ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΑΛΜΑ

Θεωρια Συνολων

Χειμερινο Εξαμηνο 2022 – 2023

Ασκήσεις γνωριμίας

Προθεσμία: 1 Νοεμβρίου 2022

1. Έστω A, B, C, D δεδομένα σύνολα. Να δείξετε ότι:

$$\langle A, B\rangle = \langle C, D\rangle \longleftrightarrow (A = C \wedge B = D)$$

2. Έστω δεδομένα σύνολα A και B. Να δείξετε τα ακόλουθα:

   (i) $A \subseteq \mathcal{P}(\bigcup A)$. Να εξετάσετε πότε ισχύει η ισότητα.

   (ii) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$.

   (iii) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$. Να εξετάσετε πότε ισχύει η ισότητα.

   (iv) $A \subseteq B \longleftrightarrow \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.

   (v) $A = B \longleftrightarrow \mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$.

3. Ένα σύνολο A λέγεται **μεταβατικό** αν για κάθε $x \in A$ έχουμε ότι $x \subseteq A$ (δηλαδή, κάθε στοιχείο του A είναι και υποσύνολο του A). Να δείξετε τα ακόλουθα:

   (i) Το $\varnothing$ είναι μεταβατικό.

   (ii) Αν το A είναι μεταβατικό, τότε και το $A \cup \{A\}$ είναι μεταβατικό.

   (iii) Αν το A είναι μεταβατικό, τότε και το $\bigcup(A \cup \{A\})$ είναι μεταβατικό.

4. Έστω δεδομένα σύνολα A και B. Να γράψετε, όσο πιο αναλυτικά γίνεται, τον ακριβή τύπο $\Phi(f)$ (στη γλώσσα της συνολοθεωρίας) ο οποίος «λέει» ότι το σύνολο f είναι συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A και τιμές στο B (δηλαδή, με άλλα λόγια, ο τύπος $\Phi(f)$ ισχύει αν και μόνο αν η f είναι συνάρτηση της μορφής $f : A \longrightarrow B$).

5. Έστω δεδομένα σύνολα A και B. Να δείξετε από τα αξιώματα ότι υπάρχουν τα ακόλουθα σύνολα:

   (i) $\bigcap A$ (υποθέτοντας ότι $A \neq \varnothing$).

   (ii) $\{\mathcal{P}(x) : x \in A\}$.

   (iii) $\{A \cap x : x \in B\}$.

   (iv) $A \times B$.

   (v) $\{R :$ «η R είναι διμελής σχέση μεταξύ στοιχείων του A και του B»$\}$.

   (vi) $\{X \times Y : X \in A \wedge Y \in B\}$.

   (vii) ${}^{A}B$.

6. Έστω δεδομένα σύνολα A και B και έστω συνάρτηση $f : A \longrightarrow B$. Έστω επίσης $X \subseteq A$ και $Y \subseteq B$. Να δείξετε τα ακόλουθα, ενώ να εξετάσετε και πότε ισχύουν οι ισότητες:

   (i) $X \subseteq f^{-1}[f[X]]$.

   (ii) $f[f^{-1}[Y]] \subseteq Y$.

7. Έστω A σύνολο συναρτήσεων τέτοιο ώστε:

$$(\forall f \in A)\,(\forall g \in A)\,(f \subseteq g \,\vee\, g \subseteq f)$$

Να δείξετε ότι το σύνολο $\bigcup A$ είναι συνάρτηση και, για κάθε $f \in A$, έχουμε ότι $f \subseteq \bigcup A$.

8. Έστω $f : X \longrightarrow Y$ δεδομένη συνάρτηση. Έστω $(A_i)_{i\in I}$ οικογένεια υποσυνόλων του X και έστω $(B_i)_{i\in I}$ οικογένεια υποσυνόλων του Y (με $I \neq \varnothing$). Να δείξετε τα ακόλουθα:

   (i) $f[\bigcup_{i\in I} A_i] = \bigcup_{i\in I} f[A_i]$.

