- Μάθημα 8ο: Χώροι Banach: Τύπος:

▸ <u>Κλασικοί Ακολουθιακοί Χώροι:</u>

1. $\ell_p = \{ (a_n)_{n\geq 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_n |a_n|^p < +\infty \}$ για $1 \leq p < +\infty$ και τότε αυτόν τον εφοδιάζουμε με την $\|\cdot\|_p$ όπου: $\|(a_n)_{n\geq 1}\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p \right)^{1/p}$ και τότε αυτός γίνεται χώρος Banach

2. $c_0 = \{ (a_n)_{n\geq 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : a_n \to 0 \}$ [redacted] και τον εφοδιάζουμε με την $\|\cdot\|_\infty$ όπου: $\|(a_n)_{n\geq 1}\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$ και τότε αυτός γίνεται χώρος Banach.

- Και οι 2 παραπάνω χώροι έχουν Schauder βάση την $(e_n)_{n\geq 1}$ όπου: $e_n = (0, \ldots, 1, 0, 0, \ldots)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

- <u>Πρόταση:</u> Έστω $X = c_0$ ή $X = \ell_p$ με $1 \leq p < +\infty$ και έστω και $(x_n)_{n\geq 1} \trianglelefteq (e_n)_{n\geq 1}$, νορμαρισμένη (δηλαδή: $\|x_n\| = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$). Τότε έχουμε ότι:

(a). Η $(x_n)_{n\geq 1}$ είναι ισομετρικά ισοδύναμη με την $(e_n)_{n\geq 1}$ (σταθερές $c = C = 1$).

(β). $\overline{\langle x_n : n\geq 1 \rangle}$ είναι συμπληρωματικός υπόχωρος και μάλιστα υπάρχει $P : X \to \overline{\langle x_n : n \geq 1 \rangle}$ γραμμική προβολή με $\|P\| = 1$.

- <u>Απόδειξη:</u> Αρχικά έχουμε ότι αφού $(x_n)_{n\geq 1}$ είναι block υπακολουθία της $(e_n)_{n\geq 1}$ έχουμε ότι αν $\forall n \in \mathbb{N}$ ορίσουμε: $F_n = \text{supp}_{(e_n)_{n\geq 1}}(x_n)$ τότε αν $(a_n)_{n\geq 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ είναι τέτοια ώστε: $x_n = \sum_{j\in F_n} a_j e_j$ τότε παρατηρούμε ότι αν $X = \ell_p$ τότε έχουμε ότι: αν πάρουμε $m \in \mathbb{N}$ και $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ τότε έχουμε ότι: $\left\| \sum_{n=1}^{m} \lambda_n x_n \right\|_p = \left\| \sum_{n=1}^{m} \lambda_n \sum_{j\in F_n} a_j e_j \right\|$

$$= \left\| \sum_{n=1}^{m} \sum_{j\in F_n} \lambda_n a_j e_j \right\|_p \overset{F_n \text{ ξένα}}{=} \left(\sum_{n=1}^{m} \sum_{j\in F_n} |\lambda_n a_j|^p \right)^{1/p} = \left(\sum_{n=1}^{m} |\lambda_n|^p \sum_{j\in F_n} |a_j|^p \right)^{1/p} =$$

$$\left(\sum_{n=1}^{m} |\lambda_n|^p \right)^{1/p} = \left\| \sum_{n=1}^{m} \lambda_n e_n \right\|_p$$ και άρα έχουμε ότι αυτές είναι $\underset{\|x_n\|_p = 1}{\|}$ ισοδύναμες με σταθερές ισοδυναμίας τις $c = C = 1 > 0$. Τώρα για $X = c_0$: έπεται ότι αφού: $\|x_n\|_\infty = \max_{j\in F_n} |a_j| = 1 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : \exists j_n \in F_n : |a_{j_n}| = 1$ και αφού τα F_n είναι ξένα έπεται ότι: $j_n \neq j_m$ $\forall n, m \in \mathbb{N}$ με $n \neq m$ και χρησιμοποιώντας αυτό το γεγονός έχουμε το ζητούμενο.

