 0 & I_{n_1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ I_{n_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ I_{n_2} \end{bmatrix}$ είναι βάση $\mathcal{V}_+(A) \oplus \mathcal{V}_0(A)$.

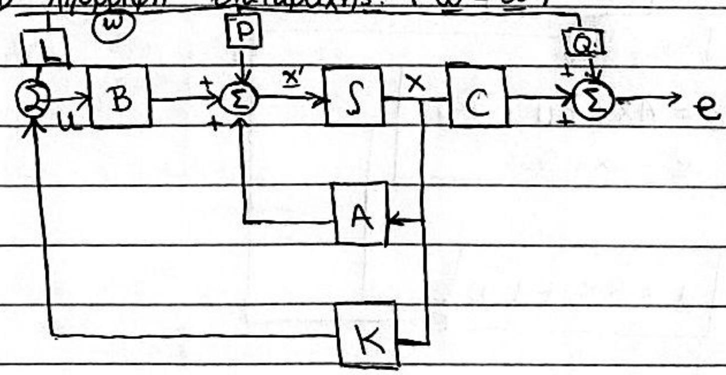
<u>Πρόβλημα Ρύθμισης Σήματος Εξόδου</u> (πλήρους πληροφορίας)

Έστω $x' = A\underline{x} + B\underline{u} + P\underline{w}$

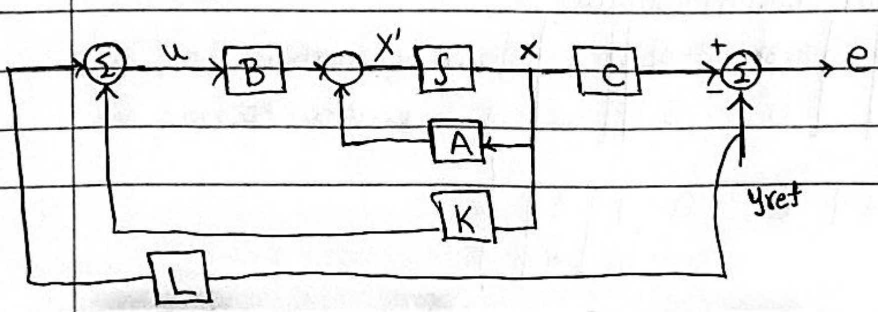
$\underline{e} = C\underline{x} + Q\underline{w}$, $\underline{w}$ εξωγενές σήμα. $\underline{w} \in \mathbb{R}^r$

$\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ διάνυσμα κατάστασης $\quad \underline{u} \in \mathbb{R}^m$ διάνυσμα εισόδου.

① <u>Απόρριψη διαταραχής.</u> ($w = d$)



Παρακολούθηση: $w = y_{ref}$, $P = 0$ $\quad Q = -I$



• Έστω $\underline{x}' = A\underline{x} + B\underline{u} + P\underline{w}$

$\underline{e} = C\underline{x} + Q\underline{w} \longrightarrow 0$ καθώς $t \to \infty$

$$\underline{x}' = A\underline{x} + B\underline{u} + [P \,\vdots\, 0] \underbrace{\begin{bmatrix} d \\ y_{ref} \end{bmatrix}}_{\underline{w}}, \quad \underline{e} = C\underline{x} + [Q \,\vdots\, -I] \begin{bmatrix} d \\ y_{ref} \end{bmatrix}$$

Πρόβλημα (π.π)

Για δοσμένους πίνακες (A, B, C, P, Q, S)

