Θεωρία Συνόλων

kostas.tsap@gmail.com

	Δευτ.	Τριτ.	Τετ.
Οκτ.	10	11	
	24		26
	31		
Νοεμβρ.		1	
	14		16
	21	22	
Δεκέμβριος	5		
	12	13	14
	19	20	21
Ιαν	9	10	
	16		18

ΠΑΝΤΑ: 18-21

Ασκήσεις: Προτ. ως bonus

Εξ.: 100%

Μοσχοβάκης "Σημειώσεις στη συνολοθεωρία

Θεωρία Συνόλων

"Αφελής" – Αξιωματική

Διττός ρόλος

Μελέτη των (άπειρων) συνόλων

Αξιωματικού (ενοποιητικού) τρέχοντος θεμελίου του μαθηματικού οικοδομήματος

Σε αυτό το μάθημα έχει (πολύ) μεγαλύτερη σημασία ο τρόπος (η μέθοδος) παρά το περιεχόμενο εδώ είναι η ασάφεια

(2) Θεωρώντας μια "ιδιότητα" $P(.)$ και σχηματίζοντας το σύνολο (τη συλλογή) των αντικειμένων που την ικανοποιούν.

$\{x : P(x)\}$ ισοδύναμο $\{x \mid P(x)\}$

π.χ. $A = \{x : x$ άρτιος φυσ. αριθμός$\}$

Η Ενοποιητική σκοπιά της Θεωρίας Συνόλων χρησιμοποιεί ως πρωταρχική έννοια αυτή του συνόλου και ως πρωταρχικές σχέσεις ~~σ~~ τα σύνολα τις σχέσεις:

$\in$ (ανήκειν), $=$ (ισότητα)

Ωστόσο, αλόγιστη χρήση αυτών των εννοιών-μεθόδων οδηγεί σε παράδοξα.

(1) Russell

Θεωρούμε τη συλλογή $V = \{x : x \notin x\}$

π.χ. $\mathbb{N} \in V$

Ερώτημα: $V \overset{?}{\in} V$

Συνοπτικά: $V \in V \longleftrightarrow V \notin V$ ↯ άτοπο

(2) Richard/Berry

Έστω N ο ελάχιστος φυσικός αριθμός ο οποίος δεν ορίζεται | από καμμία με το πολύ 200 γράμματα

Η πρόταση αυτή έχει ...

εδώ είναι η απορία

(2) Θεωρώντας μια "ιδιότητα" $P(\cdot)$ και σχηματίζοντας το σύνολο (τη συλλογή) των αντικειμένων που την ικανοποιούν.

$\{x : P(x)\}$ ισοδύναμο $\{x \mid P(x)\}$

π.χ. $A = \{x : x$ άρτιος φυσ. αριθμός$\}$

Η Ενοποιητική οπτική της Θεωρίας Συνόλων χρησιμοποιεί ως πρωταρχική έννοια αυτή του συνόλου και ως πρωταρχικές σχέσεις στα σύνολα τις σχέσεις:

$\in$ (ανήκειν), $=$ (ισότητα)

Ωστόσο, αλόγιστη χρήση αυτών των εννοιών-μεθόδων οδηγεί σε παράδοξα.

(1) <u>Russell</u>

Θεωρούμε τη συλλογή $V = \{x : x \notin x\}$

π.χ. $\mathbb{N} \in V$

Ερώτημα: $V \overset{?}{\in} V$

Συνεπτικά: $V \in V \leftrightarrow V \notin V$ Άτοπο

(2) <u>Richard/Berry</u>

Έστω N ο ελάχιστος φυσικός αριθμός ο οποίος δεν ορίζεται το πολύ 200 γράμματα

από καμμία με

Η πρόταση αυτή έχει λιγότερο από 200 γράμματα

Παράδοξο

Προς τη κατεύθυνση της αυστηρής αξιωματικοποίησης, χρησιμοποιούμε τα βασικά εργαλεία του 1ο βάθμιου Κατηγορηματικού Λογισμού

Η γλώσσα της συνολοθεωρίας έχει 2 (μη λογικά) σύμβολα 2-μελών κατηγορημάτων:

$\in \quad =$

Σύμβολα της γλώσσας

- $\in$, $=$
- $x, y, z, \ldots, X, Y, Z, \ldots, A, B, C$ (μεταβλητές)
- $\forall, \exists$ (ποσοδείκτες)
- $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ (λογικοί σύνδεσμοι)
- $($, $)$ (παρενθέσεις)

Οι τύποι (δηλαδή οι συντακτικά καλοσχηματισμένες εκφράσεις της γλώσσας, στις οποίες θα αποδίδουμε νόημα) της γλώσσας ορίζονται αναδρομικά ως εξής:

Ατομικοί τύποι

$x \in y$
$x = y$

Σύνθετοι τύποι

- Οι ατομικοί τύποι
- Αν φ, ψ τύποι τότε και οι: $\neg\varphi$, $\varphi\wedge\psi$, $\varphi\vee\psi$, $\varphi\rightarrow\psi$, $\varphi\leftrightarrow\psi$ είναι τύποι

Σύνθετοι τύποι

• Αν φ τύπος και x μεταβλητή τότε και οι: $(\forall x)\varphi$, $(\exists x)\varphi$ είναι τύποι

25/10

Συμβάσεις / ανορθογραφίες

Γράφουμε	Αντί για
$x \notin y$	$\neg(x \in y)$
$x \neq y$	$\neg(x = y)$
$(\exists x \in A)\varphi(x)$	$(\exists x)(x \in A \wedge \varphi(x))$
$(\forall x \in A)\varphi(x)$	$(\forall x)(x \in A \rightarrow \varphi(x))$

$$\neg(\forall x)\varphi(x) \equiv (\exists x)\neg\varphi(x)$$

π.χ. (τύπων)

$\varphi(x) : (\forall y)(y \notin x)$

«το x είναι κενό»

Δεδομένου A:

$\varphi(x) : (\forall z)(z \in x \rightarrow z \in A)$

«$x \subseteq A$»

Αξιώματα

(Α1) ΑΞΙΩΜΑ ΤΗΣ ΕΚΤΑΣΗΣ (extensionality)

Δύο σύνολα τα οποία έχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία είναι μεταξύ τους ίσα.
Δηλαδή για κάθε A, B:

$$((\forall z)(z \in A \leftrightarrow z \in B)) \rightarrow A = B$$

Παρατήρηση: Το αντίστροφο ισχύει έτσι και αλλιώς.

Το (Α1) λέει τι είδους σύνολα πρόκειται να μελετήσουμε.
Είναι μία μη προφανής αρχή.
Δεν ισχύει εν γένει στις διμελείς σχέσεις

(Α2) ΑΞΙΩΜΑ ΤΟΥ ΚΕΝΟΥ (Empty Set)

Υπάρχει ένα σύνολο το οποίο δεν περιέχει κανένα στοιχείο.

$$(\exists y)(\forall x)(x \notin y)$$

Το σύνολο αυτό είναι μοναδικό λόγω (Α1)

Άσκηση

Θα το συμβολίζουμε με $\emptyset$

(Α3) ΑΞΙΩΜΑ ΤΟΥ ΖΕΥΓΟΥΣ
(pairing)

Δεδομένων συνόλων A, B υπάρχει ένα σύνολο στο οποίο ανήκουν (ακριβώς) τα A, B στοιχεία.

Δηλ., για κάθε A, B:

$$(\exists y)(\forall z)(z \in y \leftrightarrow (z = A \vee z = B))$$

Το σύνολο αυτό είναι μοναδικό λόγω (Α1)

ΑΣΚΗΣΗ

Το σύνολο αυτό το λέμε και μη διατεταγμένο ζεύγος (των A, B) και το γράφουμε:

$$\{A, B\}$$

Ειδική περίπτωση αν $A = B$ τότε προκύπτει η ύπαρξη του $\{A\}$

(Α1)

(Α2) $\emptyset$

(Α3) $\{\emptyset\}$ $\{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\}$

$\{\{\emptyset\}\}$

⋮

(*) Η ύπαρξη του $<A, B>$ προκύπτει από το (A3) και η μοναδικότητα από το (A1)

Τα αξιώματα χωρίζονται σε 3 κατηγορίες:

- Δομικά αξιώματα (π.χ. (A1))
- Αξιώματα απευθείας ύπαρξης συνόλου (π.χ. (A2))
- "Παραγωγικοί" κανόνες (π.χ. (A3))

Είναι χρήσιμο να έχουμε μία έννοια διατεταγμένου ζεύγους.

<u>Ορισμός</u> (Kuratowski) Δεδομένων A, B ορίζουμε <u>το διατεταγμένο ζεύγος των A, B</u> ως εξής:

$$<A, B> = \{\{A\}, \{A, B\}\} \ (*)$$

<u>Πρόταση</u> $\forall A, B, C, D$:

$$<A, B> = <C, D> \leftrightarrow (A = C \land B = D)$$

|ΑΣΚΗΣΗ|

<u>Παρατήρηση</u>:
Στην ειδική περίπτωση όπου $A = B$ έχουμε $<A, A> = \{\{A\}\}$

Αντίστοιχα ορίζουμε και διατεταγμένες n-άδες (όπου n πεπερασμένος μεταγλωσσικός φυσικός αριθμός) ως εξής: π.χ. Για $n=3$:

$$\langle A, B, C\rangle = \langle\langle A, B\rangle, C\rangle$$

(A4) ΑΞΙΩΜΑ ΤΗΣ (ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΗΣ) ΕΝΩΣΗΣ (union)

Δεδομένου συνόλου A, υπάρχει ένα σύνολο ~~στο οποίο ανήκουν~~ (ακριβώς) τα στοιχεία των στοιχείων του A. Δηλαδή, για κάθε A:

Η απόδοση του υποχρ.

$$(\exists y)(\forall z)(z \in y \leftrightarrow (\exists w)(w \in A \wedge z \in w))$$

Το σύνολο αυτό είναι μοναδικό από (A1) και το συμβολίζουμε $\cup A$.

Διαισθητικά "απαλοίφουμε" τις αγκύλες

27 Οκτώβρη 2022

Εναλλακτικά έχουμε ότι $\forall x$:

$$x \in \bigcup A \longleftrightarrow (\exists y \in A)(x \in y)$$

Ειδική περίπτωση $\bigcup\{A,B\} = A \cup B$

Κλασική, γνωστή συνόλου ένωση

Παρατηρήσεις: Για κάθε A:

- Αν $x \in A$, τότε $x \subseteq \bigcup A$
- $A = \bigcup\{A\}$

Άσκηση $\forall$ (μεταθεωρητικό) φυσ. αριθμό $n \geq 3$ ν.δ.ο., με χρήση του (Α4), υπάρχουν n-σύνολα.

Το επόμενο αξιωματικό σχήμα, τυποποιεί αυστηρά την "αφελή" μέθοδο σχηματισμού συνόλων $\{x : P(x)\}$ μέσω κάποιας ιδιότητας

(Α5) ΑΞΙΩΜΑΤΙΚΟ ΣΧΗΜΑ ΔΙΑΧΩΡΙΣΜΟΥ (Separation, restricted comprehension, Aussonderung)

Δεδομένου τύπου Φ στη γλώσσα της συνολοθεωρίας και δεδομένου συνόλου A, υπάρχει ένα σύνολο στο οποίο ανήκουν (ακριβώς) εκείνα τα στοιχεία του A που ικανοποιούν τον Φ. Δηλ., δεδομένου Φ, $\forall A$:

$\longrightarrow$

$(\exists y)(\forall z)(z \in y \leftrightarrow (z \in A \wedge \Phi(z)))$

Δηλ. $y = \{z : z \in A \wedge \Phi(z)\} =$

$= \{z \in A : \Phi(z)\}$

Μοναδικό από A1

Για το παράδοξο Russell

$$V = \{x : x \in x\}$$

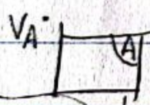
$$V \in V \leftrightarrow V \notin V$$

Έστω δεδομένο A θέτουμε:

$$V_A = \{x \in A : x \notin x\}$$

$V_A \in V_A$;

Περ. 1 $V_A \in V_A \leftrightarrow (V_A \in A \wedge V_A \notin V_A)$ { άτοπο }



Περ. 2 $V_A \notin V_A \leftrightarrow (\underline{V_A \notin A} \vee V_A \in V_A)$

Σχετικό με αυτό, αλλά και σημαντικό γενικά

Ειδικότερα, το σύμπαν των συνόλων (ό,τι και αν σημαίνει αυτό) δεν είναι σύνολο, δηλαδή η ύπαρξή του δεν προκύπτει από τα αξιώματα (μέχρι στιγμής).

Εφαρμογή του (Α5)

Έστω R δεδομένο σύνολο. Ν.δ. ότι υπάρχει το σύνολο στο οποίο ανήκουν (ακριβώς) όλες οι πρώτες συντεταγμένες από τα διατεταγμένα ζεύγη του R.

Δηλαδή $\{x : (\exists y) <x,y> \in R\}$

$\{x\}, \{x,y\} \in \bigcup R$

$x, y \in \bigcup\bigcup R$

$(\exists y) <x,y> \in R \quad x, \emptyset$

$(\exists y)(\exists z)(z = <x,y> \land z \in R)$

$\{\{x\}, \{x,y\}\}$

A3

$A3 \{\{x,\emptyset\}, \{x,y\}\}$

Σχέσεις, Συναρτ., Οικ. συνόλων
Γενικ. Καρτ. Γινόμενο

(A6) ΑΞΙΩΜΑ ΤΟΥ ΔΥΝΑΜΟΣΥΝΟΛΟΥ (power set)

Δεδομένου συνόλου A, υπάρχει ένα σύνολο στο οποίο ανήκουν (ακριβώς) όλα τα υποσύνολα του A. Δηλαδή, $\forall A$:

$$(\exists y)(\forall z)(z \in y \longleftrightarrow \underbrace{z \subseteq A}_{(\forall w)(w \in z \to w \in A)})$$

Μοναδικό από (A1)

$$\mathcal{P}(A) = \{x : x \subseteq A\}$$

<u>Άσκηση</u> Έστω δεδομένο A. Ν.δ. ότι υπάρχει το $\{\{a\} : a \in A\}$

<u>Άσκηση.</u> g(iv) πρώτο Set
Έστω δεδομένα A, B. Ν.δ.ο υπάρχει το:

Καρτεσιανό γινόμενο $A \times B$

$$A \times B = \{\langle x,y\rangle : x \in A \wedge y \in B\}$$

<u>Σύμβαση</u>: $A \times A = A^2$

Στη βάση των (A1)-(A6) ορίζονται στη συνολοθεωρητικώς, διάφορες χρήσιμες και ενδιαφέρουσες γενικευμένες έννοιες.

ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΗ ΤΟΜΗ

Δεδομένου $\underline{A \neq \emptyset}$, ορίζουμε το:

$$\bigcap A = \{x : (\forall y \in A)(x \in y)\}$$

<u>Άσκηση</u>: Σκεφτείτε γιατί το A πρέπει να είναι $\neq \emptyset$

Ιδιότητες $\forall A \neq \emptyset$:

- Αν $x \in A$, τότε $x \supseteq \bigcap A$
- $\bigcap\{A\} = A$
- $\bigcap\{\emptyset\} = \emptyset$

(Διμελής)
Σχέση: σύνολο διατ. ζευγών

Συνάρτηση: διμελής σχέση η οποία είναι μονοσήμαντη

f // $(\forall x)(\forall y)(\forall z)((\langle x,y\rangle \in f \wedge \langle x,z\rangle \in f) \to y=z)$

Συμφωνία: Από εδώ και στο εξής θα γράφουμε $f: A \to B$ και θα εννοούμε τα εξής:
(1) η f είναι συνάρτηση
(2) $dom(f) = A$ → πεδίο ορισμού
(3) $rng(f) \subseteq B$ → πεδίο τιμών

f: διμελή σχέση
$dom(f) = \{x : (\exists y)\ \langle x,y\rangle \in f\}$
$rng(f) = \{x : (\exists y)\ \langle y,x\rangle \in f\}$

Το f^{-1} ορίζεται πάντα

Έστω f, g συναρτήσεις τότε $f \subseteq g$ σημαίνει:
(1) $dom(f) \subseteq dom(g)$
και
(2) $(\forall x \in dom(f))(f(x) = g(x))$

$f(x) \quad \langle x, f(x) \rangle \in f$

$f[X] = \{ f(z) : z \in X \}$

Όμοια $f^{-1}[X]$

<u>Ορισμός</u> Δεδομένων A, B ορ

$${}^{A}B = \{ f \mid f : A \to B \}$$

<u>Ειδικές περιπτώσεις</u>

- ${}^{\emptyset}A = \{ \emptyset \}$, για κάθε
- ${}^{A}\emptyset = \emptyset$, για $A \neq \emptyset$

Scanned with CamScanner

24 Οκτωβ. 2022

Οικογένειες Συνόλων

$F: I^{\neq\emptyset} \longrightarrow A^{\neq\emptyset}$

οικογένεια συνόλων από το A με δείκτες στο I

που μη τυπικά

$$F: I \to A = \{A_i : i \in I\}$$
$$i \longmapsto A_i$$

Συμβάσεις
$$\bigcup_{i\in I} A_i := \bigcup rng(F)$$
$$\bigcap_{i\in I} A_i := \bigcap rng(F)$$
με δεδομένη F

ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟ ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ

Ορισμός Δεδομένης οικογένειας $(A_i)_{i\in I}$ $(I \neq \emptyset)$ μία συνάρτηση θα λέγεται συνάρτηση επιλογής για την $(A_i)_{i\in I}$ αν είναι της μορφής:

$$f : I \to \bigcup_{i\in I} A_i \quad \text{τ.ω.}$$
$$(\forall i \in I)(f(i) \in A_i)$$

Θα επιλέξουμε κάποιο συγκεκριμένο δισύνολο για να αναπαρασταθεί, συνολοθεωρητικώς, ο "αριθμός δύο"

Τα κριτήρια: ΑΠΛΟΤΗΤΑ κ' ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ

Έστω ότι επιλέξαμε ένα συγκεκριμένο (υπαρκτό) σύνολο, έστω A_2, το οποίο είναι δισύνολο, για να αναπαραστήσουμε το "2".

$$A_2 = \{\cdot, *\}$$

Πώς να αναπαραστήσουμε, τώρα, το "3";

$$A_3 = \{\cdot, *, A_2\}$$

<u>Ορισμός</u> Δεδομένου συνόλου x, ορίζουμε το <u>επόμενο σύνολο του x</u>, ως εξής

$$x^+ = x \cup \{x\}$$ από ένωση και ζεύγος υπαρχή πιθανά

Τότε, θέτουμε $0 := \emptyset$ και, για κάθε (μεταθεωρητικό) $n \geq 0$ θέτουμε

$$n+1 := n^+$$

π.χ. $1 = \{\emptyset\}$, $2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{0, 1\}$

$$5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

κ.ο.κ.

ΟΡΙΣΜΟΣ Ένα σύνολο A λέγεται επαγωγικό αν ισχύει ότι:

$$\underbrace{\emptyset \in A}_{\text{συντομογραφία}} \wedge (\forall x)(x \in A \rightarrow \underbrace{x^+ \in A}_{\text{συντομογραφία}})$$

(A7) ΑΞΙΩΜΑ ΤΟΥ ΑΠΕΙΡΟΥ (Infinity)

Υπάρχει ένα επαγωγικό σύνολο

$$(\exists y)(\emptyset \in y \wedge (\forall x)(x \in y \rightarrow x^+ \in y))$$

Από εδώ και στο εξής αριθμούμε θεωρήματα, προτάσεις, λήμματα

Πρόταση 1 Έστω $B \neq \emptyset$ σύνολο επαγωγικών συνόλων. Τότε, το $\bigcap B$ είναι επαγωγικό.

Αποδ. ΑΣΚΗΣΗ

Πρόταση 2 Υπάρχει μοναδικό επαγωγικό σύνολο το οποίο εμπεριέχεται σε κάθε επαγωγικό σύνολο

Αποδ. Έστω A κάποιο επαγωγικό σύνολο (από το (A7)). Θέτουμε $B = \{X \subseteq A : \text{«}X \text{ επαγωγικό»}\}$ (υπάρχει από (A5) στο $\mathcal{P}(A)$)

Scanned with CamScanner

$B \neq \emptyset$ διότι $A \in B$. Άρα, από Πρόταση 1, το $\bigcap B$ είναι επαγωγικό.

Έστω C οποιοδήποτε επαγωγικό σύνολο. Τότε, το $C \cap A$ είναι επαγωγικό. Τότε, $C \cap A \subseteq A$, άρα $C \cap A \in B$ και άρα

$\bigcap B \subseteq C \cap A \subseteq C$

Για τη μοναδικότητα: Δείχνουμε ότι αν A, A' επαγωγικά σύνολα τ.ω. το καθένα εμπεριέχεται σε κάθε επαγωγικό σύνολο, τότε $A = A'$.

Όμως τότε θα είχαμε ότι $A \subseteq A'$ αλλά και $A' \subseteq A$. Άρα $A = A'$ (από (ΑΙ))

<u>Ορισμός</u> Το μοναδικό επαγωγικό σύνολο που προκύπτει από τη πρόταση 2, το συμβολίζουμε με ω και το λέμε <u>το σύνολο</u> <u>των (συνολοθεωρητικών)</u> ~~φυσικών αριθμών~~.

Τα στοιχεία του ω τα λέμε <u>φυσ. αριθμούς</u>

Παρατήρηση: Το ω είναι το ελάχιστο (ως προς $\subseteq$) επαγωγικό σύνολο.

Επόμενοι Στόχοι

- ΑΞΙΩΜΑΤΑ Dedekind-Peano
- ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΔΟΜΗ ΣΤΟ ω (ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ κ' ΔΙΑΤΑΞΗ)
- ΒΑΣΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ: ΑΝΑΔΡΟΜΗ, ΠΕΡΙΣΤΕΡΩΝΑ κλ.π.

31/10/2022

ΑΞΙΩΜΑΤΑ Dedekind-Peano

PA (Peano αριθμητική)

Αναφέρονται σε ένα "σύστημα φυσικών αριθμών", δηλαδή μία δομή της μορφής

$$\langle \langle\langle \mathbb{N} \rangle\rangle, \langle\langle 0 \rangle\rangle, \langle\langle +1 \rangle\rangle \rangle$$

$$\langle \omega, \emptyset, + \rangle \longrightarrow \text{διατεταγμένες τριάδες}$$

(P1) Το 0 είναι φυσικός αριθμός

(P2) Κάθε φυσικός αριθμός έχει μοναδικό επόμενο φυσικό αριθμό

(P3) Το 0 δεν είναι επόμενος κανενός φυσικού αριθμού.

(P4) Αν 2 φυσικοί αριθμοί έχουν ίσους επόμενους τότε οι φυσ. αριθμ. είναι ίσοι

(P5) Αν S σύνολο φυσ. αριθμών τ.ω. $0 \in S$ και οποτεδήποτε κάποιος φυσικός αριθμός ανήκει στο S, τότε ανήκει και ο επόμενός του στο S, τότε το S περιέχει όλους τους φυσικούς αριθμούς

P1–P5 τα αξιώματα της PA

Θα δείξουμε ότι η δομή $\langle \omega, \emptyset, + \rangle$ ικανοποιεί τα (P1)–(P5)

<u>P1:</u> $\emptyset \in \omega$ (διότι ω ελάχιστο επαγωγικό σύνολο)

<u>P2:</u> Αν $n \in \omega$, τότε το n^+ υπάρχει και είναι μοναδικό, και ισχύει ότι $n^+ \in \omega$

<u>P3:</u> Αν $n \in \omega$, τότε $n^+ \neq \emptyset$ (διότι $n \in n^+$ αλλά $n \notin \emptyset$)

P5: Έστω $S \subseteq \omega$, τ.ω.

$$\emptyset \in S \text{ και } (\forall n \in \omega)(n \in S \rightarrow n^+ \in S)$$

Παρατηρούμε ότι $\omega \subseteq S$ διότι S επαγωγικό. Άρα $S = \omega$

Μάλιστα τα διατυπώνουμε ότι:

<u>Θεώρημα 1:</u>

Για κάθε $S \subseteq \omega$, αν $\emptyset \in S$ και $(\forall n)(n \in S \rightarrow n^+ \in S)$, τότε $S = \omega$

[ΧΡΗΣΗ ΟΤΙ ω ΤΟ ΕΛΑΧΙΣΤΟ ΕΠΑΓΩΓΙΚΟ]

Θεώρημα 2:

Έστω $\Phi(x)$ τύπος τ.ω. ισχύει $\Phi(0)$ και για κάθε $n \in \omega$, ισχύει

$$\Phi(n) \to \Phi(n^+)$$

Τότε ισχύει $(\forall n \in \omega)\, \Phi(n)$

Απόδειξη

Θέτουμε $S = \{n \in \omega : \Phi(n)\} \subseteq \omega$

[Υπάρχει από (A7) και) (A5)]

Τότε S επαγωγικό και άρα $S = \omega$

δηλ. $(\forall n \in \omega)\, \Phi(n)$

(ΒΑΣΙΚΕΣ) ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΦΥΣ. ΑΡΙΘΜΩΝ κ' ΤΟΥ ω

Πρόταση 3 Τα στοιχεία των φυσικών αριθμών είναι φυσικοί αριθμοί.

δηλ. $(\forall m, n)\big((n \in \omega \wedge m \in n) \to m \in \omega\big)$

Απόδειξη

Έστω $S = \{n \in \omega : (\forall m)(m \in n \to m \in \omega)\}$

το οποίο υπάρχει (A5) και είναι υποσύνολο του ω

Αξιωματικό σχήμα διαχωρισμού (Ιδιότητες Φ)

{Είναι γενικότερα τρόπος επίλυσης να δείχνουμε ότι υποσύνολο S του ω είναι επαγωγικό, γιατί τότε $S=\omega$}

Θ.δ. ότι το S είναι επαγωγικό

- Τετριμμένα έχουμε ότι $\emptyset \in S$ ($\emptyset \in n$ είναι ψευδές)

- Έστω $n \in \omega$ τ.ω. $n \in S$ δηλαδή
$$(\forall m)(m \in n \to m \in \omega) \quad (\text{Ε.Υ.})$$

Θ.δ. ότι $n^+ \in S$. Για αυτό, έστω $m \in n^+$ $\quad (n^+ = n \cup \{n\})$

<u>Περ. 1</u> $m \in n$. Τότε από Ε.Υ. το $n \in S$ άρα $m \in S$.

<u>Περ. 2</u> $m = n \in \omega$ άρα $m \in \omega$

Συμπεραίνουμε ότι $n^+ \in S$. Άρα S επαγωγικό και άρα $S = \omega$

<u>Ορισμός</u> Ένα σύνολο A λέγεται <u>μεταβατικό</u> αν
$$(\forall x)(x \in A \to x \subseteq A)$$

Ισοδύναμα:

- $\bigcup A \subseteq A$

- $\forall (x,y)(x \in y \in A \to x \in A)$

Πόρισμα Πρότασης 3

Το ω είναι μεταβατικό σύνολο

Πρόταση 4. Κάθε $n \in \omega$ είναι μεταβατικό σύνολο.

Αποδ. ΑΣΚΗΣΗ

$S = \{n \in \omega : n$ μεταβατικό$\}$

1/11/2022

$\mathbb{R}$ πλήρες

· Πλήρες ως προς $\leq$
(κάθε $X \neq \emptyset \subseteq \mathbb{R}$ άνω φραγμένο έχει sup)

· Πλήρες ως προς Cauchy ακολουθίες

ΑΣΚΗΣΗ Ν.δ. ότι υπάρχει σύνολο A τέτοιο.

1) Το A μεταβατικό αλλά όχι όλα τα στοιχεία του A μεταβατικά

2) Όλα τα στοιχεία του B μεταβατικά αλλά το B όχι μεταβατικό

Scanned with CamScanner

Πρόταση 5 Για κάθε $n \in \omega$, ισχύει $n \notin n$

Απόδειξη

Θέτουμε $S = \{n \in \omega : n \notin n\}$
(υπάρχει από (AS))

Θ.δ.ό.τι το S επαγωγικό

• $\emptyset \in S$ διότι $\emptyset \notin \emptyset$ ✓

• Έστω ότι, για κάποιο $n \in \omega$, έχουμε $n \in S$ δηλ. $n \notin n$ (Ε.Υ.)

Προς άτοπο, έστω ότι $n^+ \in n^+$

Δηλ. $n \cup \{n\} \in n \cup \{n\}$

$\underline{n} \in n \cup \{\underline{n}\} \in n \cup \{n\}$

Περ. 1 $\underline{n} \in n \cup \{n\} \in n$

Δηλ. $\underline{n} \in n^+ \in n$. Από Πρόταση 4, έπεται ότι $n \in n$ ↯ άτοπο (Ε.Υ.)

Περ. 2 $\underline{n} \in n \cup \{n\} = n$

Άρα $n \in n$ ↯ άτοπο (Ε.Υ.)

Επομένως $n^+ \notin n^+$ και άρα S επαγωγικό

$\boxtimes$

Πρόταση 6 Για κάθε $n,m \in \omega$.

$$n^+ = m^+ \rightarrow n = m$$

[Το οποίο είναι το αξίωμα P4]

Αποδ.

Έστω $n,m \in \omega$ τ.ω. $n^+ = m^+$

δηλαδή $n \cup \{n\} = m \cup \{m\}$

Τότε $n \in m$ ή $n = m$

Επίσης $m \in n$ ή $m = n$

Προς άτοπο, έστω ότι $n \neq m$.

Τότε, $n \in m$ και $m \in n$. Άρα από Πρόταση 4 έχουμε ότι $n \in n$ άτοπο ↯

□

Πρόταση 4 = μεταβατικότητα

Δείξαμε, επομένως, ότι η δομή $\langle \omega, \emptyset, + \rangle$ ικανοποιεί τα αξιώματα P1 - P5

Πρόταση 7 Κάθε φυσικός αριθμός $n \neq 0$ είναι επόμενος κάποιου, μοναδικού, φυσικού αριθμού

Αποδ. Θέτουμε

$$S = \{ n \in \omega : n = 0 \vee (\exists m)(n = m^+) \}$$

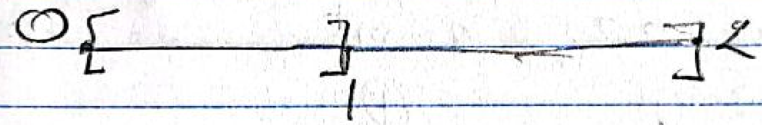
Το S επαγωγικό **ΑΣΚΗΣΗ**

Η μοναδικότητα προκύπτει από το (P4)

$m_1 \neq m_2$

$m_1^+ = m_2^+ = n$

του «προηγούμενου» δηλ. του m τ.ω. $m^+ = n$ $\square$



$$\{1 - \tfrac{1}{n} : n \geq 1\} \cup \{2 - \tfrac{1}{n} : n \geq 1\}$$

Πρόταση 8 Για κάθε $n, m \in \omega$:

$$n \subseteq m \leftrightarrow (n \in m \vee n = m)$$

Απόδειξη Το "$\leftarrow$" είναι σαφές. (Προτ. 4)

Έστω $\Phi(m)$ ο τύπος:

$$(\forall n \in \omega)(n \subseteq m \rightarrow (n \in m \vee n = m))$$

Ισχύει $\Phi(\emptyset)$, διότι αν $n \subseteq \emptyset$, τότε $n = \emptyset$

Έστω ότι, για κάποιο $m \in \omega$, ισχύει το εξής:

$$\Phi(m) : (\forall n \in \omega)\,(n \subseteq m \rightarrow (n \in m \vee n = m))$$
(Ε.Υ.)

Θ.δ. ότι ισχύει $\Phi(m^+)$. Για αυτό, έστω οποιοσδήποτε $n \in \omega$ τ.ω. $n \subseteq m^+$. Αρκεί να δείξουμε ότι $n \in m^+ \vee n = m^+$.

Έχουμε ότι $n \subseteq m \cup \{m\}$.

<u>Περ. 1</u> $n \subseteq m$. Από Ε.Υ., έπεται ότι $n \in m \vee n = m$. Σε κάθε περίπτωση (λόγω πρότασης 4 ή άμεσα από ορισμό m^+), έχουμε ότι $n \in m^+$.

<u>Περ. 2</u> $m \in n$ ①

Τότε λόγω πρότασης 4, $m \subseteq n$ ②. Άρα

Το σημαντικό της απόδειξης ← $m \cup \{m\} \subseteq n$ (② ①). Δηλ. $m^+ \subseteq n$. Οπότε

αφού και $n \subseteq m^+$, έχουμε τελικά ότι $n = m^+$.