– (β). Τώρα $\forall n\in\mathbb{N}$:

Θεωρούμε την: $P_n: X \longrightarrow \langle (e_j$[redacted]$)_{j\in F_n}\rangle$ τέτοια ώστε:

$P_n(x) = \sum_{j\in F_n} e_j^*(x)e_j$, $\forall x\in X$ και τότε κάθε P_n είναι γραμμική προβολή με $\|P_n\|=1$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Τώρα $\forall n\in\mathbb{N}$ επιλέγουμε $f_n\in S_{X^*}$ τέτοιο ώστε:

– (ε_1): $f_n(x_n)=1$, $\forall n\in\mathbb{N}$

– (ε_2): $f_n(x)=f_n(P_n(x))$

• Περίπτωση: $X=\ell_p$ με $1<p<+\infty$: $\forall n\in\mathbb{N}$ και $\forall j\in F_n$: θέτουμε: $\lambda_j=|a_j|^{p-1}\operatorname{sgn}(a_j)$ και θέτουμε $f_n=\sum_{j\in F_n}\lambda_j e_j^*$ και τότε: $f_n\in B_{X^*}$: Έστω αρχικά $b=(b_j)_{j\geq1}\in B_X\subseteq X=\ell_p$ και τότε: $|f_n((b_j)_{j\geq1})| = \cancel{\left|\sum_{j\in F_n}\lambda_j e_j^*(b_j)\right|} = \left|\sum_{j\in F_n}\lambda_j e_j^*((b_i)_{i\geq1})\right|$

$$= \left|\sum_{j\in F_n}\lambda_j b_j\right| \overset{\text{Hölder}}{\leq} \left(\sum_{j\in F_n}|\lambda_j|^q\right)^{1/q}\left(\sum_{j\in F_n}|b_j|^p\right)^{1/p} \text{[redacted]} = \|b\|_p\left(\sum_{j\in F_n}|\lambda_j|^q\right)^{1/q}$$

$$\leq \left(\sum_{j\in F_n}|a_j|^{q(p-1)}\right)^{1/q} \quad \left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \Rightarrow p-1=\text{[redacted]}\frac{p}{q} \Rightarrow q(p-1)=p\right)$$

$= \|x_n\|_p^{p/q}=1$ από υπόθεση και άρα $f_n\in B_{X^*}$ και αφού τώρα έχουμε ότι: $f_n(x_n)=\sum_{j\in F_n}\lambda_j e_j^*(x_n)=1$ και άρα: $f_n\in S_{X^*}$.

• Περίπτωση: $X=c_0$: Για κάθε $n\in\mathbb{N}$ και $\forall j\in F_n$ βρίσκουμε: $j_n\in F_n$: $|a_{j_n}|=1$ και ορίζουμε: $f_n=\operatorname{sgn}(a_{j_n})e_{j_n}^*$ και δουλεύουμε με όμοιο τρόπο.

• Περίπτωση: $X=\ell_1$: Για κάθε $n\in\mathbb{N}$ ορίζουμε: $f_n=\sum_{j\in F_n}\operatorname{sgn}(a_j)e_j^*$

– Ορίζουμε τώρα $P: X\longrightarrow \overline{\langle x_n : n\geq1\rangle}$ με $P(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)x_n$ και τώρα παρατηρούμε ότι ο P είναι καλά ορισμένος γιατί παρατηρούμε ότι αν πάρουμε $x\in X$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$[redacted]$x_n$ είναι συγκλίνουσα και αφού από το (α). η $(x_n)_{n\geq1}$ είναι ισοδύναμη της $(e_n)_{n\geq1}$ έπεται ότι αρκεί να αποδείξουμε ότι η $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)e_n$ συγκλίνει και αφού τώρα: $\|(f_n(x))_{n\geq1}\|_p = \left\|\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)e_n\right\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|^p\right)^{1/p}$

$$= \left(\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(P_n(x))|^p\right)^{1/p} \overset{\|f_n\|=1}{\leq} \left(\sum_{n=1}^{\infty}\|P_n(x)\|^p\right)^{1/p} = \left(\sum_{n=1}^{\infty}\left\|\sum_{j\in F_n}e_j^*(x)e_j\right\|^p\right)^{1/p}$$

$$= \left(\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j\in F_n}|e_j^*(x)|^p\right)^{1/p} = \left(\sum_{j\in\cup F_n}|e_j^*(x)|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty}|e_n^*(x)|^p\right)^{1/p}$$

και άρα ο P είναι καλά ορισμένος προφανώς γραμμικός και $\|P\| \leq 1$ από την παραπάνω σχέση. Τώρα παρατηρούμε ότι: $P(x_n) = x_n, \forall n \in \mathbb{N}$ και άρα: $P^2(x_n) = P(P(x_n)) = P(x_n) = x_n, \forall n \in \mathbb{N}$ και άρα η P είναι προβολή και $\|P\| = 1$ και άρα έχουμε το ζητούμενο.

