23/05/23

$\mathcal{X}_c = R(\Gamma_c)$
$X_{\bar{o}} = \ker(\Gamma_o)$
$X_{c\bar{o}} = X_c \cap X_{\bar{o}}$

Άσκηση 4

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$F \in R^{2\times 4}$: $\sigma(A+BF) = \{-1 \pm i, -1 \pm 2i\}$.

Ϛ χαρακτ. πολυώνυμο A : $s^4 + \underbrace{a_3}_{-4} s^3 + \underbrace{a_2}_{+3} s^2 + \underbrace{a_1}_{-1} s + \underbrace{a_0}_{-1}$

A companion και δεύτερη στήλη του B είναι σε κανονική μορφή ελέγχου άρα σε σύστημα πλήρως ελέγχου
⤳ άρα πετάω την πρώτη στήλη του B
οπότε (ανάδραση κατάστασης μόνο στη δεύτερη είσοδο)

$$A_c = A + B\underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{e_2} \underbrace{\begin{bmatrix} f_0 & f_1 & f_2 & f_3 \end{bmatrix}}_{f^T} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 & f_1 & f_2 & f_3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1+f_0 & 1+f_1 & -3+f_2 & 4+f_3 \end{bmatrix}$$

και το χαρακτηρ. πολυώνυμο του πίνακα
$s^4 + (-4-f_3)s^3 + (3-f_2)s^2 + (-1-f_1)s + (-1-f_0)$

$-1\pm i \qquad\qquad -1\pm 2i$

$\varphi_{A_c}(s) = [(s+1)^2+1][(s+1)^2+2^2] =$

$= (s^2+2s+2)(s^2+2s+5) = s^4+4s^3+11s^2+14s+10$

άρα $-4-f_3 = 4$

$3-f_2 = 11$

$-1-f_1 = 14$

$-1-f_0 = 10$

Αν ήθελα να βρω και τα υπόλοιπα θα έγραφα

$$A_c = A + B\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \end{bmatrix}$$

Άσκηση 5

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$y = [0 \quad 1]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ (εδώ μετράω μόνο το x_2, άρα στην ανάδραση θα ήθελα και x_1 και x_2)

Αν $u=0$: $x_2' = -\omega_0^2 x_1$

$\Rightarrow x_2'' = -\omega_0^2 x_1' = -\omega_0^2 x_2 \Rightarrow x_2'' + \omega_0^2 x_2 = 0$

↳ απλή αρμονική ταλάντωση.

Με την είσοδο, θέλω να το σταθεροποιήσω, η ταλάντωση να τείνει στο 0.

$x_1' = x_2$

$x_2' = -\omega_0^2 x_1 + u$

Πρέπει να εκτιμήσω όλη την κατάσταση (αφού μετράω μόνο το x_2)

Παρατηρητής $\left(\hat{x}' = A\hat{x} + Bu - \underbrace{Lc(x-\hat{x})}_{y-\hat{y}}\right)$

$e = x - \hat{x}$

$e' = x' - \hat{x}' = (A+Lc)e \rightarrow$

↝ Αν A, C παρατηρ. ↝ διαλέγω πλήρως το L

Έστω $\underline{u} = \underline{f}^T \hat{x} = f^T (x - e)$

Άρα $x' = Ax + Bf^T(x-e) = (A + Bf^T)x - Bf^T e$

$e' = (A + LC)e$

$$\begin{bmatrix} x' \\ e' \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A + Bf^T & -Bf^T \\ 0 & A + LC \end{bmatrix}}_{A_C} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}$$

σύστημα κλειστού βρόχου
αλλάζοντας τις συντεταγμ.
δεν αλλάζουν οι ιδιότητες

αυθαίρετο   αυθαίρετο

$\varphi_{\hat{A}}(s) = \varphi_{A+Bf^T}(s) \cdot \varphi_{A+LC}(s)$

A,B πλήρως ελεγ.   A,C πλήρως παρατ.

Έστω $\varphi_{A+Bf^T}(s) = s^2 + 2w_0 s + 4w_0^2 = (s + 2w_0)^2$

$$A + Bf^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ f_0 - w_0^2 & f_1 \end{bmatrix} \qquad \varphi_{A+Bf^T}(s) = s^2 - f_1 s + (w_0^2 - f_0)$$

companion $\Rightarrow$ $f_0 = -3w_0^2$ $\quad \sigma(A+Bf^T) = \{-2w_0, -2w_0\}$

$f_1 = 4w_0$

$$A + LC = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -w_0^2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} [0 \;\; 1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 + l_1 \\ -w_0^2 & l_2 \end{bmatrix}$$

$$\varphi_{A+LC}(s) = s^2 - l_2 s + w_0 l_1 + l_1$$

Έστω $\varphi_{A+LC}(s) = (s + 5w_0)^2$

Θέλουμε πιο γρήγορες ιδιοτιμές για παρατηρητή, δηλαδή πιο αρνητικές, ώστε να τείνει πιο γρήγορα στο 0.

A1) (α) $x'' + \frac{x'}{1+x^2} + x = 0 \qquad x(0) = u_0 \qquad x'(0) = u_1$

$$z' = f(z) \,, \quad z = \begin{bmatrix} x \\ x' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

$$z' = \begin{bmatrix} x' \\ x'' \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} x' \\ -x - \frac{x'}{1+x^2} \end{bmatrix}}_{f(z)} = \begin{bmatrix} z_2 \\ -z_1 - \frac{z_2}{1+z_1^2} \end{bmatrix}$$

β) $\|f(z)\| \le \gamma \|z\|$

$$\|f(z)\|^2 \le z_2^2 + \left(z_1 + \frac{z_2}{1+z_1^2}\right)^2 = z_2^2 + z_1^2 + \underbrace{\frac{2z_1 z_2}{1+z_1^2}}_{\le z_1^2+z_2^2} + \left(\frac{z_2}{z_1^2+1}\right)^2$$

$$\le \|z\|^2 + \underbrace{z_2^2}_{\|z\|^2} + \|z\|^2 \le 3\|z\|^2 \quad \text{άρα} \quad \gamma = \sqrt{3}$$

γ) f Lip, άρα ξέρω τοπικά ότι υπάρχει λύση και ξέρω ότι $\exists$ μέγιστο διάστημα λύσης $\rightsquigarrow (a,b)$

$$\lim_{x \to b^-} x(t)$$

$$g(t) \le G(t) := c + \int_0^t k(s)\, g(s)\, ds \quad \forall\, t \in [0, t_0]$$

$$\Downarrow$$

$$g(t) \le G(t) \le c\, e^{\int_0^t k(s)\, ds} \qquad \text{SOS}$$

Έστω μέγιστο διάστημα ύπαρξης $(a,b) = J$, $0 \in J$ (αρχική συνθ)

$t \in [0,b) \qquad z(t) = z(0) + \int_0^t f(z(s))\, ds \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underbrace{\|z(t)\|}_{g(t)} \le \underbrace{\|z(0)\|}_{c} + \int_0^t \underbrace{\|f(z(s))\|}_{\le \gamma \|z(s)\|} ds$$

$$\gamma \to k, \qquad \|z(s)\| = g(s)$$

άρα από Gronwall

$\|z(t)\| \le c\, e^{\gamma \int_0^t ds} \le c\, e^{\gamma b}$ άτοπο → γιατί θεώρησα b πεπερ. αριθμός.

$\forall\, t \in [0, b)$

Άρα όσο πλησιάζω το b πηγαίνω στο άτοπο.
Η λύση δεν μπορεί να περιέχεται σε ένα συμπαγές σύνολο $\lim_{t \to b} z(t) \notin K$.