Σε κάθε περίπτωση, προκύπτει ότι $\Phi(m^+)$.

Άρα $(\forall m \in \omega)\,\Phi(m)$ (από Θεώρημα 2)

$\square$

㊟ Μια γνήσια διάταξη < είναι ολική αν:
$(\forall x,y)(x<y \vee y<x \vee x=y)$ ← Τριχοτομική Ιδιότητα

<u>Πόρισμα</u> Για κάθε $m,n \in \omega$:

γνήσιο υποσύνολο

$$n \subsetneq m \longleftrightarrow n \in m$$

<u>Σχόλιο</u> Στη πρόταση 8, είναι σημαντικό ότι n,m <u>$\in \omega$</u>

γιατί π.χ. $\{0,2\} \subseteq 5$ αλλά $\{0,2\} \notin 5$, $\neq 5$

ΔΙΑΤΑΞΗ, ΑΝΑΔΡΟΜΗ κ' ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ
(στο ω)

1. ΔΙΑΤΑΞΗ

«Ταυτίζουμε, εξ ορισμού, τη σχέση $\in$ με τη γνήσια διάταξη < στο ω».

<u>Ορισμός</u> Για κάθε $n,m \in \omega$ θέτουμε:

$$n < m \longleftrightarrow n \in m$$

$$(\text{και άρα } n \leq m \longleftrightarrow (n \in m \vee n = m))$$

<u>Θεώρημα 3</u> Η σχέση < είναι ολική (γνήσια) διάταξη στο ω.

Γνήσια διάταξη σημαίνει ότι η σχέση < είναι
• Αντιανακλαστική $(\forall x)(x \not< x)$
κ' • Μεταβατική $(\forall x,y,z)((x<y \wedge y<z) \to x<z)$
㊟

στο $A \neq \emptyset$
$< \subseteq A \times A$ $\quad \leq \; = \; < \cup \{\langle x,x \rangle : x \in A\}$

<u>Απόδειξη</u> Για κάθε $n \in \omega$, έχουμε ότι $n \not< n$ διότι $n \notin n$ (Προτ. 5).

Επίσης, για κάθε $n, m, k \in \omega$

αν $n < m$ και $m < k$, δηλ.

αν $n \in m \in k$, τότε και

$n \in k$, δηλ. $n < k$, λόγω Πρότασης 4

Για τη τριχοτομική ιδιότητα, αρχικά παρατηρούμε ότι, για κάθε $n, m \in \omega$, το πολύ ένα εκ των τριών ισχύει:

$$n < m \lor m < n \lor m = n$$

Αν ισχύουν 2 από τα 3 θα έχουμε άτοπο γιατί $n \notin n$ και $m \notin m$

(!) Για την τριχοτομική ιδιότητα, αρχικά παρατηρούμε ότι, για κάθε $n, m \in \omega$, το πολύ ένα εκ των τριών ισχύει:

$$n<m \lor m<n \lor m=n.$$

14/11/22 Θα το δείξουμε με ΔΙΠΛΗ ΕΠΑΓΩΓΗ.

Έστω $m \in \omega$ θέτουμε:

$T_m = \{n \in \omega : n<m \lor m<n \lor n=m\}$ (υπάρχει)

Θ.δ.ο. $(\forall m \in \omega)$(«T_m επαγωγικό»)

Με επαγωγή στο m δείχνουμε ότι κάθε T_m επαγωγικό.

$m=0$. $T_0 = \{n \in \omega : 0<n \lor n<0 \lor n=0\}$

Έχουμε ότι: · $0 \in T_0$ ✓

· Αν $n \in T_0$ (για κάποιο $n \in \omega$) τότε (επαγ. υπόθεση)

$\emptyset \subseteq n^+ \underset{\text{πρότ. } 8}{\longleftrightarrow} (\emptyset < n^+ \lor \underbrace{\emptyset = n^+}_{\text{δεν γίνεται}})$

Άρα $\emptyset < n^+$ δηλ. $n^+ \in T_0$

δείχνουμε ότι το T_0 είναι επαγωγικό

Έστω ότι T_m επαγωγικό για κάποιο $m \in \omega$ (Ε.Υ.)

Θεωρούμε το $T_{m^+} = \{n \in \omega : m^+<n \lor n<m^+ \lor n=m^+\}$

~~Έστω $n \in \omega$~~

Έστω $n \in \omega$ [Θ.δ. αναλυτικά ότι $n \in T_{m^+}$]

Θα υποθέσουμε ότι δεν να χρησιμοποιήσουμε Ε.Υ. να κάνουμε επαγ. βήμα

Περ. 1

$n<m \lor n=m$ (επαγ. υπόθεση: T_m επαγ.)

Τότε $n<m^+$ } τέλος

Περ. 2

$n>m$

Τότε $m^+ \subseteq n$ και άρα από πρόταση 8 $m^+<n \lor m^+=n$ } τέλος

(σε κάθε περίπτωση $n \in T_{m^+}$ άρα $T_{m^+} = \omega$)

Άρα $T_{m^+} = \omega$

(1)

Πρόταση 9.

Για κάθε $n, m \in \omega$:

- $m \leq n \leftrightarrow (m \in n \vee m = n) \leftrightarrow m \subseteq n$
- $m < n \leftrightarrow m \in n \leftrightarrow m \subsetneq n$

ορισμοί — πρόταση 8

Πρόταση 10

Η σχέση $\subseteq$ στο ω είναι ολική (γραμ.) διάταξη στο ω

Αποδ. (Άσκηση)

Πρόταση 11

Για κάθε $n \in \omega$, δεν υπάρχει $m \in \omega$ γνησίως μεταξύ (ως προς $<$) του n και του n^+.

(Με άλλα λόγια, ο n^+ είναι ο αμέσως επόμενος φυσ. αριθμός του n ως προς τη διάταξη)

Αποδ. (Άσκηση)

Αρχή του Ελαχίστου (στο ω)

«Η διάταξη στους φυσ. αριθμούς είναι καλή».

(*) Θεώρημα 4

Κάθε μη-κενό υποσύνολο του ω έχει ελάχιστο στοιχείο (ως προς $<$)

Δηλ. Αν $X \subseteq \omega$ με $X \neq \emptyset$, τότε υπάρχει $n \in X$ τ.ω. $(\forall m \in X)(n \leq m)$

Γράφουμε $n = \min X$

Απόδειξη

Παρατήρηση: Για $X \subseteq \omega$ και $n \in \omega$, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(1) $n = \min X$

(2) $n \in X \wedge (\forall m \in X)(n \leq m)$ — ορισμ.

(3) $n \in X \wedge (\forall m)(m < n \rightarrow m \notin X)$ — ολική διάταξη + αντιθ.-ποσοδείκτης του 9

(4) $n \in X \wedge n \cap X = \emptyset$

Άσκηση

!!! π.χ. $X = \{1, 2\}$, $1 \in X$, $1 \cap X = \emptyset$, ενώ $2 \cap X = 1$

13

② Ταιριαστό με το Θ1 και Θ2

Υποθέτουμε ότι το X δεν έχει ελάχιστο. Θ.δ.ο. $X=\emptyset$

Θέτουμε $Y=\{n\in\omega : n\cap X=\emptyset\}$

(Υπάρχει), περιέχει τους πιθανούς ελάχιστους του X! ((Από παρατήρηση 4))

Λόγω του ότι το X δεν έχει ελάχιστο έχουμε $X\cap Y=\emptyset$

Άρα, αρκεί ν.δ.ο. $Y=\omega$ (δηλ. ότι Y είναι επαγωγικό)

έχουμε ότι:

- $0\in Y$ προφανώς $(\emptyset\cap X=\emptyset)$
- Αν $n\in Y$, για κάποιο $n\in\omega$ (Ε.Υ.) τότε

$$n^+\cap X=(n\cup\{n\})\cap X=\underbrace{(n\cap X)}_{\emptyset\ [\text{Ε.Υ.}]}\cup\underbrace{(\{n\}\cap X)}_{\emptyset\ (\text{το } X \text{ δεν έχει ελάχιστο})}=\emptyset.$$

Συνεπώς

$n^+\in Y$ ⌟

② Θεώρημα 5

Έστω $\Phi(x)$ τύπος τ.ω. $(\exists n\in\omega)(\Phi(n))$. Τότε $(\exists m\in\omega)(\Phi(m)\wedge(\forall k)(k<m\rightarrow\neg\Phi(k)))$

Απόδ.:

Θέτουμε $X=\{n\in\omega : \Phi(n)\}$ και εφαρμόζουμε το Θ.4

Θεώρημα 6 (Ολική επαγωγή / Strong Induction)

Αν $X\subseteq\omega$ τ.ω. $(\forall n\in\omega)(n\subseteq X\rightarrow n\in X)$, τότε $X=\omega$

~~Αρχή Ελαχίστου~~
~~Επαγωγή~~

ΟΛΙΚΗ ΕΠΑΓΩΓΗ
⇓ (Θ.αυξ.)
ΕΠΑΓΩΓΗ
⇓ Θ.4
ΑΡΧΗ ΕΛΑΧΙΣΤΟΥ
⇓ Θ.6

Απόδ.

Προς άτοπο, έστω ότι $X\neq\omega$, δηλ. $\omega\setminus X\neq\emptyset$

Επομένως, υπάρχει $n_0\in\omega$ τ.ω. $n_0=\min(\omega\setminus X)$

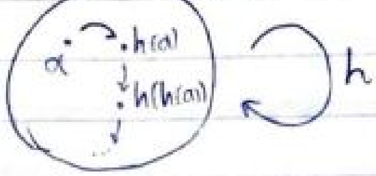
Όμως τότε $\underbrace{n_0\notin X}_{\text{επειδή } n_0\in\omega\setminus X}$ και $\underbrace{n_0\subseteq X}_{\text{από παρατήρηση 3) ή 4)}}$.

Όμως τελικά έχουμε άτοπο, λόγω της υπόθεσης για το X.

12. ΑΝΑΔΡΟΜΗ (στο ω)

Ιδέα:

$A \neq \emptyset$



$\alpha \in A$

$h : A \to A$

$$h^{(n)}(\alpha) = \underbrace{h(h(\cdots h}_{n-\text{φορές}}(\alpha))\cdots) \quad , \; h^{(0)}(\alpha) = \alpha$$

$f(n) = h^{(n)}(\alpha)$

$\langle h^{(n)}(\alpha) : n \in \omega \rangle$: πλήρης ακολουθία

Θεώρημα 7. (Αναδρομή στο ω)
Έστω σύνολο $A \neq \emptyset$, έστω $\alpha \in A$ και έστω $h : A \to A$. Τότε, υπάρχει ακριβώς μία συνάρτηση $f : \omega \to A$ τ.ω.

$$\begin{cases} f(0) = \alpha \\ \text{και} \\ \forall n \in \omega : f(n^+) = h(f(n)) \end{cases}$$

Αποδ.

«ελάχιστο αντιπαράδειγμα»

(Μοναδικότητα) Έστω (προς άτοπο) $f_1 \neq f_2$ συναρτήσεις όπως παραπάνω. Επομένως, υπάρχει ελάχιστο $n \in \omega$ τ.ω. $f_1(n) \neq f_2(n)$

Παρατηρούμε ότι $n \neq 0$ (αφού $f_1(0) = f_2(0) = \alpha$)

Επομένως, από Πρότ. 7, $\exists m \in \omega$ τ.ω. $n = m^+$

Άρα έχουμε ότι:

$\cancel{f_1(m^+)}$ $f_1(n) = f_1(m^+) = h(f_1(m)) = h(f_2(m)) = f_2(m^+) = f_2(n)$ Άτοπο

(Ύπαρξη): «Θεωρούμε το σύνολο όλων των πεπερασμένων αρχικών προσεγγίσεων της ζητούμενης f»

Θεωρούμε το εξής σύνολο: $\boxed{\text{Υπαρκτό (ΑΣ) στο } \mathcal{P}(\omega \times A)}$

$$B = \{ s \subseteq \omega \times A : \Phi(s) \}$$, όπου ο τύπος $\Phi(s)$ λέει:

$\boxed{f : \omega \to A \\ f \subseteq \omega \times A}$

«s είναι συνάρτηση $\wedge$ $dom(s) \in \omega$ $\wedge$ $rng(s) \subseteq A$ $\wedge$ $s(0) = \alpha$
$\wedge (\forall k \in \omega)(k^+ \in dom(s) \to s(k^+) = h(s(k)))$ »

Παρατηρήσεις

1) $B \neq \emptyset$ π.χ. $\{\langle 0, a\rangle\} \in B$

$\{\langle 1, h(a)\rangle, \langle 0, a\rangle\} \in B$

$\forall s \in B$

2) $dom(s) \neq \emptyset$ και $dom(s)$ είναι «κλειστό προς τα κάτω» ($dom(s) \in \omega$)

3) Αν $s, t \in B$ και $n \in dom(s) \cap dom(t)$, τότε $s(n) = t(n)$ ⟵ (επιλογή της παρατήρησης) και ④

4) Αν $s, t \in B$ τότε $s \subseteq t \vee t \subseteq s$

Αφού $dom(s)$ και $dom(t) \in \omega$ έχουμε ότι:

$dom(s) \subseteq dom(t) \vee dom(t) \subseteq dom(s)$.

ΔΙΟΤΙ $\underset{(\subseteq)}{<}$ ΟΛΙΚΗ ΔΙΑΤΑΞΗ ΣΤΟ ω } ΧΡΗΣΗ ΤΗΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗΣ 3

Επομένως το $\bigcup B$ είναι συνάρτηση, η οποία επεκτείνει όλα τα $s \in B$.

(αντίστοιχο της οριακής διαδικασίας)

Θέτουμε $f = \bigcup B$.

Μένει ν.δ.ο.:

1) $dom(f) = \omega$

2) $f(n^+) = h(f(n))$ $(\forall n \in \omega)$

Κατά τα άλλα είναι άμεσο ότι

$f(0) = a$ και $rng(f) \subseteq A$

Για το (1).

Θα δ.ο. ν.δ.ο. $dom(f)$ είναι επαγωγικό:

$0 \in dom(f)$, διότι $\{\langle 0, a\rangle\} \in B$

Έστω $n \in \omega$ τ.ω. $n \in dom(f)$. Θ.δ.ο. $n^+ \in dom(f)$

Υπάρχει $s \in B$ τ.ω. $n \in dom(s)$. Αν $n^+ \in dom(s)$, τότε ΤΕΛΟΣ.

Αν $n^+ \notin dom(s)$, τότε: $dom(t) = n^{++}$

$t = s \cup \{\langle n^+, h(s(n))\rangle\} \in B$ και $n^+ \in dom(t)$, άρα $n^+ \in dom(f)$

Άρα $dom(f)$ είναι επαγωγικό. ⌋

Για το (2)

Για κάθε $n \in \omega$: $f(n^+) = s(n^+) = h(s(n)) = h(f(n))$

όπου $s \in B$ (οποιοδήποτε) τ.ω. $n^+ \in dom(s)$ ⌋

21/11/2022

ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ — ΕΠΑΓΩΓΙΚΕΣ ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

Θεώρημα
αναδρομής,
αναδρομής με
παραμέτρους
κ.α.
(ΜΟΣΧΟΒΑΚΗΣ)

---

3. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΣΤΟ ω

ΟΡΙΣΜΟΣ

Για κάθε $m, n \in \omega$:

- $m+0=m$

και

- $m+n^{+}=(m+n)^{+}$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Για κάθε $m, n \in \omega$:

$m \cdot 0 = 0$

και

$m \cdot n^{+} = (m \cdot n)+m$

Σχόλιο 1 Αντίστοιχα ορίζεται και η δύναμη m^{n} ($m^{0}=0^{+}$, $m^{n^{+}}=(m^{n})\cdot m$)

Σχόλιο 2 Εσιωπηρά, χρησιμοποιούμε το Θεώρημα 7 για αυτούς τους ορισμούς π.χ. για την πρόσθεση

Για κάθε $m \in \omega$, θεωρούμε τη συνάρτηση

$\longrightarrow$

$$\begin{aligned} h: \omega &\longrightarrow \omega \\ n &\longrightarrow n^+ \end{aligned}$$ Υπάρχει $h = \{n \in \omega : \langle n, n^+ \rangle\}$

και θεωρούμε το $a = 0$. Τότε, με χρήση του Θεωρήματος 7, υπάρχει μοναδική $f_m : \omega \to \omega$

τ.ω. $\begin{cases} f_m(0) = m \\ \text{και} \\ f_m(n^+) = h(f_m(n)) = f_m(n)^+ \end{cases}$

Σχόλιο 3 Ισχύουν όλες οι γνωστές και αναμενόμενες ιδιότητες των πράξεων στο ω (π.χ. αντιμεταθετικότητα, προσεταιριστικότητα, επιμερισμός, διαγραφές κλπ.)