- <u>Παρατήρηση:</u> Έστω $X = c_0$ ή $X = \ell_p$, $1 \leq p < +\infty$ και έστω $(x_n)_{n\geq 1} \trianglelefteq (e_n)_{n\geq 1}$ ημινορμαρισμένη, δηλαδή υπάρχουν $c, C > 0$ τέτοια ώστε: $c \leq \|x_n\| \leq C, \forall n \in \mathbb{N}$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε: $y_n = \frac{x_n}{\|x_n\|}$ και τότε: $(y_n)_{n\geq 1} \trianglelefteq (e_n)_{n\geq 1}$ αφού τα support δεν αλλάζουν και $\|y_n\| = 1, \forall n \in \mathbb{N}$, και άρα είναι νορμαρισμένη. Τότε ο γραμμικός τελεστής $T: \langle x_n : n \geq 1 \rangle \longrightarrow \langle y_n : n \geq 1 \rangle$ με: $T(x_n) = y_n$, είναι ισομορφισμός (είναι προφανώς επί) με: $\|T\| \leq C$ και $\|T^{-1}\| \leq \frac{1}{c}$ γιατί: αν πάρουμε $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$. τότε:

$$\left\| T\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i\right)\right\|_p = \left\|\sum_{i=1}^m \lambda_i T(x_i)\right\|_p = \left\|\sum_{i=1}^m \lambda_i y_i\right\|_p = \left\|\sum_{i=1}^m \lambda_i e_i\right\|_p = \left(\sum_{i=1}^m |\lambda_i|^p\right)^{1/p}$$

αφού: $(y_n)_{n\geq 1} \sim (e_n)_{n\geq 1}$ από προηγούμενη πρόταση και αφού τώρα:

$$\left\|\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i\right\|_p = \left\|\sum_{i=1}^m \lambda_i y_i \|x_i\|_p\right\|_p = \left\|\sum_{i=1}^m \lambda_i \|x_i\|_p e_i\right\|_p = \left(\sum_{i=1}^m |\lambda_i|^p \|x_i\|_p^p\right)^{1/p} \geq \left(\sum_{i=1}^m |\lambda_i|^p c^p\right)^{1/p} = c\left(\sum_{i=1}^m |\lambda_i|^p\right)^{1/p} = c\left\|T\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i\right)\right\|_p$$

$\Rightarrow$ και άρα T φραγμένος με: $\|T\| \leq \frac{1}{c}$ και επίσης έχουμε ότι:

$$\left\|\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i\right\|_p = \left(\sum_{i=1}^m |\lambda_i|^p \|x_i\|_p^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^m |\lambda_i|^p C^p\right)^{1/p} = C\left(\sum_{i=1}^m |\lambda_i|^p\right)^{1/p} = C\left\|T\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i\right)\right\|_p$$

και άρα και ο T^{-1} είναι φραγμένος και $\|T^{-1}\| \leq C$ και άρα έχουμε το ζητούμενο.(*) Επομένως από πρόταση έπεται ότι η $(x_n)_{n\geq 1}$ είναι ισοδύναμη της $(y_n)_{n\geq 1}$ όπου: $(y_n)_{n\geq 1} \sim (e_n)_{n\geq 1}$ και άρα: $(x_n)_{n\geq 1} \sim (e_n)_{n\geq 1}$. Επίσης: $\overline{\langle y_n : n\geq 1\rangle} = \overline{\langle x_n : n \geq 1\rangle}$ είναι συμπληρωματικός

(*) Η επέκταση του $T: \overline{\langle x_n : n\geq 1\rangle} \to \overline{\langle y_n : n\geq 1\rangle}$ είναι επί ισομορφισμός και τώρα εφαρμόζουμε την πρόταση.