υπάρχουν πίνακες K και L τέτοιοι ώστε

(E) $\sigma(A+BK) \subseteq \mathbb{C}_-$

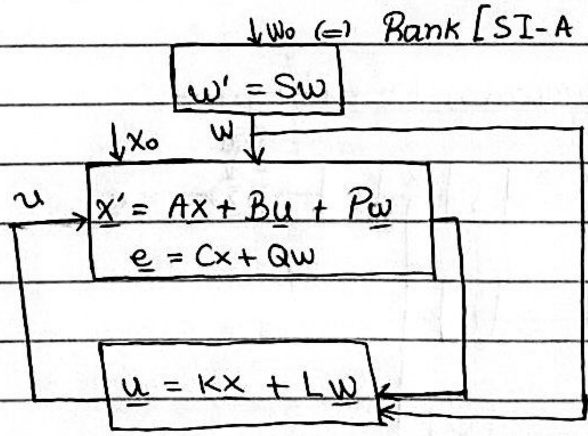
(P) $\forall\, \underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, $\underline{w}_0 \in \mathbb{R}^r$ η λύση του συστήματος

$$\begin{cases} \underline{x}' = (A+BK)x + (P+BL)w \\ \underline{w}' = S\underline{w} \end{cases}$$

τέτοια ώστε $\underline{e} = C\underline{x} + Q\underline{w} \longrightarrow 0$ καθώς $t \to \infty$ $\forall\, x_0, w_0$

$\exists K: \sigma(A+BK) \subseteq \mathbb{C}_- \iff \Sigma_i(A,B)$ σταθεροποιήσιμο

$\iff \operatorname{Rank}[sI - A \mid B] = n \quad \forall s \in \overline{\mathbb{C}}_+$



Y_1: $\sigma(S) \subseteq \overline{\mathbb{C}}_+$

Y_2: $\Sigma_i(A,B)$ σταθεροποιήσιμο

$$\left.\begin{aligned} \begin{bmatrix} x' \\ w' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A+BK & P+BL \\ 0 & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix} \\ e &= [\,C \;\vdots\; Q\,] \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{w} \end{bmatrix} \end{aligned}\right\} \text{Εξισώσεις κλειστού βρόχου.}$$

Έστω $K: \sigma(A+BK) \subseteq \mathbb{C}_-$.

<u>Θεώρημα</u>

Έστω Y_1, Y_2 είναι σε ισχύ. Τότε ο στόχος ρύθμισης [P] επιτυγχάνεται αν και μόνο αν $\exists\, \Pi \in \mathbb{R}^{n\times r}$ τω:

$$\left.\begin{aligned} &(1)\quad \Pi S = (A+BK)\Pi + P + BL \\ &(2)\quad 0 = C\Pi + Q \end{aligned}\right\}.$$

<u>Αποδ:</u> Εφόσον $\sigma(S) \cap \sigma(A+BK) = \emptyset$ τότε η εξίσ. $-\Pi S + (A+BK)\Pi + BL + P = 0$ έχει μοναδική λύση Π.

Ορίζω: $\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{x} - \Pi \underline{w} \\ w \end{bmatrix}$ τότε $\rightsquigarrow$ $\underline{\tilde{x}}' = \underline{x}' - \Pi \underline{w}' =$

$$= (A+BK)x + (P+BL)w - \Pi S w$$

$\hookrightarrow (\tilde{x} + \Pi w)$

$$\Rightarrow \underline{\tilde{x}}' = (A+BK)\tilde{x} + \left[(A+BK)\Pi + (P+BL) - \Pi S\right] w.$$

$$\Rightarrow \underline{\tilde{x}}' = (A+BK)\tilde{x}$$

$$\Rightarrow \tilde{x}(t) = e^{(A+BK)t}(x_0 - \Pi w_0) \xrightarrow{t\to\infty} 0 \quad \forall x_0, w_0.$$

Επίσης
$$\begin{aligned} \underline{e} &= C\underline{x} + Q\underline{w} \\ &= C(\tilde{x} + \Pi w) + Q\underline{w} \\ &= \underbrace{C\tilde{x}}_{\to 0} + (C\Pi + Q)\, w(t) \end{aligned}$$

Άρα $\lim_{t\to\infty} e(t) = 0 \iff \lim_{t\to\infty} (C\Pi + Q)\, e^{St}\underline{w_0} = 0 \quad \forall w_0 \in \mathbb{R}^r$.

