\- Μάθημα 6ο: Χώροι Banach: Τύποι

▷ <u>Λήμμα 1ο:</u> Έστω X χώρος με νόρμα και $A \subseteq X^*$ με $0 \in \overline{A}^{w^*}$ και $0 \notin \overline{A}^{\|\cdot\|_{X^*}}$. Έστω τώρα $Y \subset_{\kappa} X$ πεπερασμένης διάστασης. Τότε: $\forall \varepsilon > 0: \exists x^* \in A: \forall y^* \in Y, \forall \lambda \in \mathbb{R}$:

$\|y^*\| \leq (1+\varepsilon)\|y^* + \lambda x^*\|$.

\- <u>Απόδειξη:</u> Αφού αρχικά $0 \notin \overline{A}^{\|\cdot\|}$ έπεται ότι υπάρχει $a > 0$: τέτοιο ώστε: $\|x^*\| \geq a, \forall x^* \in A$ (Έχουμε ότι αφού $0 \notin \overline{A}^{\|\cdot\|}$ έπεται ότι: $\exists a > 0: B_{d_{\|\cdot\|}}(0,a) \cap A = \emptyset \Rightarrow \exists a > 0$: $\|x^*\| \geq a, \forall x^* \in A$). Τώρα παρατηρούμε ότι αν πάρουμε $\varepsilon > 0$ και θέσουμε:

$\bar{\varepsilon} = \dfrac{\varepsilon a}{4(a+1)} > 0$ τότε αφού ο Y είναι πεπερασμένης διάστασης έπεται ότι S_Y είναι συμπαγής και άρα υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ και $y_1^*, \dots, y_n^* \in S_Y$ τέτοια ώστε να [redacted] είναι το σύνολο $\{y_1^*, \dots, y_n^*\}$ ε-πυκνό (Δηλαδή: $\forall y^* \in S_Y: \exists i_0 \in [n]: \|y^* - y_{i_0}^*\| < \bar{\varepsilon}$). Τώρα παρατηρούμε ότι: αν επιλέξουμε $x_1, \dots, x_n \in S_X$ τέτοια ώστε: $y_i^*(x_i) > 1 - \bar{\varepsilon}$ αφού: $\|y_i^*\| = \sup\{y_i^*(x): \|x\| \leq 1\}$. Αφού τώρα έχουμε ότι: 0 [redacted] $\in \overline{A}^{w^*}$ έπεται ότι: $A \cap W(0, x_1, \dots, x_n, \bar{\varepsilon}) \neq \emptyset$ και άρα: $\exists x^* \in A \cap W(0, x_1, \dots, x_n, \bar{\varepsilon})$.

Τότε όμως έχουμε ότι: $\forall i \in \{1, \dots, n\}: |x^*(x_i)| < \bar{\varepsilon}$ και $x^* \in A$. Τώρα παρατηρούμε ότι αν πάρουμε $y^* \in$ [redacted] S_Y (αν το αποδείξουμε για την σφαίρα του Y τότε όμοια με νορμαλοποίηση του πολλαπλού του στοιχείου το περνάμε σε οποιοδήποτε στοιχείο του Y), τότε έχουμε ότι: <u>1η περίπτωση:</u> αν πάρουμε $\lambda \in \mathbb{R}$ με $|\lambda| \geq \frac{2}{a}$: τότε: $\|y^* + \lambda x^*\| \geq \|\lambda x^*\| - \|y^*\|$ $= |\lambda| \|x^*\| - \|y^*\| = |\lambda| \|x^*\| - 1 \geq \frac{2}{a} \cdot a - 1 = 1 = \|y^*\|$. <u>2η περίπτωση:</u> αν πάρουμε $\lambda \in \mathbb{R}$ με $|\lambda| < \frac{2}{a}$: $\|y^* + \lambda x^*\| \geq \|y_{i}^* + \lambda x^*\| - \|y^* - y_{i}^*\| > \|y_{i}^* + \lambda x^*\| - \bar{\varepsilon} > (y_{i}^* + \lambda x^*)(x_{i}) - \bar{\varepsilon}$ $= y_{i}^*(x_{i}) + \lambda x^*(x_{i}) - \bar{\varepsilon} > 1 - \bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon} - |\lambda| |x^*(x_{i})| = 1 - 2\bar{\varepsilon} - |\lambda| a > 1 - \underbrace{\bar{\varepsilon}\left(2 + \frac{2}{a}\right)}_{\leq \frac{\varepsilon}{2}} \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2} \geq \frac{1}{1+\varepsilon}$ $= \dfrac{\|y^*\|}{1+\bar{\varepsilon}}$ και άρα έχουμε το ζητούμενο.