- <u>Πρόταση:</u> Έστω $X = c_0$ ή $X = \ell_p$, με $1 \leq p < +\infty$, και έστω και $(x_n)_{n \geq 1} \in X^{\mathbb{N}}$ νορμαρισμένη τέτοια ώστε: $e_k^*(x_n) \longrightarrow 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$ ($x_n \xrightarrow{w} 0$). Τότε $\forall \varepsilon > 0$: $\exists$ υπακολουθία $(x_{k_n})_{n \geq 1}$ της $(x_n)_{n \geq 1}$ τέτοια ώστε: η $(x_{k_n})_{n \geq 1}$ να είναι $(1+\varepsilon)$ - ισοδύναμη της $(e_n)_{n \geq 1}$ ($\forall m \in \mathbb{N}$: και $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$: $\frac{1}{1+\varepsilon} \left\| \sum_{j=1}^{m} \lambda_j x_{n_j} \right\| \leq \left\| \sum_{j=1}^{m} \lambda_j e_j \right\| \leq (1+\varepsilon) \left\| \sum_{j=1}^{m} \lambda_j x_{n_j} \right\|$).

[redacted] και $\exists P: X \longrightarrow \overline{\langle x_{n_j} : j \geq 1 \rangle}$ με: $\|P\| \leq 1+\varepsilon$.

- <u>Απόδειξη:</u> Είναι άμεσο από το θεώρημα Bessaga-Pelczinski selection principle

- <u>Παρατήρηση:</u> Έστω $X = c_0$ ή $X = \ell_p$ με $1 \leq p < \infty$ και $(x_n)_{n \geq 1}$ φραγμένη τέτοια ώστε: $x_n \overset{\|\cdot\|}{\not\longrightarrow} 0$ και $e_k^*(x_n) \longrightarrow 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Τότε υπάρχει $(x_{k_n})_{n \geq 1}$ υπακολουθία της $(x_n)_{n \geq 1}$ η οποία είναι ισοδύναμη της $(e_n)_{n \geq 1}$ και μάλιστα $\forall \varepsilon > 0$: $\exists (x_{k_n})_{n \geq 1} \sim (e_n)_{n \geq 1}$ με $P: X \to \overline{\langle (x_{k_n})_{n \geq 1} \rangle}$ και $\|P\| \leq 1+\varepsilon$

(Με τροποποιήσεις έπεται από το προηγούμενο).

- <u>Παρατήρηση:</u> Έστω X, Y χώροι Banach και $T: X \to Y$ γραμμικός και φραγμένος. Τότε: $T: (X, \tau_{w_X}) \longrightarrow (Y, \tau_{w_Y})$ είναι συνεχής. Πράγματι θα αποδείξουμε ότι κάθε βάση περιοχών αντιστρέφεται σε βάση περιοχών. Τώρα παρατηρούμε ότι αν πάρουμε: $x \in X$, $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $y_1^*, \dots, y_n^* \in Y^*$: $T^{-1}(W_Y(T(x), y_1^*, \dots, y_n^*, \varepsilon)) = \{z \in X : T(z) \in W_Y(T(x), y_1^*, \dots, y_n^*, \varepsilon)\} = \{z \in X : |y_i^*(T(x)) - y_i^*(T(z))| < \varepsilon,\ \forall i = 1, \dots, n\} = \{z \in X : |T^*(y_i^*)(x) - T^*(y_i^*)(z)| < \varepsilon,\ \forall i = 1, \dots, n\} = W_X(x, T^* \circ y_1^*, \dots, T^* \circ y_n^*, \varepsilon)$ και άρα έχουμε το ζητούμενο.

- <u>Λήμμα:</u> Έστω $1 \le p < r$ και $X \hookrightarrow \ell_r$ ή $X \hookrightarrow c_0$, και $T: X \to \ell_p$ είναι γραμμικός και φραγμένος. Τότε: $\forall (x_n)_{n\ge 1} \in X^{\mathbb{N}}$ με $x_n \xrightarrow{w} 0$ έχουμε $T(x_n) \xrightarrow{\|\cdot\|_p} 0$.