Οι αποδείξεις αυτών γίνονται με επαγωγή.

Ενδεικτικό παράδειγμα:

ΠΡΟΤΑΣΗ 12: Για κάθε $k, m, n \in \omega$

(i) $k + (m + n) = (k + m) + n$

(ii) $m + n = n + m$

(*) Για κάθε $k, m \in \omega$ έχουμε:

(γιατί ορίσαμε τη πρόσθεση με "μεταβλητό" στοιχείο το δεξιότερο)

Αποδ. (i) Επαγωγή στο n.

(*)

$n=0$ $\quad k+(m+0)=k+m=(k+m)+0$

Έστω ότι $k+(m+n)=(k+m)+n$, για κάποιο $n \in \omega$ (Ε.Υ.). Έχουμε ότι:

$$k+(m+n^+) \xlongequal[\text{Πρόσθ.}]{\text{Ορισμός}} k+(m+n)^+ \xlongequal[\text{Πρόσθεσης}]{\text{Ορισμός}} (k+(m+n))^+ \xlongequal{\text{Ε.Υ.}} ((k+m)+n)^+ \xlongequal[\text{Πρόσθεσης}]{\text{Ορισμός}} (k+m)+n^+$$

Για το (ii), δείχνουμε πρώτα δύο σύντομα λήμματα

ΛΗΜΜΑ 1: $(\forall n \in \omega)\,(0+n=n)$

Επαγωγή στο n. $\boxed{\text{Άσκηση}}$

ΛΗΜΜΑ 2: Για κάθε $m, n \in \omega$:

$m^+ + n = (m+n)^+ = m+n^+$

Αποδ. Επαγωγή στο n. Για κάθε $m \in \omega$:

$n=0$ $\quad m^+ + 0 = m^+ = (m+0)^+$

Έστω ότι $m^+ + n = (m+n)^+$ (Ε.Υ.) (για κάποιο $n \in \omega$). Τότε:

$$m^+ + n^+ = (m^+ + n)^+ \xlongequal{\text{Ε.Υ.}} ((m+n)^+)^+ = (m+n^+)^+$$

$\boxtimes$

Απόδ. (ii) Επαγωγή στο n. Για κάθε $m \in \omega$:

$n=0$ $\quad m+0=0+m$ (Λ1).

Έστω ότι για κάποιο $n \in \omega$ ισχύει: $m+n=n+m$ (Ε.Υ.). Έχουμε:

$$m+n^+ = (m+n)^+ \overset{\text{Ε.Υ.}}{=} (n+m)^+ = n+m^+ \overset{\text{Λ2}}{=} n^+ + m$$

$\boxtimes$

ΠΡΟΤΑΣΗ 13 Για κάθε $m,n \in \omega$:

(1) $m \leq n \longleftrightarrow (\exists k \in \omega)(m+k=n)$

(2) $m < n \longleftrightarrow (\exists k \in \omega)(k \neq 0 \wedge m+k=n)$

Δηλαδή, μπορούμε, εναλλακτικά, να ορίσουμε τη διάταξη του ω μέσω της πρόσθεσης.

Απόδ. $\boxed{\text{ΑΣΚΗΣΗ}}$

(*) Είναι κλάση ισοδυναμίας της R

(Πολύ) Σύντομη παρουσίαση της κατασκευής των $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ (από το ω).

→ Για περισσότερες λεπτομέρειες δείτε Μοσχοβάκη ή Κάλφα.

«Αξιωματική Θεωρία Συνόλων» Κ. Κάλφα Εκδ. ΖΗΤΗ

Δεδομένη έχουμε τη δομή $\langle \omega, 0, 1, +, \cdot, \leq \rangle$

Για το $\mathbb{Z}$ «Αναπαριστούμε $n-m$ με το διατεταγμένο ζεύγος $\langle n,m\rangle$.» (Ιδέα)

Στο σύνολο $\omega\times\omega$ ορίζουμε τη σχέση R ως εξής. Για κάθε $n,m,k,\ell\in\omega$:

$$\langle n,m\rangle R \langle k,\ell\rangle \longleftrightarrow n+\ell = m+k$$

(δηλ. "$n-m=k-\ell$")

Η R είναι σχέση ισοδυναμίας.

Ορισμός $\mathbb{Z} = \omega\times\omega/R = \{[\langle n,m\rangle]_R \ n,m\in\omega\}$ (*) (υπάρχει!)

είναι το σύνολο ακεραίων

$$0_{\mathbb{Z}} = [\langle 0,0\rangle]_R \qquad 1_{\mathbb{Z}} = [\langle 1,0\rangle]_R$$

$$[\langle n,m\rangle]_R +_{\mathbb{Z}} [\langle k,\ell\rangle]_R = [\langle n+k, m+\ell\rangle]_R$$

$$\text{"} \quad \cdot_{\mathbb{Z}} \quad \text{"} \quad = [\langle n\cdot k+m\cdot\ell, n\cdot\ell+m\cdot k\rangle]$$

$$[\langle n,m\rangle]_R \leq_{\mathbb{Z}} [\langle k,\ell\rangle]_R \longleftrightarrow n+\ell\leq m+k$$

$F: \omega \hookrightarrow \mathbb{Z}$

αλγεβρικός ισομορφισμός με κάποιο υποσύνολο του $\mathbb{Z}$

$$0 \to 0_{\mathbb{Z}}$$
$$1 \to 1_{\mathbb{Z}}$$

Για το $\mathbb{Q}$ «Αναπαριστούμε το $\frac{a}{b}$, για $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0_{\mathbb{Z}}$, με το ζεύγος $\langle a, b \rangle$ »

Στο $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0_{\mathbb{Z}}\})$ θεωρούμε τη σχέση S:

$$\langle a, b \rangle \, S \, \langle c, d \rangle \leftrightarrow a \cdot_{\mathbb{Z}} d = b \cdot_{\mathbb{Z}} c$$

(Ιδέα $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$)

Η S σχέση ισοδυναμίας

Θέτουμε $\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0_{\mathbb{Z}}\}) / S$ το σύνολο των ρητών

Για το $\mathbb{R}$ → μέθοδος Cantor (μέσω ακολουθιών Cauchy)

→ μέθοδος του Dedekind (μέσω τομών Dedekind)

ΟΡΙΣΜΟΣ Ένα $X \subseteq \mathbb{Q}$ λέγεται τομή Dedekind αν:

(1) $\emptyset \neq X \neq \mathbb{Q}$

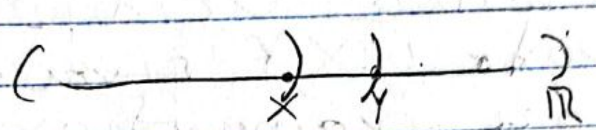
(2) $(a <_{\mathbb{Q}} b \wedge b \in X) \to a \in X$ («κλειστό προς τα κάτω/αριστερά»)

(3) $b \in X \to (\exists a \in X)(b <_{\mathbb{Q}} a)$ (δεν έχει μέγιστο)

Θέτουμε $\mathbb{R} = \{X \subseteq \mathbb{Q} : \text{η } X \text{ τομή Dedekind}\}$

$$0_{\mathbb{R}} = \{q \in \mathbb{Q} : q \leq_{\mathbb{Q}} 0_{\mathbb{Q}}\}$$

$$X \leq_{\mathbb{R}} Y \Longleftrightarrow X \subseteq Y$$



· Η διάταξη $\leq$ είναι γραμμική στο $\mathbb{R}$.

Τέλος, για την κεντρική ιδιότητα της πληρότητας, ισχύει ως εξής:

Αν $\mathcal{X} \neq \emptyset$ σύνολο πραγματικών αριθμών άνω φραγμένο, τότε το $\bigcup \mathcal{X}$ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του $\mathcal{X}$

22/11/2011

(ΙΣΟ)ΠΛΗΘΙΚΟΤΗΤΑΣ Κ' ΠΛΗΘΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ (Πληθάριθμοι)

Τι σημαίνει πλήθος; Ισοπληθικότητα; Μέτρηση;

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u> Θα λέμε ότι τα σύνολα X, Y είναι <u>ισοπληθικά</u> (ή ότι έχουν <u>ίδιο πληθικό αριθμό</u>) αν υπάρχει μία αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ τους, δηλαδή υπάρχει μία συνάρτηση της μορφής:

$$f: X \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} Y.$$

Σε τέτοια περίπτωση, γράφουμε: $\boxed{X \sim Y}$

<u>Παρατήρηση</u>. Για κάθε X, Y, Z:

(i) $X \sim X$

(ii) $X \sim Y \rightarrow Y \sim X$

(iii) $(X \sim Y \wedge Y \sim Z) \rightarrow X \sim Z$

π.χ.

① $2 \sim \{a, b\}$ για κάθε a, b με $a \neq b$

② $\omega \sim \omega \setminus \{0\}$

$n \longmapsto n+1$

③ $\omega \sim \{2 \cdot n : n \in \omega\}$

$n \rightarrow 2 \cdot n$

$f(x) = a + (b-a)x$

④ Στο $\mathbb{R}$: $(0,1) \sim (a,b)$ (για $a<b \in \mathbb{R}$)
ΑΣΚΗΣΗ

⑤ $(a,b) \sim \mathbb{R}$ (—//—)
π.χ. $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \overset{\tan}{\sim} \mathbb{R}$

ΑΣΚΗΣΗ $\longrightarrow$ Ν.δ. ότι $(0,1) \sim (0,1]$

⑥ $\omega \times \omega \sim \omega$

Θεώρημα 8 (Κωδικοποίηση Cantor)

Υπάρχει $\int : \omega \times \omega \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} \omega$

ΛΗΜΜΑ Ορίζουμε αναδρομικά την $T : \omega \to \omega$ ως εξής:

$$\begin{cases} T(0) = 0 \\ \text{και } T(n+1) = T(n) + n + 1 \quad (\forall n \in \omega) \end{cases}$$

Τότε ισχύουν τα εξής:
(1) T γνησίως αύξουσα
(2) T 1-1
(3) $(\forall y \in \omega)(\exists x \in \omega)(T(x) \leq y < T(x+1))$

Απόδειξη ΑΣΚΗΣΗ

Σχόλιο Το (1) δεν συνεπάγεται πάντα το 2 πρέπει ;

Σχόλιο $T(n) = \frac{n(n+1)}{2}$ $(\forall n \in \omega)$

Απόδειξη Θ. 8

Ορίζουμε την $J : \omega \times \omega \to \omega$ ως εξής:

$$J(m,n) = T(m+n) + n \quad (\forall m,n \in \omega)$$

[Σχόλιο $J(m,n) = \frac{(m+n+1)(m+n)}{2} + n$]

ΑΣΚΗΣΗ Ν.δ.ότι J 1-1 κ' επί (με τη βοήθεια του λήμματος)

(7) Για κάθε A:

$$A \times A \sim {}^{\{0,1\}}A$$

$\langle a,b \rangle$ $\quad$ $f : \{0,1\} \to A$

$a,b \in A$ $\quad$ $\{\langle 0,a \rangle, \langle 1,b \rangle\}$

$a,b \in A$

$$F : A \times A \longrightarrow {}^{\{0,1\}}A$$

$$\langle a,b \rangle \longmapsto \{\langle 0,a \rangle, \langle 1,b \rangle\}$$

(δηλαδή $A^2 \sim {}^2A$)

(8) Το $\emptyset$ είναι ισοπληθικό μόνο με τον εαυτό του.

(δηλ. αν $X \sim \emptyset$, τότε $X = \emptyset$)

ΑΣΚΗΣΗ. Το $\emptyset$ είναι το μοναδικό σύνολο που είναι ισοπληθικό μόνο με τον εαυτό του.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΑΝΑΘΕΣΗΣ ΠΛΗΘΑΡΙΘΜΩΝ

Ιστορική αναδρομή: « Διπλή αφαίρεση » του Cantor $= \bar{\bar{A}}$: πληθάριθμος A

Θέλουμε, με "ομοιόμορφο" τρόπο, να αναθέσουμε, σε κάθε σύνολο A, ένα αντικείμενο (υποχρεωτικό σύνολο), το οποίο θα λέμε πληθάριθμο του A (και θα το γράφουμε $|A|$)

Απαιτήσεις του Cantor:

Έτσι ώστε, για κάθε A, B.

(1) $A \sim |A|$

(2) $A \sim B \longleftrightarrow |A| = |B|$

(3) Το $\{|X| : X \in A\}$ είναι σύνολο.

Αν $|A| = A$, τότε ικανοποιούνται τα (1), (3)

Προς το παρόν, υποθέτουμε ότι μια τέτοια ανάθεση έχει γίνει. (το πως ακριβώς μοιάζει αυτή, θα το δούμε παρακάτω). Με βάση αυτό, μελετάμε τους πληθάριθμους, και τις ιδιότητές τους, χωρίς να ξέρουμε (ακόμα) ποια ακριβώς σύνολα είναι.

ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΥΝΟΛΑ

ΟΡΙΣΜΟΣ Ένα σύνολο A λέγεται <u>πεπερασμένο</u> αν είναι ισοπληθικό με κάποιον φυσικό αριθμό. Δηλαδή αν $(\exists n \in \underline{\underline{\omega}})(A \sim n)$. Αλλιώς, το A λέγεται <u>άπειρο</u>

π.χ. $\emptyset = 0 \in \omega$

<u>Σχόλιο</u> Αν και οι φυσικοί αριθμοί είναι η εύλογη επιλογή για ανάθεση πληθαρίθμου στα πεπερασμένα σύνολα, πρέπει πρώτα ελέγξουμε κάποιες βασικές ιδιότητες.

Το ακόλουθο αποτέλεσμα παρέχει ένα κεντρικής σημασίας εργαλείο στη μελέτη των περασμένων συνόλων.

ΘΕΩΡΗΜΑ 9 (Αρχή του Περιστερώνα)

Έστω $n \in \omega$ και $f : n \to n$.
Αν η f είναι 1-1, τότε η f είναι επί.
Δηλαδή για κάθε $n \in \omega$:
$\Phi(n): (\forall f)(\ll f : n \xrightarrow{1-1} n \gg \rightarrow \ll f : n \xrightarrow[\text{επί}]{} n \gg)$

Ισχύει και το αντίστροφο

Scanned with CamScanner

ΠΟΡΙΣΜΑ 1 Κανένα $n \in \omega$ δεν είναι ισοπληθικό με ~~γνήσιο~~ υποσύνολο του.

Δηλαδή αν $n \in \omega$ και $X \subseteq n$ με $X \sim n$, τότε $X = n$

Απόδειξη
Έστω $f: n \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} X \subseteq n$. Δηλαδή η f είναι της μορφής $f: n \xrightarrow{1-1} n$.

Άρα από Θ. 9 $f: n \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} n$. Δηλαδή

$X = rng(f) = n$ $\boxtimes$

ΠΟΡΙΣΜΑ 2
(i) Αν $n, m \in \omega$ και $n \sim m$, τότε $n = m$
(ii) Αν $X \sim n$ και $X \sim m$, για $n, m \in \omega$ τότε $n = m$

(iii) Αν X πεπερασμένο και $Y \subsetneq X$, τότε $Y \not\sim X$
(iv) Το ω είναι άπειρο

Αποδ.
(i) Η $\subseteq$ είναι ολική στο ω. Άρα $n \subseteq m$ ή $m \subseteq n$. Χ.β.τ.γ. έστω ότι $n \subseteq m$. Τότε άμεσα προκύπτει $n = m$ από Πόρισμα 1.

(ii) Από συμμετρικότητα και μεταβατικότητα της $\sim$ και το (i)

(iii) Χρησιμοποιούμε την ακόλουθη γενίκευση του Θεωρήματος 9:

Για κάθε πεπερασμένο A και $f: A \to A$, αν f 1-1, τότε f επί

$\boxed{\text{ΆΣΚΗΣΗ}}$

Για το (iii) τώρα: Έστω $f: X \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} Y$, για $Y \subseteq X$. Θ.δ.ό.τι $Y = X$.
Τότε $f: X \xrightarrow{1-1} X$, άρα από την παραπάνω γενίκευση, $f: X \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} X$. Όπως και στο Πόρισμα 1 $X = Y$.