   (ii) $f[\bigcap_{i\in I} A_i] \subseteq \bigcap_{i\in I} f[A_i]$. Να εξετάσετε πότε ισχύει η ισότητα.

   (iii) $f^{-1}[\bigcup_{i\in I} B_i] = \bigcup_{i\in I} f^{-1}[B_i]$.

   (iv) $f^{-1}[\bigcap_{i\in I} B_i] = \bigcap_{i\in I} f^{-1}[B_i]$.

9. Έστω f ισομορφισμός (ομοιότητας) μεταξύ των μερικώς διατεταγμένων συνόλων $\langle A, \preccurlyeq_A\rangle$ και $\langle B, \preccurlyeq_B\rangle$. Έστω $a \in A$. Να δείξετε ότι αν το a είναι ελαχιστικό (αντ. ελάχιστο, μεγιστικό, μέγιστο) στο A ως προς $\preccurlyeq_A$, τότε το $f(a)$ είναι ελαχιστικό (αντ. ελάχιστο, μεγιστικό, μέγιστο) στο B ως προς $\preccurlyeq_B$. Κατόπιν, να δείξετε ότι αν η $\preccurlyeq_A$ είναι γραμμική, τότε και η $\preccurlyeq_B$ είναι γραμμική.

10. Έστω $\langle A, \preccurlyeq_A\rangle$ και $\langle B, \preccurlyeq_B\rangle$ μερικώς διατεταγμένα σύνολα. Έστω συνάρτηση $f : A \longrightarrow B$ τέτοια ώστε:

$$(\forall x \in A)\,(\forall y \in A)\,(x \preccurlyeq_A y \longleftrightarrow f(x) \preccurlyeq_B f(y))\,.$$

Να δείξετε ότι η f είναι 1-1.

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΑΛΜΑ

Θεωρια Συνολων

Χειμερινο Εξαμηνο 2022 – 2023

2η σειρά ασκήσεων

Προθεσμία: 5 Δεκεμβρίου 2022

1. Να δείξετε ότι ισχύουν τα ακόλουθα:

   (i) $\omega \notin \omega$ (με άλλα λόγια, το ω δεν είναι φυσικός αριθμός).

   (ii) Για κάθε $n \in \omega$, ισχύει $\omega \notin n$.

   (iii) Για κάθε $n \in \omega$, το n δεν είναι επαγωγικό.

   (iv) Το σύνολο $\omega \cup \{\omega\}$ δεν είναι φυσικός αριθμός.

   (v) Το σύνολο $\omega \cup \{\omega\}$ είναι μεταβατικό αλλά όχι επαγωγικό.

2. Θεωρήστε το σύνολο $\mathcal{P}(\omega)$, δηλαδή το δυναμοσύνολο του συνόλου των φυσικών αριθμών. Να δείξετε τα ακόλουθα:

   (i) Το σύνολο $\mathcal{P}(\omega)$ δεν είναι φυσικός αριθμός.

   (ii) Το σύνολο $\mathcal{P}(\omega)$ δεν είναι επαγωγικό.

   (iii) $\omega \subseteq \mathcal{P}(\omega)$.

   (iv) $\mathcal{P}(\omega)\backslash\omega \neq \varnothing$. Μάλιστα, να δώσετε δύο παραδείγματα (διαφορετικών) συνόλων που να ανήκουν στο $\mathcal{P}(\omega)\backslash\omega$.

3. Έστω σύνολο X. Να δείξετε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

   (i) Το X είναι μεταβατικό (δηλαδή, αν $b \in a \in X$, τότε $b \in X$).

   (ii) $X \subseteq \mathcal{P}(X)$.

   (iii) $\bigcup X \subseteq X$.

4. Έστω σύνολο X. Για καθένα από τα παρακάτω, να δώσετε απόδειξη ή αντιπαράδειγμα.

