- <u>Μάθημα 9 [redacted] ο</u>: Τύπος: Χώροι Banach

- <u>Άσκηση</u>: (Πρόταση): Έστω X χώρος Banach και $(e_n)_{n\geq 1}$ Schauder βάση και $(x_n)_{n\geq 1} \in X^{\mathbb{N}}$ [redacted] φραγμένη και ε-διαχωρισμένη (δηλαδή: $\forall n \neq m \in \mathbb{N}: \|x_n - x_m\| \geq \varepsilon$). Τότε υπάρχει υπακολουθία $(x_{k_n})_{n\geq 1}$ της $(x_n)_{n\geq 1}$ και $(z_n)_{n\geq 1}$ Δ $(e_n)_{n\geq 1}$ τέτοια ώστε: θέτοντας $y_1 = x_{k_1}$ και $y_n = x_{k_{n+1}} - x_{k_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι: $(y_n)_{n\geq 1} \sim (z_n)_{n\geq 1}$.

- <u>Απόδειξη</u>: (Υπόδειξη: Αρχικά παρατηρούμε ότι αν πάρουμε $\ell \in \mathbb{N}$ τότε έχουμε ότι αφού η $(x_n)_{n\geq 1}$ είναι φραγμένη έπεται ότι υπάρχει υπακολουθία $(x_{k_n})_{n\geq 1}$ της $(x_n)_{n\geq 1}$ η οποία είναι συγκλίνουσα και άρα: αφού: $e_\ell^* \in X^*$ έπεται ότι η $(e_\ell^*(x_{k_n}))_{n\geq 1}$ είναι συγκλίνουσα ακολουθία $\forall \ell \in \mathbb{N}$. Έπειτα εφαρμόζουμε sliding hump argument και βρίσκουμε το ζητούμενο.)

- <u>Θεώρημα</u>: Έστω $1 \leq p < r < +\infty$ και $X \subset_r c_0$ ή $X \subset_r \ell$[redacted]$_r$. Έστω επίσης: $T: X \to \ell_p$ γραμμικός και φραγμένος. Τότε $T(B_X)$ είναι σχετικά norm συμπαγές.

- <u>Απόδειξη</u>: Υποθέτουμε προς άτοπον ότι $T(B_X)$ δεν είναι σχετικά norm συμπαγές και άρα απ' αυτό έπεται ότι υπάρχει $(y_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία του $T(B_X)$ ε-διαχωρισμένη (αφού δεν είναι norm συμπαγές έπεται ότι δεν είναι και ακολουθιακά συμπαγές και άρα υπάρχει ακολουθία στην $(T(B_X))$ που δεν έχει συγκλίνουσα υπακολουθία και αυτήν την υπακολουθία μπορούμε για κάποιο ε να την κάνουμε ε-διαχωρισμένη). Έστω τώρα $(x_n)_{n\geq 1} \in B_X^{\mathbb{N}}$ τέτοια ώστε: $y_n = T(x_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ και αφού ο T είναι φραγμένος έπεται ότι $\exists \delta > 0$ τέτοιο ώστε η $(x_n)_{n\geq 1}$ να είναι δ-διαχωρισμένη γιατί: αφού: $\forall n \neq m \in \mathbb{N}$: $\|y_n - y_m\| = \|T(x_n) - T(x_m)\| = \|T(x_n - x_m)\| \geq \varepsilon \Rightarrow \varepsilon \leq \|y_n - y_m\| \leq \|T\| \|x_n - x_m\| \Rightarrow \|x_n - x_m\| \geq \frac{\|T\|}{\varepsilon} = \delta$ και άρα είναι δ-διαχωρισμένη. Άρα τώρα από προηγούμενη πρόταση έπεται ότι υπάρχει $(k_n)_{n\geq 1} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ γνησίως αύξουσα τέτοια ώστε: $(x_{k_{n+1}} - x_{k_n}) \sim (e_n^{\ell_r})$ ή $(e_n^{c_0})$ και $(y_{k_{n+1}} - y_{k_n}) \sim (e_n^{\ell_p})$ και τότε όπως στο θεώρημα Pitt έχουμε ότι υπάρχει: $R: \ell$[redacted]$_r \to \ell_p$ ο οποίος είναι τέτοιος ώστε: $R(e_n) = e_n$ δηλαδή ο ταυτοτικός τελεστής και άρα $\ell_r \subseteq \ell_p$ άτοπο. (Έχουμε ότι αφού: $(x_{k_{n+1}} - x_{k_n}) \sim (e_n^{\ell_r})$ έπεται ότι $\exists$ [redacted] $\overline{\langle (x_{k_{n+1}} - x_{k_n}) : n\geq 1\rangle}$ [redacted] $\overline{\langle e_n : n \geq 1\rangle}^{\ell_r}$ [redacted] $: T_1$ ο οποίος είναι γραμμικός, επί ισομορφισμός και $T_1($[redacted]$) =$ [redacted], $\forall n \in \mathbb{N}$ και $\exists T_2: \overline{\langle (y_{k_{n+1}} - y_{k_n}) : n \geq 1\rangle} \to$ [redacted] $\overline{\langle e_n : n\geq 1\rangle}$ γρ., επί, ισομορφισμός και $T_2(y_{k_{n+1}} - y_{k_n}) = e_n$ και τότε: $R = T_2 \circ T \circ T_1: \ell_r \to \ell_p$ είναι γραμμικός και φραγμένος

- **Ορισμός:** Έστω X, Y χώροι Banach. Τότε οι X, Y καλούνται totally incomparable αν δεν υπάρχουν $Y' \subset Y$ απειροδιάστατος και $X' \subset X$ απειροδιάστατος τέτοιοι ώστε: $X' \sim Y'$ (ισόμορφοι).