(iv) Η $f: \omega \to \omega$ με $f(n) = n+1$ $(\forall n \in \omega)$ είναι 1-1 αλλά όχι επί.
Χρησιμοποιώντας εις άτοπο απαγωγή στο γενικευμένο Θεώρημα του Περιστεριώνα.

5/11/2022

Ορισμός Αν X πεπερασμένο, θέτουμε $|X| = n$, όπου $n \in \omega$

· μοναδικός φυσ. αριθμός τ.ω. $X \sim n$

π.χ. $|\emptyset| = 0$

$(\forall n \in \omega)\ |n| = n$

Πρόταση 14 Αν X πεπερασμένο και $Y \subseteq X$, τότε και Y πεπερασμένο

Απόδειξη

Δείχνουμε με επαγωγή στο n ότι η πρόταση ισχύει για φυσ. αριθμούς, δηλ. ότι ισχύει το εξής

$(\forall Y)(Y \subseteq n \rightarrow$ "Y πεπερασμένο")

$\boxed{\text{ΑΣΚΗΣΗ}}$ $\quad Y \subseteq n \cup \{n\}$

$n \in Y \quad Y' = \underbrace{Y \setminus \{n\}}_{\subseteq n}$

Κατόπιν, αν X πεπερασμένο και $Y \subseteq X$, έχουμε ότι για κάποιο $n \in \omega$ υπάρχει

$$f : X \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} n$$

Θεωρούμε την: αφού έχουμε την f περιορισμένη

$$f \upharpoonright Y : Y \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} f[Y] \subseteq n$$

f περιορισμένη στο Y — αφού είναι η εικόνα της f

Άρα $Y \sim f[Y]$ όμως $f[Y] \subseteq n$ άρα πεπερασμένο. Επομένως και το Y πεπερασμένο ⊠

Πρόταση 15

Η ένωση δύο πεπερασμένων συνόλων είναι πεπερασμένο σύνολο

Αποδ.

$f: X \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} n$

$g: Y \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} m$

(όπου $m, n \in \omega$

Υποθέσεις

$X, Y \neq \emptyset$

$X \cap Y = \emptyset$)

Ορίζουμε $h: X \cup Y \to n+m$ ως εξής

$$(\forall z \in X \cup Y) \quad h(z) = \begin{cases} f(z), & z \in X \\ n + g(z), & z \in Y \end{cases}$$

Ελέγξτε ότι h 1-1 και επί και, έπειτα, ξεφορτωθείτε την υπόθεση $X \cap Y = \emptyset$ (ΑΣΚΗΣΗ) $\boxtimes$

ΑΣΚΗΣΗ: Αν A πεπερασμένο σύνολο πεπερασμένων συνόλων, τότε το $\cup A$ είναι πεπερασμένο.

ΠΡΟΤΑΣΗ 16 Αν A, B πεπερασμένα, τότε και το $A \times B$ είναι πεπερασμένο. (και μάλιστα $|A \times B| = |A| \cdot |B|$)

Αποδ.
Έχουμε $f : A \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} n$

$g : B \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} m \qquad m, n \in \omega$

$h : A \times B \to n \times m$
$\langle a, b \rangle \longmapsto \langle f(a), f(b) \rangle$

Ελέγχουμε ότι h 1-1 και επί

και επαναλούμβανουμε την άσκηση

$\boxtimes$

ΑΡΙΘΜΗΣΙΜΑ ΣΥΝΟΛΑ

ΟΡΙΣΜΟΙ: Έστω A σύνολο.
Το A λέγεται:

1) Αριθμήσιμο αν $A \sim \omega$

2) Το πολύ αριθμήσιμο αν A αριθμήσιμο ή πεπερασμένο.

3) Υπεραριθμήσιμο αν A άπειρο και όχι αριθμήσιμο

Παρατήρηση: Αν A αριθμήσιμο, τότε υπάρχει $f : \omega \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} A$

Δηλ. $A = rng(f) = f[\omega] = \{ f(n) : n \in \omega \}$

$A = \{ a_n : n \in \omega \}$ "απαρίθμηση του A"

Scanned with CamScanner

αριθμήσιμα σύνολα

π.χ. $\omega, \omega\times\omega, \omega\times\omega\times\omega, \ldots$

Πρόταση 17

Κάθε υποσύνολο του ω είναι το πολύ αριθμήσιμο

Η πρόταση συνεπάγεται ότι δεν υπάρχει "ενδιάμεση" πληθικότητα μεταξύ των πεπερασμένων συνόλων και των αριθμήσιμων.

Πόρισμα 1

X το πολύ αριθμήσιμο

$$\Longleftrightarrow$$

$$\exists f : X \xrightarrow{1-1} \omega$$

Αποδ.

"$\rightarrow$" εύκολη κατεύθυνση.

"$\leftarrow$" Έστω $f : X \xrightarrow{1-1} \omega$.

Τότε $f : X \underset{\varepsilon\pi\iota}{\overset{1-1}{\longrightarrow}} f[X]$,

όπου $f[X] \subseteq \omega$.

Άρα $X \sim f[X]$, με το $f[X]$ να είναι το πολύ αριθμήσιμο από Πρόταση 17.

$\boxtimes$

Πόρισμα 2

Αν X το πολύ αριθμήσιμο και $Y \subseteq X$, τότε και Y το πολύ αριθμήσιμο.

Αποδ. Εύκολη

ΠΡΟΤΑΣΗ 18

Έστω $X \neq \emptyset$. Τότε

X το πολύ αριθμήσιμο $\Leftrightarrow \exists g : \omega \xrightarrow[\text{επί}]{} X$

Αποδ.

$(\rightarrow)$ Αν X αριθμήσιμος τότε ✓

Αν X πεπερασμένο, έστω $n \in \omega$ τω.
υπάρχει $f : n \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} X$

Επειδή $X \neq \emptyset$ υπάρχει $c \in X$

Ορίζουμε $g : \omega \rightarrow X$ ως εξής.

$$(\forall i \in \omega) \ g(i) = \begin{cases} f(i), & i < n \\ c, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$(\leftarrow)$ Έστω $g : \omega \xrightarrow[\text{επί}]{} X$

$\longrightarrow$

Για κάθε $a \in X$, θεωρούμε το

$$S_a = g^{-1}[\{a\}]$$
$$= \{n \in \omega : g(n) = a\}$$

Για κάθε $a \in X$, $S_a \neq \emptyset$ (Επειδή g επί)

Για κάθε $a, b \in X$ με $a \neq b$ $S_a \cap S_b = \emptyset$

Από την αρχή του ελαχίστου στο ω, κάθε S_a έχει ελάχιστο. Οπότε ορίζουμε τη ζητούμενη f ως εξής:

$$f : X \to \omega$$
$$a \mapsto \min S_a$$

η οποία είναι $dom(f) = X$, και 1-1

$\boxtimes$

Αξίωμα της επιλογής $\Leftrightarrow$ Αρχή της καλής διάταξης
$\Leftrightarrow$ Λήμμα του Zorn

① 13/12/2022

ΕΓΝΑΤΙΑ ΤΡΑΠΕΖΑ

Πόρισμα Έστω X άπειρο σύνολο. Τα ακόλ. θα είναι ισοδύναμα:

(i) X αριθμήσιμο

(ii) $\exists f : X \xrightarrow{1-1} \omega$

(iii) $\exists g : \omega \xrightarrow[\varepsilon\pi\iota]{} X$

ΠΡΟΤΑΣΗ 19 Αν A, B το πολύ αριθμήσιμα τότε και το $A \times B$ το πολύ αριθμήσιμο.

Αποδ. (συνοπτική) Έστω $f : \omega \xrightarrow[\varepsilon\pi\iota]{} A$, $g : \omega \xrightarrow[\varepsilon\pi\iota]{} B$ $(A, B \neq \emptyset)$

Θέτουμε $h' : \omega \times \omega \xrightarrow[\varepsilon\pi\iota]{} A \times B$
$\langle n, m \rangle \longmapsto \langle f(n), g(m) \rangle$

και $\omega \xrightarrow[\varepsilon\pi\iota]{1-1} \omega \times \omega \xrightarrow[h'\ \varepsilon\pi\iota]{} A \times B$
$\boxed{\exists^{-1}}$ από το Θεωρ. 8

$A \neq \emptyset$
Πρ. 18 A το πολύ αριθμ. $\Leftrightarrow$
$\exists f\ \omega \xrightarrow[\varepsilon\pi\iota]{} A$

②

ΠΡΟΤΑΣΗ 20 Αν A, B το πολύ αριθ. τότε και το $A \cup B$ το πολύ αριθμήσιμα

Αποδ. (συνοπτ.) $f : \omega \xrightarrow[\text{επί}]{} A$, $g : \omega \xrightarrow[\text{επί}]{} B$

$$h : \omega \times \{0,1\} \xrightarrow[\text{επί}]{} A \cup B$$

$$\langle n, i \rangle \longmapsto \begin{cases} f(n), & i = 0 \\ g(n), & i = 1 \end{cases}$$

$\omega \sim \omega \times \{0,1\}$ Από πρ. 19 και την παρατήρηση

∎

Παρατήρηση Αν υπάρχει $f : \omega \xrightarrow{1\text{-}1} A$ τότε το A είναι άπειρο. $\boxed{\text{ΑΣΚΗΣΗ}}$

(Οπότε, π.χ. το $\omega \times \{0,1\}$ είναι άπειρο, θεωρώντας την $f : \omega \to \omega \times \{0,1\}$

$$n \longmapsto \langle n, 0 \rangle \;)$$

Το αντίστροφο ισχύει μόνο εάν υποθέσουμε κάποια ασθενή μορφή του Αξιώματος της Επιλογής

ΠΡΟΤΑΣΗ 21 Τα $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμ

Αποδ. $\omega \xhookrightarrow{1-1} \mathbb{Z} \xhookrightarrow{1-1} \mathbb{Q}$ (από την κατασκευή του

$n \longmapsto [\langle n, 0\rangle]_R$

$\alpha \longmapsto [\langle \alpha, 1_{\mathbb{Z}}\rangle]_S$

Δηλαδή $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ άπειρα

Τέλος, τα $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ είναι το πολύ αριθμήσιμα εκ κατασκευής και λόγω της Πρότασης 19 $\boxtimes$

ΠΡΟΤΑΣΗ 22 Έστω $(A_n)_{n\in\omega}$ δεδομένη οικογένεια συνόλων και έστω $(f_n)_{n\in\omega}$ δεδομένη οικογένεια τ.ω. $(\forall n\in\omega)(f_n : \omega \xrightarrow[\text{επί}]{} A_n)$.

Τότε, το $\bigcup_{n\in\omega} A_n$ το πολύ αριθμήσιμο.

Αποδ. Αρκ. $F: \omega\times\omega \xrightarrow[\text{επί}]{} \bigcup_{n\in\omega} A_n$

$\langle n, m\rangle \longmapsto f_n(m)$

Χωρίς το αξίωμα της επιλογής είναι δυν. το $\mathbb{R}$ να ισούται με αριθμήσιμη ένωση αρ. σιμων συνόλων

(δηλ. $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \omega} A_n$, όπου κάθε A_n αριθμήσιμο)

<u>Θεώρημα 10 (Cantor)</u> Κανένα σύνολο δεν είναι ισοπληθικό με το δυναμοσύνολό του.

<u>Αποδ.</u> Έστω σύνολο A και έστω $f: A \to \mathcal{P}(A)$

Θ.δ.ότι f όχι επί. Προς άτοπο, έστω ότι f είναι επί. Θεωρούμε το $D = \{x \in A : x \notin f(x)\} \subseteq A$.

Υπάρχει $c \in A$ τ.ω. $f(c) = D$

Τότε $c \in D \Leftrightarrow c \notin f(c) \Leftrightarrow c \notin D$ ↯ άτοπο $\boxtimes$

ΑΣΚΗΣΗ Για κάθε σύνολο A, ισχύει ότι

$$\mathcal{P}(A) \sim {}^{A}\{0,1\}$$

$$({}^{A}2)$$

ΠΟΡΙΣΜΑ Τα ${}^{\omega}\{0,1\}$ και $\mathcal{P}(\omega)$ είναι υπεραριθμήσιμα

Αποδ. (ΑΣΚΗΣΗ)

ΠΡΟΤΑΣΗ 23 Το $\mathbb{R}$ είναι υπεραριθμήσιμο.

Αποδ. $\mathbb{R}$ άπειρο επειδή $\mathbb{Q} \xrightarrow{1-1} \mathbb{R}$

$$q \longmapsto \{s \in \mathbb{Q} : s \leq_{\mathbb{Q}} q\}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$F : {}^{\omega}\{0,1\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

τ.ω. για κάθε $a \in {}^{\omega}\{0,1\}$, όπου $a = (a_n)_{n\in\omega}$ για $a_n \in \{0,1\}$, $F(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2a_n}{3^{n+1}}$

ΑΣΚΗΣΗ Η F είναι καλώς ορισμένη και 1-1

Επομένως το $\mathrm{rng}(F)$ είναι ένα υπεραριθμήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

Άρα $\mathbb{R}$ υπεραριθμήσιμο. $\square$

ΟΡΙΣΜΟΣ Έστω σύνολα A, B. Θα λέμε ότι το A έχει το πολύ τόσα στοιχεία όσα το B, και θα γράφουμε $|A| \leq |B|$, αν υπάρχει $f : A \xrightarrow{1-1} B$

(δηλ., $|A| \leq |B|$ σημαίνει ότι το A είναι ισοπληθικό με κάποιο υποσύνολο του B)

Επίσης, γράφουμε $|A| < |B|$ και εννοούμε ότι $|A| \leq |B|$ & $|A| \neq |B|$

Σχόλιο Αν θέλουμε να δείξουμε ότι (για κάποιους αληθαρίθμους κ, λ) ότι $\kappa \leq \lambda$ αρκεί ν.δ. ότι $\exists f : A \xrightarrow{1-1} B$ για κάποια (οποιαδήποτε!) σύνολα A, B τ.ω. $|A| = \kappa$ και $|B| = \lambda$ (δηλ. $A \sim \kappa$ και $B \sim \lambda$)

Προτ. 24: Για κάθε πληθαρίθμους κ, λ, μ:
i) $\kappa \leq \kappa$
ii) $(\kappa \leq \lambda \wedge \lambda \leq \mu) \rightarrow \kappa \leq \mu$

Απόδ.: Εύκολη.

Παρατηρήσεις - παραδείγματα:
(1) X το πολύ αριθμήσιμο $\rightarrow$ $|X| \leq \aleph_0$
(2) $\forall n \in \omega$: $n < \aleph_0$ (δηλ. $n \preceq \aleph_0 \wedge n \neq \omega$)
(3) $\aleph_0 < \mathfrak{c}$
(4) $2^{\aleph_0} \leq \mathfrak{c}$
(5) Για κάθε πληθάριθμο κ: $\kappa < 2^{\kappa}$

Θεώρημα 11: (Cantor, Schröder, Bernstein) / CSB
Για κάθε A, B, αν $|A| \leq |B|$ και $|B| \leq |A|$
τότε $|A| = |B|$

(δηλ. αν $\exists f: A \xrightarrow{1-1} B \wedge g: B \xrightarrow{1-1} A$
τότε $\exists h: A \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} B$)

Πόρισμα: Αν $A \subseteq B \subseteq C$ και $A \sim C$
τότε $|A| = |B| = |C|$

(δηλ. $\kappa \leq \lambda \leq \mu$ και $\kappa = \mu$
τότε $\kappa = \lambda = \mu$)

Προτ. 25: Κάθε $X \subseteq \mathbb{R}$ που περιέχει ανοιχτό ~~δια~~ διάστημα είναι ισοπληθικό με το $\mathbb{R}$.

δηλ. $(a, b) \subseteq X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow X \sim \mathbb{R}$
για $a, b \in \mathbb{R}$: $a < b$

Προτ 26: $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$ (δηλ $P(\omega) \sim \mathbb{R}$)

Αποδ.: Ξέρουμε ότι $2^{\aleph_0} \leq \mathfrak{c}$ (Πρ. 23)

• Για την ανισότητα $\mathfrak{c} \leq 2^{\aleph_0}$, θεωρούμε την

$$G: \mathbb{R} \longrightarrow P(\mathbb{Q})$$
$$r \longmapsto \{q \in \mathbb{Q} : q < r\}$$

G 1-1 γιατί το $\mathbb{Q}$ είναι πυκνό στο $\mathbb{R}$.