   (i) Αν το X είναι μεταβατικό, τότε και το $\bigcup X$ είναι μεταβατικό.

   (ii) Αν το $\bigcup X$ είναι μεταβατικό, τότε και το X είναι μεταβατικό.

   (iii) Αν κάθε $a \in X$ είναι μεταβατικό, τότε και το X είναι μεταβατικό.

   (iv) Αν το X είναι μεταβατικό, τότε και κάθε $a \in X$ είναι μεταβατικό.

   (v) Αν κάθε $a \in X$ είναι μεταβατικό, τότε και το $\bigcup X$ είναι μεταβατικό.

   (vi) Αν το X είναι μεταβατικό, τότε και το $\mathcal{P}(X)$ είναι μεταβατικό.

   (vii) Αν το $\mathcal{P}(X)$ είναι μεταβατικό, τότε και το X είναι μεταβατικό.

5. Να ολοκληρώσετε την απόδειξη της Πρότασης 7, επιβεβαιώνοντας ότι το σύνολο:

$$S = \{n \in \omega : n = 0 \lor (\exists m)(n = m^+)\}$$

είναι επαγωγικό.

6. Να αποδείξετε ότι, για κάθε φυσικούς αριθμούς $m, n \in \omega$, ισχύουν τα ακόλουθα:

   (i) $m < n \longleftrightarrow m^+ \leqslant n$

   (ii) $m < n \longleftrightarrow m^+ < n^+$

   (iii) $m < n^+ \longleftrightarrow m \leqslant n$

   (iv) $m \leqslant n^+ \longleftrightarrow (m \leqslant n \lor m = n^+)$

7. Να αποδείξετε ότι, για κάθε φυσικούς αριθμούς $k, m, n \in \omega$, ισχύουν τα ακόλουθα:

   (i) $(m + n) \cdot k = m \cdot k + n \cdot k$ (Επιμεριστική από τα δεξιά)

   (ii) $0 \cdot m = 0$

   (iii) $m^+ = m + 1$

   (iv) $1 \cdot m = m$

   (v) $m \cdot n = n \cdot m$

   (vi) $k \cdot (m + n) = k \cdot m + k \cdot n$ (Επιμεριστική από τα αριστερά)

   (vii) $k + m = k + n \longrightarrow m = n$

8. Να αποδείξετε ότι, για κάθε φυσικούς αριθμούς $k, m, n \in \omega$, ισχύουν τα ακόλουθα:

   (i) $k \cdot (m \cdot n) = (k \cdot m) \cdot n$

   (ii) $m < n \longrightarrow m + k < n + k$

   (iii) $m < n \longrightarrow m \cdot k < n \cdot k$ (για $k \neq 0$)

   (iv) $k \cdot m = k \cdot n \longrightarrow m = n$ (για $k \neq 0$)

9. Να αποδείξετε την Πρόταση 13. Δηλαδή, να δείξετε ότι, για κάθε $m, n \in \omega$, ισχύουν τα ακόλουθα:

   (i) $m \leqslant n \longleftrightarrow (\exists k \in \omega)(m + k = n)$

   (ii) $m < n \longleftrightarrow (\exists k \in \omega)(k \neq 0 \land m + k = n)$

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΑΛΜΑ

Θεωρία Συνόλων

Χειμερινό Εξάμηνο 2022 – 2023

3η σειρά ασκήσεων

Προθεσμία: 9 Ιανουαρίου 2023

1. Δεδομένης της Αρχής του Περιστερώνα για τους φυσικούς αριθμούς (δηλαδή, δεδομένου του ότι για κάθε $n \in \omega$ και για κάθε συνάρτηση $f : n \longrightarrow n$, αν η f είναι 1-1 τότε η f είναι και επί του n), να δείξετε τη γενίκευση αυτής της αρχής σε κάθε πεπερασμένο σύνολο. Με άλλα λόγια, να δείξετε ότι για κάθε πεπερασμένο σύνολο A και για κάθε $f : A \longrightarrow A$, αν η f είναι 1-1 τότε η f είναι και επί του A.