- Έστω (X,τ) τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$. Τότε: $x \in \overline{A} \iff \forall u \in N_x: u \cap A \neq \emptyset$
- Για την ασθενή $*$ τοπολογία του $(X^*, \hat{X})$ έχουμε ότι [redacted] $\forall x^* \in X^*$ βάση περιοχών του x^* είναι το $\{W(x^*, x_1, \dots, x_n, \varepsilon) : n \in \mathbb{N}, x_1, \dots, x_n \in X, \varepsilon > 0\}$ όπου: $W(x^*, x_1, \dots, x_n, \varepsilon) = \{y \in X^* : |x^*(x_i) - y^*(x_i)| < \varepsilon, \forall i = 1, \dots, n\}$

▸ <u>Θεώρημα:</u> Έστω X χώρος με νόρμα και $A \subseteq X^*$ με $0 \in \overline{A}^{w^*}$ και $0 \notin \overline{A}^{\|\cdot\|_{X^*}}$. Τότε έχουμε ότι: $\forall \varepsilon > 0$: υπάρχει ακολουθία $(x_n)_{n \geq 1} \in A^{\mathbb{N}}$ τέτοια ώστε αυτή να είναι Schauder βασική και $bc((x_n)_{n\geq 1}) \leq 1 + \varepsilon$.

- <u>Απόδειξη:</u> Όμοια με την απόδειξη του θεωρήματος Mazur.

▸ <u>Πόρισμα:</u> Έστω X χώρος με νόρμα και $A \subseteq X$ με $0 \in \overline{A}^{w}$ και $0 \notin \overline{A}^{\|\cdot\|_X}$. Τότε: $\forall \varepsilon > 0$: υπάρχει ακολουθία $(x_n)_{n \geq 1} \in A^{\mathbb{N}}$ η οποία είναι Schauder βασική ακολουθία και $bc((x_n)_{n \geq 1}) \leq 1 + \varepsilon$.

- <u>Υπόδειξη:</u> $0_{X^{**}} = \hat{0_X} \notin \overline{\hat{A}}^{\|\cdot\|_{X^{**}}}$ και 0[redacted]$_{X^{**}} \in \overline{\hat{A}}^{w^*}$ και αυτό ισχύει γιατί:

$0_{X^{**}} = \hat{0_X} \in \overline{\hat{A}}^{w} = \overline{\hat{A}}^{w^*} \cap \hat{X} \leftarrow$ <u>σημαντική παρατήρηση</u>

▸ <u>Λήμμα 2ο:</u> Έστω X χώρος Banach και $(x_n)_{n\geq 1}$ Schauder βασική ακολουθία. Υποθέτουμε ότι: $\exists x^* \in X^*: x^*(x_n) = 1, \forall n \in \mathbb{N}$. Αν $u \notin \overline{\langle x_n : n \geq 1 \rangle}$ τότε η $(u + x_n)_{n \geq 1}$ είναι Schauder βασική ακολουθία του X.

- <u>Απόδειξη:</u> Έστω αρχικά ότι $u \notin \overline{\langle x_n : n \geq 1\rangle}$. Έστω τώρα: $z^* \in X^*$ με: $z|_{\overline{\langle x_n : n \geq 1\rangle}} = 0$ και $z^*($[redacted]$u) = x^*(u)$ και τότε θεωρούμε το: $y^* = -z^* + x^*$ και έχουμε ότι: $y^*(u) = 0$ και $y^*(x_n) = 1, \forall n \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε τώρα τον $T : X \to X$ με $T(x) = u\, y^*(x)$ και τότε παρατηρούμε ότι ο T είναι προφανώς γραμμικός αφού $y^* \in X^*$ και επίσης έχουμε ότι είναι και φραγμένος αφού: $\forall x \in X$: $\|T(x)\| = \|u\, y^*(x)\| = |y^*(x)|\,\|u\| \leq \|y^*\|\|x\|\|u\|$ και άρα: $\|T\| \leq \|y^*\|\|u\| < +\infty$ αφού $y^* \in X^*$. Τώρα έχουμε ότι και $T^2 = 0$ με απλό έλεγχο. Τώρα θεωρούμε τον: $R : X \to X$ με $R = Id_X$[redacted]T και έχουμε ότι $R \in B(X)$ αφού $Id_X, T \in B(X)$ και ο $B(X)$ είναι διανυσματικός χώρος. Επίσης παρατηρούμε ότι: $R^{-1} = Id_X - T$ και άρα και ο R^{-1} είναι φραγμένος και γραμμικός τελεστής και άρα ο R είναι ισομορφισμός με $R(x_n) = x_n + T(x_n) = x_n + u\, y^*(x_n) = x_n + u$

και άρα αφού $(x_n)_{n\geq 1}$ είναι Schauder βασική ακολουθία του X έπεται ότι και
η $(x_{n+k})_{n\geq 1}$ είναι Schauder βασική ακολουθία του X.