Δηλ, για $r, s \in \mathbb{R}$: $\exists\, q \in \mathbb{Q}$: $r < q < s$

• $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$ από CSB

12/14 Τετ

Πράξεις με πληθαρίθμους.

1) Πρόσθεση "ξένη ένωση"

Ορ: Έστω κ, λ πληθάριθμοι. Το <u>άθροισμα</u> $\kappa + \lambda$ ορίζεται να είναι ο πληθάριθμος της <u>ξένης</u> ένωσης $A \cup B$ όπου $|A| = \kappa$ και $|B| = \lambda$

Δηλ $\kappa + \lambda = |A \cup B|$ (όπου $A \cap B = \emptyset$)

Σχόλιο: 1) Για να κάνουμε τα σύνολα ξένα με τις ίδιες πληθυκότητες, μπορούμε να θεωρήσουμε τα $A \times \{0\}$ και $B \times \{1\}$

2) Το αποτελ. της πρόσθεσης $\kappa + \lambda$ είναι ανεξάρτητο της επιλογής των A, B (αρκεί $|A| = \kappa$ & $|B| = \lambda$)

(Αυτό $A \cup B \sim A' \cup B'$ Άσκηση για $A' \sim A$, $B' \sim B$, $A' \cap B' = \emptyset$) 42

Πρότ. 27: Για κάθε πληθαρίθμους κ, λ, μ:

i) $\kappa + 0 = \kappa$

ii) $\kappa + \lambda = \lambda + \kappa$

iii) $(\kappa + \lambda) + \mu = \kappa + (\lambda + \mu)$

Απόδ: εύκολη

Παρατήρηση: Η πρόσθ. πληθαρ. γενικεύει την πρόσθ. στους φυσικούς αρ.
Δηλ, για $m, n \in \omega$:

$$|n| + |m| = n + m \quad \text{(Άσκηση)}$$

Πρότ. 28 i) $(\forall n \in \omega)\ \aleph_0 + n = \aleph_0$

ii) $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$

Απόδ: Παλιά (Πρότ. 20)

---

2. Πολλαπλασιασμός «Καρτεσιανό Γιν»

Ορισμός: Έστω κ, λ πληθάριθμοι. Το γινόμενο $\kappa \cdot \lambda$ ορίζεται ως ο πληθάριθμος του καρτ. γιν. $A \times B$, όπου $|A| = \kappa$ & $|B| = \lambda$. Δηλ $\kappa \cdot \lambda = |A \times B|$

Πρότ. 29. Για κάθε πληθ. κ, λ, μ

i) $\kappa \cdot 0 = 0$

ii) $\kappa \cdot 1 = \kappa$

iii) $\kappa \cdot \lambda = \lambda \cdot \kappa$

iv) $(\kappa \cdot \lambda) \cdot \mu = \kappa \cdot (\lambda \cdot \mu)$

Απόδ. Εύκολη

Προτ. 30: Για καθε πληθαρ. κ, λ, μ:
$\kappa \cdot (\lambda + \mu) = \kappa \cdot \lambda + \kappa \cdot \mu$.

Αποδ: Έστω σύνολα A, B, C
με $|A| = \kappa$, $|B| = \lambda$, $|C| = \mu$.
και ~~ξένα~~ $B \cap C =$ ~~ξένα~~ $\emptyset$

Τότε $\kappa \cdot (\lambda + \mu) = |A \times (B \cup C)|$
$= |(A \times B) \cup (A \times C)| \underset{(A \times B) \cap (A \times C) = \emptyset}{=\!=} |A \times B| + |A \times C|$
$= \kappa \cdot \lambda + \kappa \mu$

Παρατήρηση: Ο πολλ/μος πληθαρίθμων γενικεύει τον πολλ/μο στους φυσ. αρ.
Δηλ για καθε $n, m \in \omega$:
$|n| \cdot |m| = n \cdot m$

Προτ 31) i) $(\forall n \in \omega)$ $n > 0 \rightarrow$ ~~m~~ $n \cdot \aleph_0 = \aleph_0$
ii) $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$

Αποδ. Προτ 19.

3) Δύναμη « σύνολο συναρτήσεων »

Ορισμός: Έστω κ, λ πληθάριθμοι.
Η δύναμη κ^λ ορίζεται ως
πληθαρ. του ${}^B A$ όπου $|A| = \kappa$, $|B| = \lambda$
Δηλ $\kappa^\lambda = |{}^B A|$

Σχόλιο, όπως πριν ανεξ. και επιλ. A, B
και γενικεύει τη δύναμη στους φυσικούς αριθμούς.

Προτ 32) Για κάθε πληθαρίθμους κ,λ,μ:

i) $\kappa^0 = 1$
ii) $\kappa^1 = \kappa$
iii) $\kappa^2 = \kappa \cdot \kappa$
iv) $0^\kappa = 0$ για $\kappa \neq 0$
v) $1^\kappa = 1$
vi) $\kappa^{(\lambda+\mu)} = \kappa^\lambda \cdot \kappa^\mu$
vii) $(\kappa \cdot \lambda)^\mu = \kappa^\mu \cdot \lambda^\mu$
viii) $(\kappa^\lambda)^\mu = \kappa^{\lambda\mu}$

Αποδ: i - v) απλά. vi - viii) ασκήσεις

vi) $^{B\cup C}A \sim {}^{B}A \times {}^{C}A$

$s: B \cup C \to A \mapsto (?, ?)$ 1-1 & επί τρόπος

Προτ 33) Για κάθε πληθ κ,λ,μ:

i) $\lambda \leq \mu \to \kappa + \lambda \leq \kappa + \mu$.
ii) $\lambda \leq \mu \to \kappa \cdot \lambda \leq \kappa \cdot \mu$.
iii) $\lambda \leq \mu \to \lambda^\kappa \leq \mu^\kappa$
iv) $\lambda \leq \mu \to \kappa^\lambda \leq \kappa^\mu$, $\kappa \neq 0$

Αποδ: Υποθ. $\kappa, \lambda, \mu \neq 0$

(i) Έστω σύνολα A, B, C τ.ω. $|A| = \kappa$, $|B| = \lambda$, $|C| = \mu$ και $A \cap B = A \cap C = \emptyset$

Υποθ. ότι $\exists f : B \xrightarrow{1-1} C$. Θδο. $\exists g: A \cup B \xrightarrow{1-1} A \cup C$

Ορίζουμε τη g ως εξής:

$$(\forall x \in A \cup B)\ g(x) = \begin{cases} x, & x \in A \\ f(x), & x \in B \end{cases}$$

Η g είναι εμφανώς 1-1

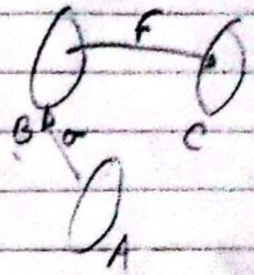
(ii) Έστω A, B, C με $|A| = \kappa$, $|B| = \lambda$, $|C| = \mu$ και έστω $f : B \xrightarrow{1-1} C$. Ορίζουμε

τη $g : A \times B \to A \times C$
ως $\langle a, b \rangle \mapsto \langle a, f(b) \rangle = g(\langle a, b \rangle)$

Η g είναι 1-1:

iii) Έστω σύνολα A, B, C τω.: $|A| = \kappa$, $|B| = \lambda$
$|C| = \mu$, κ έστω $f: B \xrightarrow{1-1} C$

Οδδ. υπάρχει συν. $g: {}^{A}B \xrightarrow{1-1} {}^{A}C$
$\sigma \mapsto f \circ \sigma$



Για κάθε $s \in {}^{A}B$ θέτουμε
$g(s) = f \circ s$, είναι $g(s) \in {}^{A}C$

Άσκηση: Δο. g 1-1

(iv) Άσκηση

Σχόλιο: Οι συνεπαγωγές της Πρ 33 δεν ισχύουν εν γένει για τη $<$ (στους πληθ.)
Πχ $0 < 3 \wedge 0 + \aleph_0 = 3 + \aleph_0 = \aleph_0$

Προτ 34: Για κάθε πληθ. κ, λ, μ:
i) $\kappa \not< \kappa$
ii) $(\kappa < \lambda \wedge \lambda < \mu) \to \kappa < \mu$. [Δηλ. η $<$ είναι μια διάταξη στους πλ.]

Αποδ: Πρ 24) $\kappa < \lambda \wedge \lambda < \mu \to \kappa \leq \mu$

Αν, π.α. $\kappa = \mu$ ~~τότε~~ $\cancel{\kappa < \lambda \wedge \lambda < \kappa}$,
~~άρα~~ $\cancel{\kappa < \kappa}$ ↯ Πρ 34:
τότε, $\kappa \leq \lambda \leq \kappa = \mu$, CSB $\kappa = \lambda = \mu$ ↯(i)

Προτ 35: i) $(\forall n\in\omega)$ $n+\mathfrak{c}=\aleph_0+\mathfrak{c}=\mathfrak{c}+\mathfrak{c}=\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{c}=\mathfrak{c}$

ii) $(\forall n\in\omega: n\neq 0)$ $\mathfrak{c}^n=\mathfrak{c}^{\aleph_0}=\mathfrak{c}$ (ενώ $\mathfrak{c}^0=1$)

iii) $(\forall n\in\omega: n\geq 2)$ $n^{\aleph_0}=\mathfrak{c}$ (ενώ $0^{\aleph_0}=0,\ 1^{\aleph_0}=1$)

iv) $2^{\mathfrak{c}}=\aleph_0^{\mathfrak{c}}=\mathfrak{c}^{\mathfrak{c}}$

Αποδ: i) Έστω $n\in\omega$: Έχω.

$$\mathfrak{c}\underset{0\leq n}{\leq} n+\mathfrak{c}\underset{n\leq\aleph_0}{\leq}\aleph_0+\mathfrak{c}\leq\mathfrak{c}+\mathfrak{c}=2\cdot\mathfrak{c}$$
$$=2\cdot 2^{\aleph_0}\leq\underbrace{2^{\aleph_0}\cdot 2^{\aleph_0}}_{\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{c}}\overset{(\text{ασκ } \kappa+\kappa=2\cdot\kappa)}{=}2^{\aleph_0+\aleph_0}$$
$$=2^{\aleph_0}=\mathfrak{c}$$

iii) Έστω $n\in\omega$: $n\geq 2$

$$\mathfrak{c}=2^{\aleph_0}\underset{2\leq n}{\leq} n^{\aleph_0}\leq\aleph_0^{\aleph_0}\leq ?$$
$$\leq(2^{\aleph_0})^{\aleph_0}=2^{\aleph_0\cdot\aleph_0}=2^{\aleph_0}=\mathfrak{c}$$

Πόρισμα: Οι γνωστοί Ευκλείδειοι χώροι $\mathbb{R}^n$ $(n\geq 1)$ είναι όλοι ισοπληθικοί με το $\mathbb{R}$

Ερώτημα: "Πόσο μεγαλύτερο" είναι το $2^{\aleph_0}$ από το $\aleph_0$?

Σχόλιο $X\subseteq\mathbb{R}$ "$\Rightarrow$" $|X|=\aleph_0\ \vee\ |X|=\mathfrak{c}$

Εικασία (Cantor, 1978): $(\forall \underset{\text{άπειρο}}{X\subseteq\mathbb{R}})$ — // —

αυτ CH, Cont. HYP.

ZFC $\nvdash\neg$CH

Gödel 1938: CH σχετ. συνεπής με ZFC.

Cohen 1963 $\neg$CH — // — με ZFC

ZFC $\nvdash$ CH

Τελ. CH ανεξ. της ZFC.

GCH $\to$ AC

ΕΙΚΑΣΙΑ (Cantor, 1878) Κάθε άπειρο $X \subseteq \mathbb{R}$ είναι είτε αριθμήσιμο είτε ισοπληθικό με το $\mathbb{R}$.

(δηλ., αυτό λέει ότι το $\mathfrak{c}$ είναι η αμέσως επόμενη τάξη απείρου μετά το αριθμήσιμο)

ΥΠΟΘΕΣΗ ΤΟΥ ΣΥΝΕΧΟΥΣ

CONTINUUM HYPOTHESIS (CH)

No 1 λίστα Hilbert 1900

Gödel 1938:

Η CH είναι σχετικά συνεπής με την ZFC (δηλ. αν ZFC συνεπής, τότε και ZFC+CH συνεπής. Με άλλα λόγια, αν ZFC συνεπής τότε δεν διαψεύδει την CH δηλ. $ZFC \nvdash \neg CH$)

Cohen 1963 Η $\neg$CH είναι σχετικά συνεπής με την ZFC

Τελικά η CH είναι ανεξάρτητη από τη ZFC

Διότι τοχ. στην (i)
Αν $x \in A$ και $y, y' \in B$ με $y \neq y'$ τ.ω.
$A_x \approx B_y$, $A_x \approx B_{y'}$, τότε $B_y \approx B_{y'}$ άτοπο
διότι $x B \tau y$ $y <_B y'$ και αντιφάσκει με τη πρόταση 39

($\leftarrow$). Ορίζουμε την $f: A \to B$
τ.ω. $(\forall x \in A)$ $f(x)$ να είναι το μοναδικό
$y \in B$ τ. ω. $A_x \approx B_y$ (λόγω (i) και παρατήρηση)

Η f είναι εξ υποθέσεως επί και
είναι 1-1 λόγω παρατήρησης.

Αρκεί ν.δ.ό.τι η f γν. αύξουσα. Έστω
$x, x' \in A$ με $x <_A x'$. Θ. δ. ότι
$f(x) <_B f(x')$

Έχουμε ότι $A_{x'} \approx B_{f(x')}$
και
$A_x \approx B_{f(x)}$

Έστω $h: A_{x'} \approx B_{f(x')}$

Θεωρούμε την $h \upharpoonright A_x : A_x \approx B_{h(x)}$
όπου $h(x) < f(x')$

Άρα $A_x \approx B_{h(x)}$, $A_x \approx B_{f(x)}$, οπότε από παρατήρηση
$h(x) = f(x) <_B f(x')$

⊠

Δευ: 12/19.

Καλές Διατάξεις & Διατακτικοί

· Γενίκευση του $\langle \omega, \overset{\in_\omega}{<} \rangle$

Ορισμός: Έστω $A \neq \emptyset$ και $<$ μια γνήσια, ολική διάταξη στο A. Η $<$ θα λέγεται **καλή διάταξη** στο A αν

$$(\forall B \subseteq A)(B \neq \emptyset \rightarrow (\exists x \in B)(\forall y \in B)\ x \leq y)$$

↳ μοναδικό $x = \min_< B$

Π.χ. $\langle \omega, < \rangle$, $\langle n, < \cap (n \times n) \rangle$, για $n \in \omega$

Άσκηση: $\langle A, < \rangle$ καλή διατ. $\wedge$ $B \subseteq A$ $\Rightarrow \langle B, < \cap (B \times B) \rangle$ καλή διατ.

Ορισμός: Έστω $\langle A, < \rangle$ καλά διατεταγμένο και $B \subseteq A$. Το B λέγεται <u>αρχικό τμήμα</u> του A αν ($\to \langle A, < \rangle$)

$$(\forall x \in B)(\forall y \in A)(y < x \rightarrow y \in B)$$

"B κλειστό προς τα αριστερά / κάτω"

· Αν $B \subsetneq A$ τότε γνήσιο αρχ. τμήμα.

Πχ: $n \in \omega \Rightarrow n$ γν. αρχ. τμήμα του ω. (και καθε $m > n$)

Άσκηση: Αν B (γν.) αρχ. τμήμα του A. και C (γν.) -//- του B τότε C (γν.) -//- του A.

Συμβολισμός: Για $a \in A$, ορίζουμε
$$A_a = \{x \in A : x < a\}$$
και το λέμε το γν. αρχ. τμήμα του a.
(που ορίζεται από το)

Παρατηρήσεις: 1) $a \notin A_a$
2) Αν $a = \min_< A$ τότε $A_a = \emptyset$

Πρόταση 36: Αν $\langle A, < \rangle$ καλά διατ.
τότε δεν υπάρχει άπειρη $<$-φθίνουσα ακολ.
στοιχείων του A.
Δηλ δεν υπάρχει $\{x_n : n \in \omega\} \subseteq A$
με $\dots < x_{n+1} < x_n < \dots < x_0$

(δηλ $(\forall n \in \omega)(x_{n+1} < x_n)$)

Απόδ.: Το $\underset{\neq \emptyset}{\{x_n : n \in \omega\}} \subseteq A$ δεν θα είχε ελάχιστο.