2. Έστω A ένα πεπερασμένο σύνολο πεπερασμένων συνόλων. Να δείξετε ότι το $\bigcup A$ είναι πεπερασμένο.

3. Θυμηθείτε ότι, για κάθε σύνολο A, θέτουμε:

$$^{A}\{0,1\} = \{f \mid f : A \longrightarrow \{0,1\}\}$$

δηλαδή το $^{A}\{0,1\}$ είναι το σύνολο όλων των συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το A και τιμές στο $\{0,1\}$. Να δείξετε ότι, για κάθε σύνολο A, ισχύει ότι $\mathcal{P}(A) \sim {}^{A}\{0,1\}$.

4. Ορίζουμε τη συνάρτηση $F : {}^{\omega}\{0,1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ ως εξής. Για κάθε $\alpha \in {}^{\omega}\{0,1\}$, όπου η άπειρη δυαδική ακολουθία α είναι της μορφής $\alpha = (a_n)_{n\in\omega}$, με $a_n \in \{0,1\}$ για κάθε $n \in \omega$, θέτουμε:

$$F(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2a_n}{3^{n+1}}$$

Αρχικά, να δείξετε ότι η συνάρτηση F είναι καλώς ορισμένη. Κατόπιν, να δείξετε ότι η F είναι 1-1 συνάρτηση από το σύνολο $^{\omega}\{0,1\}$ στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.

Παρατήρηση: σε αυτήν την άσκηση, θεωρούμε το γνώριμο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών που χρησιμοποιείται στην ανάλυση, ξεχνώντας στιγμιαία το συνολοθεωρητικό του ανάλογο που ορίσαμε (μέσω των τομών Dedekind) στο μάθημα. Αυτή η στιγμιαία αλλαγή οπτικής γίνεται για λόγους διευκόλυνσης και δεν παρουσιάζει κανένα ουσιαστικό πρόβλημα.

Ωστόσο, και για δική σας εξάσκηση αφού λύσετε την άσκηση, σκεφτείτε το πώς θα έπρεπε να οριστεί η συνάρτηση $F : {}^{\omega}\{0,1\} \longrightarrow \mathbb{R}$, αν το σύμβολο «$\mathbb{R}$» αναφέρεται στο σύνολο των πραγματικών αριθμών όπως αυτό ορίστηκε στο μάθημα, δηλαδή μέσω τομών Dedekind. Με άλλα λόγια, σκεφτείτε το σε ποια τομή Dedekind πρέπει να στείλουμε το τυχόν στοιχείο $\alpha \in {}^{\omega}\{0,1\}$ ώστε η συνάρτηση F να είναι 1-1. Προφανώς, η ιδέα είναι ανάλογη.

5. Έστω $\mathbb{R}$ να είναι και πάλι το γνώριμο σύνολο των πραγματικών αριθμών και έστω $x, y \in \mathbb{R}$ με $x < y$. Να αποδείξετε τις παρακάτω ισοπληθικότητες, ορίζοντας κατάλληλες αμφιμονοσήμαντες απεικονίσεις (δηλαδή, συναρτήσεις 1-1 και επί):

   (i) $(0,1) \sim (0,1]$

   (ii) $(x,y) \sim (0,1]$

   (iii) $(0,1) \sim \mathbb{R}$

6. Να δείξετε ότι, για κάθε σύνολα A, B, C και D:

$$(\, A \sim C \,\wedge\, B \sim D\,) \longrightarrow A \times B \sim C \times D$$

7. (i) Να υπολογίσετε τους πληθαρίθμους των συνόλων: ${}^{10}\omega\,, {}^{\omega}10\,, {}^{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ και ${}^{\mathbb{Q}^2}\{2n : n \in \omega\}\,.$

   Χρησιμοποιώντας πληθική αριθμητική να δείξετε τα ακόλουθα:

   (ii) $|{}^{\omega}\omega| = |{}^{\omega}\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$

   (iii) $|{}^{\mathbb{R}}\omega| = |{}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}| = 2^{\mathfrak{c}}$

8. Να δείξετε ότι, για όλους τους πληθαρίθμους κ, λ και μ, ισχύουν τα ακόλουθα:

   (i) $\kappa^{(\lambda+\mu)} = \kappa^{\lambda} \cdot \kappa^{\mu}$

   (ii) $(\kappa \cdot \lambda)^{\mu} = \kappa^{\mu} \cdot \lambda^{\mu}$

   (iii) $(\kappa^{\lambda})^{\mu} = \kappa^{\lambda \cdot \mu}$

   (iv) $\lambda \leqslant \mu \longrightarrow \kappa^{\lambda} \leqslant \kappa^{\mu}$, για $\kappa \neq 0$.

   Τι γίνεται στην (iv) στην περίπτωση που $\kappa = 0$;

9. Έστω $\langle A, < \rangle$ καλά διατεταγμένο σύνολο και έστω στοιχείο $a \in A$. Να δείξετε ότι αν το a δεν είναι μέγιστο του A, τότε υπάρχει $a^* \in A$ το οποίο είναι το (μοναδικό) αμέσως επόμενο του a (ως προς τη διάταξη $<$).

10. Έστω $\langle A, < \rangle$ καλά διατεταγμένο σύνολο και έστω $B \subsetneq A$ ένα γνήσιο αρχικό τμήμα του $\langle A, < \rangle$. Να δείξετε ότι υπάρχει στοιχείο $a \in A$ τέτοιο ώστε $B = A_a$, όπου A_a το γνήσιο αρχικό τμήμα που ορίζεται από το στοιχείο a, δηλαδή το σύνολο $\{x \in A : x < a\}$.

11. Έστω $\langle A, <_A \rangle$ και $\langle B, <_B \rangle$ γραμμικά διατεταγμένα σύνολα τα οποία είναι όμοια. Με άλλα λόγια, υπάρχει $f : A \xrightarrow[\text{επί}]{\text{1-1}} B$ που είναι ισομορφισμός ομοιότητας, δηλαδή, για κάθε $x, y \in A$:

$$x <_A y \longleftrightarrow f(x) <_B f(y)$$

Να δείξετε ότι αν το $\langle A, <_A \rangle$ είναι καλά διατεταγμένο τότε και το $\langle B, <_B \rangle$ είναι καλά διατεταγμένο.

Οι παρακάτω ασκήσεις είναι (ακόμα πιο) προαιρετικές.

A. Έστω X το σύνολο των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$, όπου το κλειστό διάστημα $[0,1]$ καθώς και η έννοια της συνέχειας αναφέρονται, και πάλι, στο γνώριμο σύνολο των πραγματικών αριθμών της ανάλυσης. Να δείξετε ότι $|X| = 2^{\aleph_0}$.

Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε οποιαδήποτε σχετική (ή «άσχετη») μαθηματική γνώση θέλετε.

B. Υποθέτουμε, κάπως διαισθητικά προς το παρόν, ότι στο (συνολοθεωρητικό) σύμπαν κάθε σύνολο έχει πληθικότητα και ότι υπάρχουν σύνολα οποιασδήποτε πληθικότητας (σε επόμενες διαλέξεις αυτό θα γίνει σαφές και επίσημο). Υπό αυτήν την υπόθεση, διαλέξτε οποιαδήποτε μαθηματική δομή της αρεσκείας σας (π.χ., τοπολογικό χώρο, χώρο Banach, αβελιανή ομάδα, πεπερασμένο αυτόματο, μηχανή Turing κλπ.) και σκεφτείτε/περιγράψτε το πώς μπορούμε να την απεικονίσουμε (πιστά και λειτουργικά) μέσα στο σύμπαν της συνολοθεωρίας.