▸ **Λήμμα 3ο:** Έστω X χώρος Banach και $(x_n)_{n\geq 1}$ μια Schauder βασική ακολουθία του X. Έστω x και τω-σημείο συσσώρευσης της $(x_n)_{n\geq 1}$ ($\forall U$ τω-ανοικτό το $\{n\in\mathbb{N} : x_n \in U\}$ είναι άπειρο). Τότε: $x=0$.

– **Απόδειξη:** Έχουμε αρχικά ότι: $x \in \overline{\{x_n : n\in\mathbb{N}\}}^{w} \subseteq \overline{\langle x_n : n\geq 1\rangle}^{w} \underset{\text{κυρτό}}{\overset{\text{Mazur}}{=}} \overline{\langle x_n : n\geq 1\rangle}^{\|\cdot\|}$ και άρα: $x=\sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x)x_n$. Καθώς τώρα: $\forall k\in\mathbb{N}$: x_k^* είναι συνεχής ως προς την τω έπεται ότι: $\forall k\in\mathbb{N}$ το $x_k^*(x)$ είναι σημείο συσσώρευσης της $(x_k^*(x_n))_{n\geq 1}$ με: $x_k^*(x_n)\to 0$ ως σταθερή τελικά και ίση με 0. Άρα: $x_k^*(x)=0$, $\forall k\in\mathbb{N} \Longrightarrow x=0$

– Έστω (X,τ), (Y,τ') τοπολογικοί χώροι και $f:(X,\tau)\to(Y,\tau')$ συνεχής. Αν $x\in X$ είναι σημείο συσσώρευσης μιας ακολουθίας $(x_n)_{n\geq 1}\in X^{\mathbb{N}}$ τότε το $f(x)$ είναι σημείο συσσώρευσης της $(f(x_n))_{n\geq 1}\in Y^{\mathbb{N}}$. Πράγματι: έστω: $V\in\mathcal{N}_{f(x)}$ και τότε: $f(x)\in V^{\circ}$ $\Longrightarrow$ [redacted] $x\in f^{-1}(V^{\circ})$ = ανοικτό και άρα: $W=f^{-1}(V^{\circ})\in\mathcal{N}_x$ και αφού η $(x_n)_{n\geq 1}$ έχει σ.σ το x έπεται ότι: $\{n\in\mathbb{N} : x_n\in W\}$ είναι άπειρο $\Longrightarrow \{n\in\mathbb{N} : f(x_n)\in V^{\circ}\subseteq V\}$ είναι άπειρο και άρα έχουμε το ζητούμενο.

– **Θεώρημα Mazur:** Κάθε κλειστό και κυρτό σε έναν χώρο Banach X είναι [redacted] ασθενώς κλειστό.

▸ **Θεώρημα:** (Kadet - Pełczyński): Έστω X χώρος Banach και $A\subseteq X$ φραγμένο και τέτοιο ώστε: $0\notin\overline{A}^{\|\cdot\|_X}$. Τα εξής είναι ισοδύναμα:

1. Το A δεν περιέχει Schauder βασική ακολουθία
2. $0\notin\overline{A}^{w}$ και $\overline{A}^{w}$ τω-συμπαγές

- Απόδειξη:

- 2 ⇒ 1. Προς άτοπον έστω ότι: υπάρχει $(x_n)_{n\geq 1} \in A^{\mathbb{N}}$ Schauder βασική ακολουθία. Τότε: $\overline{\{x_n : n\geq 1\}}^{w} \subseteq \overline{A}^{w}$ w-συμπαγές και άρα: $\overline{\{x_n : n\geq 1\}}^{w}$ είναι w-συμπαγές και άρα απ' αυτό έπεται ότι $\exists\, x$ τw-σημείο συσσώρευσης της $(x_n)_{n\geq 1}$ και άρα $x=0$ από το λήμμα 3ο που αποδείξαμε πριν. Τότε όμως: $0\in\overline{A}^{w}$ και άρα άτοπο από την υπόθεση 2. ($0\in\overline{A\setminus\{0\}}^{w}\subseteq\overline{A}^{w}$)

~~(Παρατηρούμε ότι το σύνολο A' που είναι το σύνολο των σημείων συσσώρευσης ενός συνόλου A έχουμε ότι: $A' = A\setminus\{x\}$~~

(Ένα σημείο x είναι σημείο συσσώρευσης του $A\subseteq X$ όπου (X,τ) τ.χ. εάν και μόνο εάν $x\in\overline{A\setminus\{x\}}$ και άρα εάν και μόνο εάν: $\forall U\in\mathcal{U}_x$: $U\cap(A\setminus\{x\})\neq\emptyset$)