Προτ 37: Έστω $\langle A, < \rangle$ καλά διατ.
και $f : A \to A$ γνησίως αύξουσα
$(x < y \to f(x) < f(y))$ ($<$-αύξουσα)
(σε ολ. διατ.) Τότε $(\forall x \in A)(x \leq f(x))$

Απόδ.: Θεωρούμε το $B = \{x \in A : f(x) < x\}$.

Αν $B = \emptyset$, τότε υπάρχει $a = \min_< B$
(δηλ $a \in B \wedge f(a) < a$)
$(\forall y \in B)(a \leq y)$

και άρα αφού f γν. αύξ. $f(f(a)) < f(a)$. Επομένως, $f(a) \in B$ ↯
(άτοπο διότι $f(a) < a = \min_< B$)
Άρα $B = \emptyset$.

Πρόταση 38: Αν τα καλά διατεταγμένα $\langle A, <_A \rangle$ και $\langle B, <_B \rangle$ είναι ισομορφικά όμοια, τότε ο ισομορφισμός ομοιότητας είναι μοναδικός.

Απόδ.: Έστω $f: A \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} B$ ομοιότητα.
(Δηλ. γν. αύξ, δηλ. $x <_A y \to f(x) <_B f(y)$)

Έστω $g: A \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} B$ ισομ. ομοιότητας | Θ.δ.ο $f = g$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "f"] & B \arrow[l, bend left, "f^{-1}"] \arrow[r, bend left, "g^{-1}"] & A \arrow[l, bend left, "g"] \end{tikzcd}$$

Τότε $g^{-1} \circ f: A \to A$ είναι $<_A$-αύξουσα.

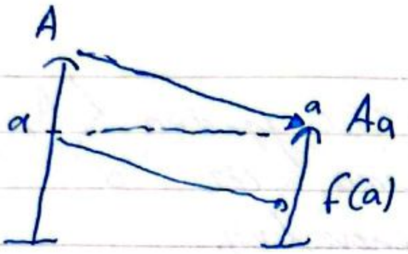
Άρα (Πρ 37), $(\forall x \in A)\,(x \leq_A g^{-1}(f(x)))$,
δηλ. $g(x) \leq_B f(x)$

Ομοίως για την $f^{-1} \circ g: A \to A$
προκύπτει ότι $(\forall x \in A)\ f(x) \leq_B g(x)$

Άρα $(\forall x \in A)\ g(x) = f(x)$ □

Πρόταση 39: Ένα καλά διατ. $\langle A, < \rangle$ δεν είναι ισομορφικό (όμοιο) με κανένα γνήσιο αρχικό τμήμα του.

Απόδ: Από άσκ., αν $B \subsetneq A$ γν. αρχ. τμήμα του A, τότε υπάρχει $a \in A$ τ.ω.: $B = A_a$
Προς άτοπο έστω ότι υπάρχει $f: A \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} A_a$ ομοιότητα. (δηλ $<$-αύξ.)
Τότε από Πρ. 37 $(\forall x \in A)\ x \leq f(x)$
Άρα $a \leq f(a)$



Όμως $f(a) \in A_a$
δηλ $f(a) < a$. ↯

Συμβολισμός ομοιότητας: $A \overset{f}{\cong} B$
Υπάρχει $f : A \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} B$ τω. $x <_A y \leftrightarrow f(x) <_B f(y)$

Πόρισμα: Αν $\langle A, < \rangle$ καλά διατ. και $x, y \in A$ με $x \neq y$ τότε $A_x \not\cong A_y$

Θεώρημα 12: Αρχή Υπερπεπερασμένης Επαγωγής (ΑΥΕ)

Έστω $\langle A, < \rangle$ καλά διατ. και έστω $X \subseteq A$
Αν: $(\forall a \in A)(A_a \subseteq X \to a \in X)$

Τότε: $X = A$

Αποδ.: Έστω $X \subseteq A$ όπως στην υπόθεση της διατύπωσης.
Προς άτοπο, έστω ότι $A \setminus X \neq \emptyset$ άρα υπάρχει $a = \min(A \setminus X)$.

Όμως τότε $A_a \subseteq X$ και $a \notin X$ ↯. $\square$

Σε μορφή τύπου:

Θεώρημα 13: Έστω $\langle A, < \rangle$ καλά διατ. και $\Phi(x)$ τύπος

Αν $(\forall a \in A)((\forall x \in \cancel{\Phi} A_a)(\Phi(x) \to \Phi(a)))$

Τότε $(\forall a \in A)\, \Phi(a)$

Αποδ.: Θεωρούμε το $X = \{a \in A : \Phi(a)\}$ και εφαρμόζουμε το Θ12. □

Πρόταση 40: Έστω $\langle A, <_A \rangle$ και $\langle B, <_B \rangle$ καλά διατ. Τότε

$$A \approx B \text{ αν } \begin{cases} (\forall x \in A)(\exists y \in B)(A_x \approx B_y) & (1) \\ (\forall y \in B)(\exists x \in A)(A_x \approx B_y) & (2) \end{cases}$$

Αποδ.:

$(\forall x \in A)(\exists y \in B)$

"A όχι μακρύτερο από B"

($\rightarrow$): Έστω $f : A \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} B$ ομοιότητα. Τότε, αν $x \in A$, ~~τότε~~ έχουμε ότι

$$A_x \overset{f \upharpoonright A_x}{\approx} B_{f(x)}$$ **Άσκηση**

Ομοίως για (2) ~~λόγω~~ f επί ή f^{-1} αντίστοιχα.

! **Παρατήρηση:** Οι υπαρξιακοί ποσοδείκτες στα (1), (2) είναι ποσοδείκτες μοναδικής ύπαρξης:

Αν $x \in A$ και $y, y' \in B : y \neq y' \wedge A_x \approx B_y \approx B_{y'}$

$\hookrightarrow y < y'$ ή $y' < y$

τότε $B_y \approx B_{y'}$ ↯ Προτ. 39 $\wedge\ y < y'$ ή $y' \leq_B y$

⟵ : Ορίζουμε την $f: A \to B$

τ.ω. $(\forall x \in A)$ $f(x)$ να είναι το μοναδικό $y \in B$
τω $A_x \cong B_y$ (λόγω i) & παρατ.)

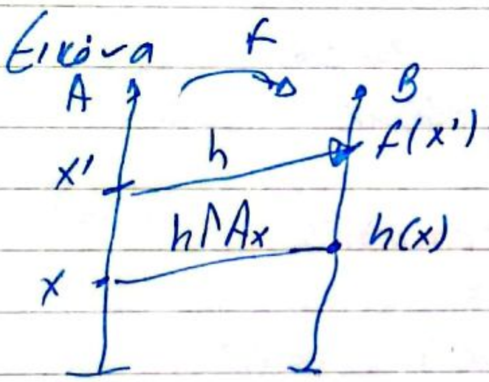
Η f είναι ~~εt~~ υποθέσεων επί και
είναι 1-1 λόγω παρατήρησης.

Ανδο. η f γν. αύξουσα

Έστω $x, x' \in A$: $x <_A x'$

Θδο $f(x) <_B f(x')$

Εικόνα



Ξέρουμε ότι $A_{x'} \overset{h}{\cong} B_{f(x')}$

και $A_x \cong B_{f(x)}$

Θεωρούμε την $h \upharpoonright A_x : A_x \cong B_{h(x)}$
ομοιότητα

όπου $h(x) <_B f(x')$

$A_x \cong B_{f(x)}$, $A_x \cong B_{h(x)}$ (Παρατ.) $\Rightarrow$ $h(x) = f(x) <_B f(x')$

12/21 Τετ.

Προτ. 41. Η σχέση α είναι γνήσια διάταξη στη ΚΔ.

Θεωρ 14: Έστω $\langle A, <_A \rangle$, $\langle B, <_B \rangle$ ΚΔ. Τότε ακριβώς ένα από τα παρακάτω ισχύει.

i) $\langle A, <_A \rangle \approx \langle B, <_B \rangle$

ii) $\langle A, <_A \rangle \;\alpha\; \langle B, <_B \rangle$

iii) $\langle B, <_B \rangle \;\alpha\; \langle A, <_A \rangle$

+ μεταβ.

~~Πορ. Αν A, B καλά διατεταγμένα τότε $|A| \leq |B|$, ή $|B| \leq |A|$~~

Πορισμα: Αν τα A, B είναι καλά διατάξιμα, τότε $|A| \leq |B|$ ή $|B| \leq |A|$.

« ομοιόμορφα πρότυπα καλών διατάξεων »

Διατακτικοί Αριθμοί (ordinal numbers)

Ορισμός: Ένα σύνολο A λέγεται διατακτικός (αρ.) αν το A μεταβατικό και το $\langle A, \in \rangle$ είναι καλά διατεταγμένο.

Μεταβατικοποίηση:
$$f : \langle A, <_A \rangle \to \langle ?^{(\mathrm{rng}(f))}, \in \rangle$$
$$x \mapsto \{ f(y) : y \in A \wedge y <_A x \}$$
$$\min A \mapsto \emptyset$$

Πχ στο $\mathbb{R}$: $A = \{ \frac{n}{n+1} : n \in \omega \}$, $\langle A, < \cap (A \times A) \rangle$ καλά
$B = A \cup \{1\}$, $\langle B, < \cap (B \times B) \rangle$ διατεταγμ.

Με "μεταβατικοποίηση": $\langle A, < \rangle \cong \langle \omega, \in \rangle$
$\langle B, < \rangle \cong \langle \omega^+, \in \rangle$

Πχ: διατακτικών: $n \in \omega$, ω, ω^+, ..

Άσκηση: Αν A διατακτικός, τότε και A^+ διατακτ. και είναι ο άμεσος επόμενος

Συμβολισμός: Θα γράφαμε τα εξής σύμβολα για διατακτικούς:
$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \rho, \eta, \theta, \xi$
και « $\alpha \in ON$ » αντί για « α είναι διατακτικός »

Παρατήρηση: $a \in ON$ σημαίνει ότι $\forall x, y, z \in a$:

1) $x \notin x$
2) $(x \in y \wedge y \in z) \to x \in z$
3) $x \in y \vee y \in x \vee x = y$
4) Αν $B \subseteq a$: $B \neq \emptyset$,
τότε $\exists\, b \in B : b \cap B = \emptyset$
5) $s \in t \in a \Rightarrow s \in a$.

Πρόταση 42: Για κάθε $a, b \in ON$:

i) $a \notin a$
ii) $(\forall x)(x \in a \longrightarrow x \subsetneq a)$ iii) $(\forall x)(x \in a \to x \in ON)$
iii) $B \in a \longleftrightarrow B \subsetneq a$
iv) $a \in B \vee B \in a \vee a = B$

Όπως και στους φυσ. αριθμούς, ταυτίζουμε εξ ορισμού το $\in$ με το $<$ στους διατακτ., δηλ

για κάθε $a, B \in ON$:

$$a < B \longleftrightarrow a \in B \longleftrightarrow a \subsetneq B$$
$$a \leq B \longleftrightarrow (a \in B \vee a = B) \longleftrightarrow a \subseteq B$$

Σχόλιο: για $a, b \in ON$:
$b \in a \Leftrightarrow b$ γν. αρχ. τμήμα του a.

Άρα κάθε διατακτικός ισούται με το σύνολο όλων των προηγούμενων.

$$B = \{a \in ON : a < B\}$$

Σχόλιο: για $a \in ON$: ο a^+ είναι ο άμεσος επόμενος του a

. Το 0 είναι ο ελάχιστος διατακτικός

(δηλ. $\in$)

Πρόταση 43: Η $<$ είναι γνήσια ολική στους διατακτ.

Αποδ.: Από Προτ. 42 η $<$ είναι αντιανακλαστική & τριχοτομική στους διατακτικούς.
Η $<$ είναι μεταβατική στους διατακτικούς επειδή οι διατακτικοί είναι μεταβατικό σύνολο.

Πόρισμα: Για κάθε $a, \beta \in ON$:

$$\langle a, \in \rangle \approx \langle \beta, \in \rangle \leftrightarrow a = \beta$$

Αποδ.: ($\rightarrow$) Τριχοτομία και Προτ 39.

Σχόλια: Για κάθε $a, \beta \in ON$:

$$a < \beta \leftrightarrow \langle a, \in \rangle \prec \langle b, \in \rangle$$

Θεώρημα 45: Έστω $\Phi(x)$ τύπος τω.: υπάρχει $a \in ON$ για τον οποίο ισχύει $\Phi(a)$. Τότε υπάρχει ελάχιστος διατακτικός $\beta \in ON$ τω. $\Phi(\beta)$

Αποδ.: Έστω $a \in ON$ τω $\Phi(a)$
Θέτουμε $\beta = \{ \gamma < a : \Phi(\gamma) \} \subseteq a$

Αν $\beta = \emptyset$ τότε a ο ελάχιστος.
Αν $\beta \neq \emptyset$ τότε (από καλή διάταξη στο $\langle a, \in \rangle$) υπάρχει $f \in \beta$: $f \cap \beta = \emptyset$ ($f = \min \beta$)
Τότε $f \in \beta$ άρα (f διατακτικός και) ισχύει $\Phi(f)$ και $f \cap \beta = \emptyset$ άρα f ο ελάχιστος τέτοιος $\square$

Θεώρημα 16: Έστω $B \neq \emptyset$ σύνολο διατακτικών. Τότε το B έχει ελάχιστο.

Αποδ.: Θεωρούμε τον τύπο $\Phi(x)$: $x \in B$ κι εφαρμόζουμε το Θ 15.

Πόρισμα: Κάθε μεταβατικό σύνολο διατακτικών αριθμών είναι διατακτικό.

Αποδ. Αν $A = \emptyset$ ✓
Αλλιώς αν $A \neq \emptyset$ (Βλ. Θ 16)
τότε το $\langle A, \in \rangle$ είναι καλά διατεταγμένο

Πρόταση 44: "Η συλλογή ON" δεν είναι σύνολο.
$\{x : \Phi(x)\ \text{op.διατ.}\}$

Αποδ. Αν, προς άτοπο, η συλ. ON ήταν σύνολο, τότε το ON θα ήταν μεταβατικό συν. διατακτικών αριθμών. Άρα, από το Πορ., το ON θα ήταν διατακτικός κι επομένως $ON \in ON$ ↯ (42i Προτ.)

Πρόταση 45: Έστω A σύνολο διατακτικών. Τότε, υπάρχει διατακτικός ο οποίος είναι μεγαλύτερος ή ίσος από κάθε στχ του A.

Αποδ.: Δεδομένου τέτοιου A, το $\bigcup A$ είναι μεταβ. ~~ένωση~~ σύνολο διατακτικών, και άρα μεταβατικός.
Από. $\gamma := \bigcup A \in ON$.
Τότε άμεσα $(\forall B \in A)(B \leq \gamma)$
επειδή $B \in A$ κι άρα $B \subseteq \bigcup A$.

Πόρισμα: Έστω A σύνολο διατακτικών. Τότε υπάρχει $\beta \in ON$ με $\beta \notin A$.

Αποδ.: Θέτουμε $\gamma = \bigcup A$ και $\beta = \gamma^+$ ικανοποιεί το ζητούμενο.

Συμβολισμός: Αν A σύνολο διατακτικών, θέτουμε $\sup A = \bigcup A$. ($\in ON$)

Ασκήσεις: — Το $\sup A$ είναι όντως το ελάχιστο άνω φράγμα (αν A σύνολο διατακτ.)
— Αν $a, \beta \in ON$ τότε
$a \cup \beta = \max\{a, \beta\}$
$a \cap \beta = \min\{a, \beta\}$
— Αν $A \neq \emptyset$ σύνολο διατακτ. τότε $\bigcap A = \min A$

Χωρίζουμε τους (μη μηδενικούς) διατακτικούς σε δύο κατηγορίες:

Ορισμός: Ένας $a \in ON$ λέγεται:
- Επόμενος: αν $(\exists \beta \in ON)(a = \beta^+)$
- οριακός: αν $a \neq 0$ και a όχι επόμενος

Πχ: · Κάθε $n \in \omega$ $(n \neq 0)$ είναι επόμενος
· Ο ω^+ είναι επόμενος
· Ο ω είναι οριακός (ο ελάχ. οριακός διατ.)