- <u>Απόδειξη:</u> Έστω ότι υπάρχει $(x_n)_{n\ge1} \in X^{\mathbb{N}}$ τέτοια ώστε: $x_n \xrightarrow{w} 0$ αλλά: $T(x_n) \overset{\|\cdot\|_p}{\not\to} 0$.
Τώρα παρατηρούμε ότι αφού: $x_n \xrightarrow{w} 0$ έπεται ότι η $(x_n)_{n\ge1}$ είναι norm-φραγμένη και επίσης αφού ο T είναι φραγμένος [redacted] και η $(x_n)_{n\ge1}$ είναι φραγμένη έπεται ότι και η $(T(x_n))_{n\ge1}$ είναι φραγμένη γιατί αν: $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| = C < +\infty$ τότε αφού: $\forall n \in \mathbb{N}$: $\|T(x_n)\|_p \le \|T\| \|x_n\| \le \|T\| C$ αφού T: φραγμένος και άρα: $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T(x_n)\|_p \le \|T\| C = C' < +\infty$.
Έστω τώρα $M > 0$ τέτοιο ώστε: $\|x_n\| \le M$, $\|T(x_n)\| \le M$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Τώρα από προηγούμενη παρατήρηση ~~αφού ο T εί~~ $T(x_n) \xrightarrow{w} 0$ αφού: $x_n \xrightarrow{w} 0$ και ο T είναι φραγμένος.
Τώρα αφού: $T(x_n) \overset{\|\cdot\|_p}{\not\to} 0$ έπεται ότι: $\exists X_1 \subseteq \mathbb{N}$ άπειρο και $\delta_1 > 0$ τ.ω: $\|T(x_n)\|_p \ge \delta_1$ $\forall n \in X_1$. Καθώς τώρα $T(x_n) \overset{\|\cdot\|_p}{\not\to} 0$ έπεται ότι: $x_n \overset{\|\cdot\|_X}{\not\to} 0$ αφού ο T είναι φραγμένος. (αν $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_X} 0$ τότε: $T(x_n) \xrightarrow{\|\cdot\|_p} 0$ και άρα άτοπο) έπεται ότι: $\exists \delta_2 > 0$ [redacted] $\forall n \in X_1$: $\|x_n\|_X \ge \delta_2 = \frac{\delta_1}{\|T\|}$. Θέτουμε $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$ και τότε: $\forall n \in X_1$: $\|x_n\| \ge \delta$ και $\|T(x_n)\|_p \ge \delta$. Επίσης: $\forall n \in X_1$: $\|x_n\| \le M$, $\|T(x_n)\| \le M$. Άρα αφού τώρα η $(x_n)_{n\ge1}$ είναι ημινορμαλισμένη [redacted] και [redacted] $(x_n)_{n\in X_1} \xrightarrow{w} 0$ έπεται από προηγούμενη πρόταση ότι: $\exists X_2 \subseteq$ [redacted] X_1 άπειρο τέτοιο ώστε: $(x_n)_{n\in X_2} \sim (e_n^{\ell_r})_{n\ge1}$. Τώρα αφού: $(T(x_n))_{n\in X_2} \xrightarrow{w} 0$ και η $(T(x_n))_{n\in X_2}$ είναι ημινορμαλισμένη πάλι από προηγούμενη πρόταση έπεται ότι: $\exists X_3 \subseteq X_2$: $(T(x_n))_{n\in X_3} \sim (e_n^{\ell_p})_{n\ge1}$. Επομένως:

$(x_n)_{n\in X_3} \sim (e_n^{\ell_r})$ (υπάρχει ισομορφισμός)
$\downarrow T$
$(T(x_n))_{n\in X_3} \sim (e_n^{\ell_p})$ (υπάρχει ισομορφισμός)

και άρα υπάρχει $R: \ell_r \to \ell_p$ γραμμικός και φραγμένος τέτοιος ώστε: $R(e_n) = e_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ και άρα αυτός είναι ο ταυτοτικός τελεστής και επομένως $\ell_r \subseteq \ell_p$ και άρα άτοπο γιατί αν θεωρήσουμε την $\left(\left(\frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{p + \frac{r-p}{2}}} \right)_{n\ge1} \in \ell_r \setminus \ell_p$.

- <u>Θεώρημα Pitt</u>: Έστω $1 \leq p < r < +\infty$. Έστω τώρα $X \subset \ell_r$ και $T: X \to \ell_p$ γραμμικός και φραγμένος. Τότε ο T είναι συμπαγής, δηλαδή: $T(B_X)$ είναι συμπαγές.

- <u>Απόδειξη</u>: Τώρα παρατηρούμε ότι ο ℓ_r είναι διαχωρίσιμος και αυτοπαθής και ο X ομοίως και συνεπώς από πρόταση-θεώρημα (B_X, τ_w) είναι μετρικοποιήσιμος και συμπαγής. Από το λήμμα: $T_{|B_X} : (B_X, \tau_w) \longrightarrow (T(B_X), \|\cdot\|)$ είναι συνεχής αφού ο $T_{|B_X}$ είναι γραμμικός και φραγμένος και αφού εικόνα συμπαγούς είναι συμπαγές έπεται το ζητούμενο