- 1 → 2. Υποθέτουμε προς άτοπον ότι: $0\in\overline{A}^{w}$ και τότε αφού από υπόθεση έχουμε ότι: $0\notin\overline{A}^{\|\cdot\|}$ έπεται από προηγούμενο λήμμα ότι το A έχει Schauder βασική ακολουθία το οποίο είναι άτοπο από υπόθεση 1. Τώρα αρκεί να αποδείξουμε ότι το $\overline{A}^{w}$ είναι τw-συμπαγές. Τώρα παρατηρούμε ότι: $\hat{A}$ είναι η εικόνα του A μέσω της εμφύτευσης: $\wedge : X\to X^{**}$ του X μέσα στον X^{**} και έχουμε ότι: $\hat{A}\subseteq\hat{X}\subset X^{**}$. Τώρα από Alaoglu έχουμε ότι $(B_{X^{**}},\tau_{w^*})$ είναι τw*-συμπαγής και αφού το A είναι φραγμένο έχουμε ότι: $\overline{\hat{A}}^{w^*}$ είναι τw*-συμπαγές αφού η $\wedge$ είναι ισομετρική εμφύτευση και άρα το $\overline{\hat{A}}^{w^*}$ είναι και αυτό φραγμένο, και άρα: $\exists\, r>0$: $\overline{\hat{A}}^{w^*}\subseteq B_{X^{**}}(0,r) = rB_{X^{**}}$ = τw*-συμπαγές. Επίσης έχουμε ότι: $\overline{\hat{A}}^{w} = \overline{\hat{A}}^{w^*}\cap\hat{X}$ από παρατήρηση [redacted] και άρα: $\overline{\hat{A}}^{w} = \overline{\hat{A}}^{w^*}\cap\hat{X}\subseteq\overline{\hat{A}}^{w^*}$ και άρα για να αποδείξουμε το ζητούμενο ουσιαστικά αρκεί να αποδείξουμε ότι $\overline{\hat{A}}^{w}$ [redacted] $=\overline{\hat{A}}^{w^*}$. Υποθέτουμε προς άτοπον ότι: $\exists\, x^{**}\in\overline{\hat{A}}^{w^*}$ αλλά: $x^{**}\notin\overline{\hat{A}}^{w}$ και άρα τότε έχουμε ότι: $x^{**}\in X^{**}\setminus\hat{X}$. Θέτουμε $B=\hat{A}-x^{**}=\{\hat{y}-x^{**} : y\in A\}$ και τότε $0\in\overline{B}^{w^*}$ αφού: $x^{**}\in\overline{\hat{A}}^{w^*}$ αλλά: $0\notin\overline{B}^{\|\cdot\|_{X^{**}}}$ γιατί: [redacted] $\notin\overline{\hat{A}}^{\|\cdot\|_{X^{**}}}$ γιατί: $x^{**}\notin\underbrace{\hat{X}=\overline{\hat{X}}^{\|\cdot\|_{X^{**}}}}_{\text{κλειστός}}\supseteq\overline{\hat{A}}^{\|\cdot\|_{X^{**}}}$.

Άρα απ' αυτό έπεται ότι υπάρχει $(x_n^{**})_{n\geq 1} \in B^{\mathbb{N}}$ Schauder βασική ακολουθία $\Rightarrow \exists\, (x_n)_{n\geq 1} \in A^{\mathbb{N}}$ τ.ω: $x_n^{**} = \hat{x}_n - x^{**}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Τώρα: $\hat{X} \hookrightarrow X^{**}$ και ο $\hat{X}$ είναι κλειστός και άρα: $\exists\, x^{***} \in X^{***}$: $x^{***}|_{\hat{X}} = 0$ και άρα: $x^{***}(\hat{x}_n) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ και $x^{***}(x^{**}) = -1$. Άρα έχουμε ότι: $x^{***}(x_n^{**}) = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Άρα τώρα παίρνοντας σε ουρά της $(x_n^{**})_{n\geq 1}$ μπορούμε να υποθέσουμε ότι: $\overline{\langle x_n^{**} : n \geq 1 \rangle} \not\ni x^{**}$ ■ γιατί: έχουμε ότι αν $x^{**} \in \overline{\langle x_n^{**} : n \geq 1 \rangle}$ τότε: $x^{**} = \sum_{n=1}^{\infty} e_n(x^{**})\, x_n^{**}$

Άρα επομένως έχουμε ότι η $(\hat{x}_n)_{n\geq 1}$ είναι Schauder βασική ακολουθία του $\hat{A}$ από το λήμμα που αποδείξαμε αφού: $\hat{x}_n = x_n^{**} + x^{**}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ και άρα η $(x_n)_{n\geq 1}$ είναι Schauder βασική ακολουθία του A αφού $\wedge$ είναι ισομετρική εμφύτευση. Επομένως έχουμε το ζητούμενο. ($\wedge|_A : A \longrightarrow \hat{A}$ είναι ισομετρικός ισομορφισμός).