Άσκηση: Για κάθε $a, \beta \in ON$:
i) $a < \beta^+ \leftrightarrow a \leq \beta$
ii) $a < \beta \leftrightarrow a^+ \leq \beta$
iii) $\sup a = a$ ανν a οριακ. ανν $(\forall x)(x < a \rightarrow x^+ < a)$

Άσκηση: Για κάθε $a \in ON$.
a) $a = 0$ ή a οριακός τότε $\bigcup a = a$,
β) Αν $a = \beta^+$ για κάποιο $\beta \in ON$, τότε $\bigcup a = \beta$

ΑΣΚΗΣΗ

Για κάθε $\alpha, \beta \in ON$:

(i) $\alpha < \beta^+ \longleftrightarrow \alpha \leq \beta$

(ii) $\alpha < \beta \longleftrightarrow \alpha^+ \leq \beta$

ΑΣΚΗΣΗ

Για κάθε $\alpha \in ON$:

- Αν $\alpha = 0$ ή α οριακός, τότε $\bigcup \alpha = \alpha$
- Αν $\alpha = \beta^+$, για κάποιο $\beta \in ON$, τότε $\bigcup \alpha = \beta$

(iii)

α οριακός $\longleftrightarrow (\forall x)(x < \alpha \to x^+ < \alpha)$

$\longleftrightarrow \sup \alpha = \alpha$

(1/9 Δε)

Επαναδιατυπώνουμε την Αρχή της Υπερπεπερασμένης Επαγωγής [Θ. 12] στο πλαίσιο των διατακτικών αριθμών.

Θεωρ. 17) (I) Έστω τύπος $\Phi(x)$ και έστω $\alpha \in ON$. Αν για κάθε $\beta < \alpha$, από το $(\forall \gamma < \beta)\, \Phi(\gamma)$ έπεται το $\Phi(\beta)$, τότε ισχύει ότι $(\forall \beta < \alpha)\, \Phi(\beta)$. Δηλαδή,

$$(\forall \beta < \alpha)\big((\forall \gamma < \beta)\, \Phi(\gamma) \to \Phi(\beta)\big) \to (\forall \beta < \alpha)\, \Phi(\beta)$$

(Αποδ: Ελαχ Αντιπχ Θ 15)

Θ17 II) Έστω τύπος $\Phi(x)$ τω. για κάθε $\beta \in ON$ από το $(\forall \gamma < \beta)\, \Phi(\gamma)$ έπεται το $\Phi(\beta)$. Τότε ισχύει ότι $(\forall \alpha \in ON)\, \Phi(\alpha)$

Θ17 III) Έστω τύπος $\Phi(x)$ τω:

a) Ισχύει $\Phi(0)$

b) Αν για κάποιο $\alpha \in ON$ ισχύει $\Phi(\alpha)$, τότε ισχύει και $\Phi(\alpha^{+})$.

γ) Αν $\gamma \in ON$ οριακός και για κάθε $\beta < \gamma$ ισχύει $\Phi(\gamma)$

Τότε ισχύει ότι $(\forall \alpha \in ON)\, \Phi(\alpha)$

(Replacement)
Fraenkel

A8) Αξιωματικό Σχήμα αντικατάστασης.

Έστω τύπος $\Phi(x,y)$ ο οποίος «περιγράφει συναρτησιακό κανόνα / συσχετισμός»
δηλ. $(\forall x)(\exists! y)\,\Phi(x,y)$

Τότε για κάθε σύνολο A υπάρχει σύνολο στο οποίο ανήκουν (ακριβώς) εκείνα τα y για τα οποία υπάρχει $x \in A$ τω $\Phi(x,y)$.
Δηλ.,

$$(\forall A)\left[(\forall x \in A)(\exists! y)\,\Phi(x,y) \longrightarrow (\exists B)(\forall z)\,(z \in B \leftrightarrow (\exists x \in A)\,\Phi(x,z))\right]$$

"$B = \Phi[A]$"

Από το A8 προκύπτει επίσημα η ύπαρξη του συνόλου $\{\omega^{+n} : n \in \omega\}$

Θέτ.μ A : ω
Φ : $\Phi(x,y) : x \in \omega \wedge y \in ON \wedge$ «$y = \omega^{+x}$»

«...» : $\exists f$ συν $\wedge\ dom(f) = x^{+} \wedge f(0) = \omega$ $\cancel{\wedge (\forall k \in x)}$
$\wedge (\forall k)\,(k^{+} \in x \rightarrow f(k^{+}) = f(k)^{+})$
$\wedge\ f(x) = y \wedge (\exists n \in \omega)\ x = n^{+}$

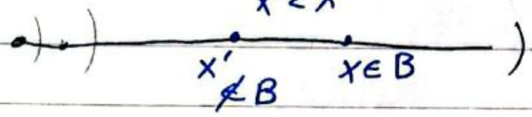
!! Αναδρομικές Συντομογραφίες !!

Θεώρημα 18: Έστω $\langle A, < \rangle$ καλά διατ. Τότε υπάρχει μοναδ. $\alpha \in ON$ τω
$$\langle A, < \rangle \approx \langle \alpha, \in \rangle$$

Αποδ.: Μοναδικότητα ✓ $\left| \begin{array}{l} \text{Αν } \alpha \neq B \text{ τότε } \alpha < B \text{ ή } \alpha > B \\ \text{ενώ } \langle \alpha, \in \rangle \approx \langle A, < \rangle \approx \langle B, \in \rangle \end{array} \right.$

Αν $A = \emptyset$, τότε ✓.

Αλλιώς, Θέτουμε $B = \{ x \in A : (\exists ! y \in ON) \; A_x \approx y \}$



Το B είναι αρχ. τμήμα του A (άσκ.)

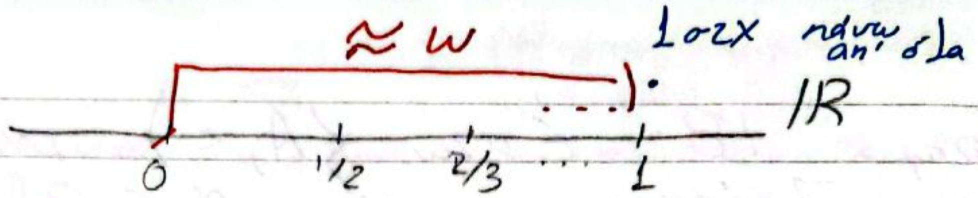
$A_x \overset{h}{\approx} y$. $\left| \; h \upharpoonright A_{x'} : A_{x'} \approx y_{h(x')} \in ON \right.$

Ο τύπος $\Phi(x, y)$: "$x \in A \wedge y \in ON \wedge A_x \approx y$" είναι συναρτησιακός

Από ΑΒ, υπάρχει το σύνολο
$$\Gamma = \{ y \in ON : (\exists x \in B)(A_x \approx y) \}$$

Μένει νδο
2) $\langle B, < \rangle \approx \langle \Gamma, \in \rangle$ ($x \mapsto y_x$)
1) Γ διατακτικός (Αυδο Γ μεΒ)
3) $B = A$ και άρα $\langle A, < \rangle \approx \langle \Gamma, \in \rangle$

Συμβολισμός: Δεδομένης κ.δ. $\langle A, < \rangle$ γράφουμε (καταχρηστικά) $ord(A)$ ($\text{ot}_{\text{Β.Βλ.}}(A)$) για τον μοναδικό διατακτ. y τω. $\langle A, < \rangle \approx \langle y, \in \rangle$ και το λέμε διατακτ. τύπο του $\langle A, y \rangle$



ΠX:

$$A = \left\{ 1 - \frac{1}{n+1} : n \in \omega \right\} \cup \{1\}$$

Τότε $ord(\langle A, \underset{\text{του } \mathbb{R}}{<} \rangle) = \omega^+$

Με χρήση του ΑΘ συνεχίζεται η κατασκευή διατακτικών, πέραν του ω, στο διηνεκές.

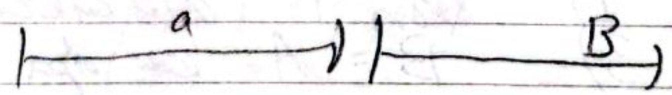
Δύο διαισθητικές "πράξεις" κατασκευής νέων διατακτικών:

1) Επόμενος του τρέχοντος (από α, στο α^+)
2) sup ενός συνόλου διατακτικών χωρίς μέγιστο.

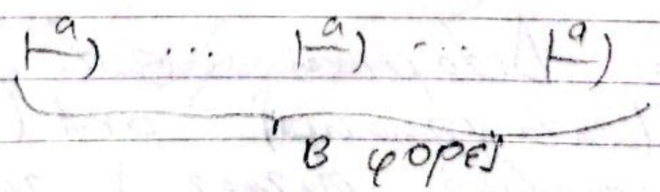
10/1 Τρ:

- Κάθε φραγμένη συλλογή διατακτικών (στην κλάση ON, <) είναι (υπαρκτό) σύνολο.

$a + B$:

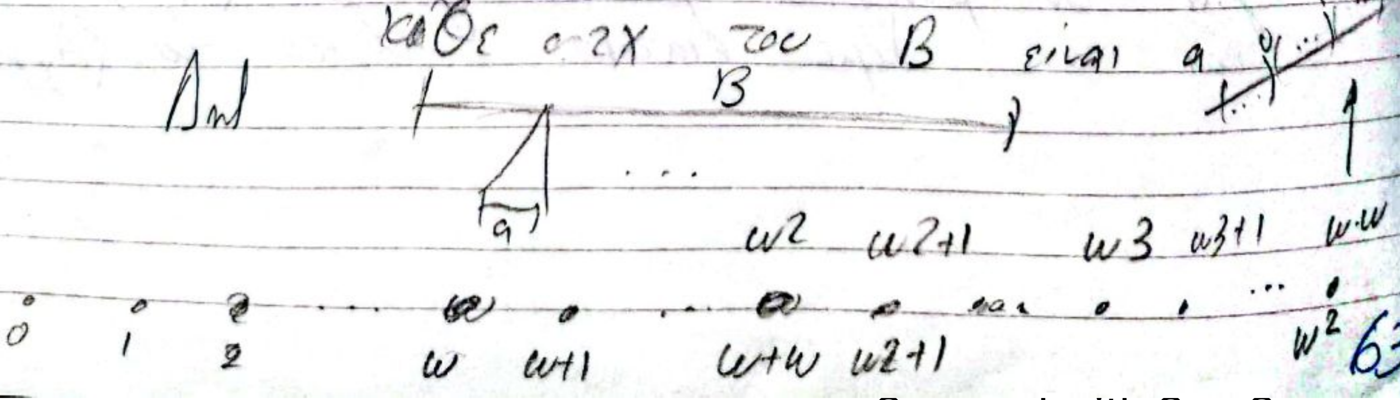


$a \cdot B$:



Κάθε σ-τχ του B είναι a

Δηλ



Θεωρ. 19) Έστω συναρτησιακός τύπος $\Phi(x,y)$. Υπάρχει συναρτησιακός τύπος $F(x,y)$ μονοσήμαντα καθορισμένος στην κλάση ON τω.: $(\forall a \in ON)\ F(a) = \Phi(F \upharpoonright a)$

$(\forall a \in ON)(\exists x,y)\big(F(a,y) \wedge \Phi(x,y) \wedge \text{"} x = F \upharpoonright a \text{"}\big)$

"x συν." $\wedge\ dom(x) = a \wedge (\forall b \in dom(x))\ (F(b, x(b)))$

Αρχή της Υπερπεπερ. Αναδρομής (στην κλάση ON).

ΒΑΣΙΚΗ ΕΦΑΡΜΟΓΗ:

Ο αναδρομικός ορισμός του σύμπαντος V των καλώς θεμελιωμένων συνόλων.

Θεωρούμε τον εξής (συναρτησιακό) τύπο $\Phi(x,y)$:

$$\Phi(x) = \begin{cases} \emptyset, & x = \emptyset \text{ ή } x \text{ δεν είναι συν. με } dom \in ON \\ P(x(a)), & x \text{ συναρτ. με } dom(x) = a^+ \in ON \\ \bigcup rng(x), & x \text{ συναρτ. με } dom(x) = \lambda \in ON \text{ οριακός.} \end{cases}$$

$F(0) = \emptyset$

$F(a^+) = P(F(a))$

λ ορ: $F(\lambda) = \bigcup_{a<\lambda} F(a)$

$F(a) = y$ αν "$\exists$ συν. f με $dom(f) = a \in ON$ $(\forall b < a)\ (f(b) = \Phi(f \upharpoonright b)$ & $\Phi(f, y)$"

Για την ύπαρξη υπεραριθμήσιμων διατακτικών, χρησιμοποιούμε το:

Θεώρημα 20 (Hartogs): Για κάθε σύνολο A, υπάρχει $B \in ON$ ο οποίος δεν εμφυτεύεται 1-1 στο A.
(δηλ. $\nexists$ 1-1 συν $f: B \to A$) Συμβ. ($B \not\hookrightarrow^{1-1} A$)

Αποδ.: Για την ακρίβεια, το Θεωρ. δίνει την ύπαρξη του ελάχιστου τέτοιου διατακτικού B.

« Θέτουμε $\beta = \{\gamma \in ON : \gamma \hookrightarrow^{1-1} A\}$ » (A5)

Θέτω $B = \{\langle X, R\rangle : X \subseteq A \ \& \ R$ καλή διάταξη στο $A\}$.

Από A8 $\beta = \{\gamma_{X,R} \in ON : \gamma_{X,R} \sim \langle X, R\rangle\}$

Τώρα $\delta.o.$ $\{\gamma_{X,R} \in ON : \langle X, R\rangle \in B\}$
και ότι β διατακτ. $= \{\gamma \in ON : \gamma \hookrightarrow^{1-1} A\}$

Πόρισμα: Υπάρχει υπεραριθμήσιμος διατακτικός (με χρήση του Θ20 στο $A = \omega$)

Ο ελαχ. υπεραρ. διατακτ. συμβ. ω_1 και είναι ο:
1ος υπεραρ. πληθάρ.

$$\omega_1 = \{B \in ON : B \hookrightarrow^{1-1} \omega\}$$

$$= \{B \in ON : B \text{ το πολύ αριθμήσιμος}\}$$

"Όλοι οι δυνατοί ακτινογράφοι καλών διατάξεων σε υποσύνολα του ω"

Ορισμός: Αρχικός Διατακτικός (πληθάριθμος) ονομάζεται κάθε διατακτικός ο οποίος δεν είναι ισοπληθικός με κανέναν προηγούμενό του. "κατώφλι πληθικότητας"

πχ $n \in \omega$, ω, ω_1

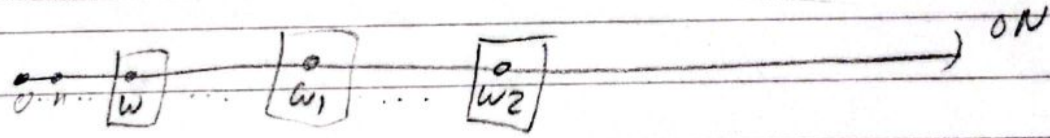
όχι $\omega + 15$, $\omega_1 + \omega \cdot 2$.

Από Θ20, δεδομένου πληθ. k παίρνουμε τον ελ. πληθάριθμο $H(k) =: k^+$ που είναι $> k$, δηλ

$$H(k) = \{ a \in ON : a \underset{1-1}{\hookrightarrow} k \}$$

$$\underset{\text{διατακτ.}}{\omega_a} = \underset{\text{πληθαρ.}}{\aleph_a} \quad : \quad a \in ON$$

ιδ



$$\omega_1 = \{ \beta \in ON : \beta \underset{1-1}{\hookrightarrow} \omega \}$$

$\aleph_0 \quad \aleph_1 \quad \aleph_2 \quad \cdots \quad \aleph_n \quad \cdots \quad \aleph_\omega \quad \aleph_{\omega+1} \quad \cdots \quad \aleph_{\omega+n} \quad \cdots \quad \aleph_{\omega_1}$

$$c = |\mathbb{R}| = |P(\omega)| = 2^{\aleph_0} \geq \aleph_1 \quad \text{(Cantor)}$$

Υποθ. του Συνεχούς: $2^{\aleph_0} = \aleph_1$