$$\iff C\Pi + Q = 0.$$

$$\left(\begin{aligned} &\lim_{t\to\infty} Ce^{At}\underline{x_0} = 0 \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n \\ &\qquad\quad \Updownarrow \qquad\qquad\quad \sigma(A) \subseteq \overline{\mathbb{C}}_+ \\ &\qquad\quad C = 0 \end{aligned} \right)$$

<u>Παρατήρηση</u>

$$\begin{bmatrix} x' \\ w' \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A+BK & BL+P \\ 0 & S \end{bmatrix}}_{A_c} \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix}$$

Τότε $Q^{-1} A_c Q = \begin{bmatrix} A+BK & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix}$

(λύνοντας : $-\Pi S + (A+BK)S + BL + P = 0$)

Επομένως,

$V_+(A_c) = \mathrm{Im}\begin{pmatrix} \Pi \\ I_r \end{pmatrix}$ και $C\Pi + Q = 0 \iff$

$[C \,\vdots\, Q]\begin{bmatrix} \Pi \\ I_r \end{bmatrix} = 0$

$\Rightarrow V_+(A_c) \subseteq \ker(C \backslash Q)$

Άσκηση

$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$\Gamma_c = [B \; AB \; \cdots \; A^4 B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \vdots & & \vdots \\ 1 & & & \\ 1 & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$

$\mathcal{X}_c = R(\Gamma_c) = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$

$\mathcal{X}_{\bar{o}} = \ker(\Gamma_o)$

$= \ker \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

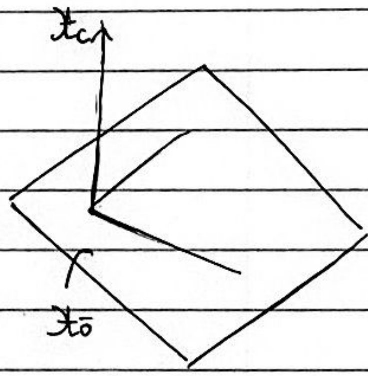
$$\sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \underset{+\Gamma_2 \to \Gamma_3}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\ker(\Gamma_o) = \left\{ \underline{x} \in \mathbb{R}^5 : \begin{aligned} -x_1 + x_2 + x_4 + x_5 &= 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\ x_5 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow x_1 = x_3 \ , \ x_2 = x_3 - x_4 \ , \ x_5 = 0$$

$$\mathcal{X}_{\bar{o}} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$\mathcal{X}_{c\bar{o}} = \mathcal{X}_c \cap \mathcal{X}_{\bar{o}} = R(\Gamma_c) \cap \ker(\Gamma_o)$$



$$\underbrace{\mathcal{X}_{c\bar{o}} \oplus \underset{\substack{\| \\ \mathcal{X}_c}}{\mathcal{X}_{co}}}_{\mathcal{X}_c} \oplus \overset{\text{μη ελέγξ.}}{\mathcal{X}_{\bar{c}o}} \oplus \overset{\text{μη παρατηρ.}}{\mathcal{X}_{\bar{c}\bar{o}}} = \mathbb{R}^5$$

$\mathcal{X}_{\bar{c}o} \to \{\underline{0}\}$

$$Q = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \mathcal{X}_c & \mathcal{X}_{c\bar{o}} & \mathcal{X}_{\bar{o}} \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|cc|cc} 0 & \alpha & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 1 & -1 \\ 1 & \gamma & 0 & 1 & 0 \\ 1 & \delta & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \varepsilon & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{A} &= Q^{-1} A Q \\ \hat{B} &= Q^{-1} B \\ \hat{C} &= C Q \end{aligned} \right\}$$

$$\sim \left[\begin{array}{c|c} \hat{A} & \hat{B} \\ \hline \hat{C} & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|cc|cc|c} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$