▷ **Πόρισμα:** Οι χώροι c_0 και ℓ_p με $p \in [1,\infty)$ είναι ανά 2 totally incomparable γιατί: παρατηρούμε ότι αν υπήρχε $X \subset c_0$ και $Y \subset \ell_p$ με $p \geq 1$ με $X \sim Y$ δηλαδή υπήρχε γραμμικός ισομορφισμός: $T: X \to Y \subseteq \ell_p$ τότε θα είχαμε από το Θεώρημα Pitt ότι: $T(B_X)$ θα είναι w-[redacted] συμπαγές και από το προηγούμενο θεώρημα ότι είναι και norm-συμπαγές. Όμως: $T(B_X) = B_Y$ και άρα B_Y είναι norm-συμπαγές $\Longrightarrow$ Y: πεπερασμένης διάστασης και άρα άτοπο.

- **Ορισμός:** Έστω X, Y χώροι Banach και $T: X \to Y$. Ο T καλείται strictly singular αν δεν υπάρχει $X' \subset X$ απειροδιάστατος ώστε: $T|_{X'}$ να είναι ισομορφισμός.

▷ **Πόρισμα:** Έστω $p < r$. Τότε κάθε $T: \ell_r \to \ell_p$ είναι strictly singular αφού οι ℓ_r και ℓ_p είναι [redacted] totally incomparable

- Συμπληρωματικοί Υπόχωροι του ℓ_p με $p \in [1,\infty)$:

- **Πρόταση:** Έστω $X = c_0$ ή $X = \ell_p$ με $p \in [1,\infty)$. Τότε: $\forall\, Y \subset X$ απειροδιάστατο κλειστό υπάρχει $Z \subset Y$ με $Z \sim X$ και Z συμπληρωματικός υπόχωρος του X.

Απόδειξη: Από Pelczyński έχουμε ότι υπάρχει $(y_n)_{n\geq 1} \in Y^{\mathbb{N}}$ και μια $(x_n)_{n\geq 1} \trianglelefteq (e_n)_{n\geq 1}$ τέτοια ώστε: οι $(x_n)_{n\geq 1}$ και $(y_n)_{n\geq 1}$ να είναι congruent και άρα έστω τώρα: $Z = \overline{\langle y_n : n\geq 1\rangle} \subset Y$ και $U = \overline{\langle x_n : n \geq 1\rangle}$ και τότε αφού είναι congruent έπεται ότι: $Z \sim U$. Όμως: $U \sim X$ και U είναι συμπληρωματικός υπόχωρος του X γιατί: $T: X \to U$

~~αφού: $(x_n)_{n\geq 1} \trianglelefteq (e_n)_{n\geq 1}$ έπεται ότι: αν θεωρήσουμε τον $T: U \to X$ με $T(x) = T(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n$ τότε παρατηρούμε~~

αφού: (u_n)[redacted]$_{n\geq 1}$ [redacted] $\trianglelefteq (e_n)_{n\geq 1}$ από βασική πρόταση, του προηγούμενου μαθήματος.

Τώρα αφού: [redacted] $Z \sim U \sim X$ και ο U είναι συμπληρωματικός υπόχωρος του X έπεται ότι και ο Z είναι συμπληρωματικός υπόχωρος του X γιατί: αφού U συμπληρωματικός [redacted] $P: X \to U$ είναι φραγμένη, γραμμική προβολή και ~~$Z \sim U$ έπεται ότι~~ υπάρχει ισομορφισμός $T: X \to X$ με $T(y_n) = u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ αφού $(x_n)_{n\geq 1}$ και $(y_n)_{n\geq 1}$ είναι congruent. Αν τώρα θεωρήσουμε τον: [redacted] $P' : T^{-1} \circ P \circ T : X \to Z$ τότε αυτή είναι φραγμένη, γραμμική προβολή γιατί είναι σύνθεση φραγμένων και γραμμικών τελεστών και $(P')^2 = P' \circ P'$

$$= (T^{-1} \circ P \circ T) \circ (T^{-1} \circ P \circ T) = T^{-1} \circ P \circ (T \circ T^{-1}) \circ P \circ T = T^{-1} \circ \underbrace{P \circ P}_{\substack{P^2 \\ \| \\ P}} \circ T = T^{-1} \circ P \circ T$$

αφού η P είναι προβολή. Άρα $Z \subset_c Y$ συμπληρωματικός.

- **Πόρισμα:** Έστω $X = c_0$ ή $X = \ell_1$. Τότε: $\forall Y \subset_c X$ απειροδιάστατο έχουμε ότι ο Y είναι μη αυτοπαθής.

- Πράγματι παρατηρούμε ότι οι c_0 και ℓ_1 δεν είναι αυτοπαθείς χώροι. Τώρα: αν υπήρχε $Y \subset_c X$ απειροδιάστατος αυτοπαθής τότε από πρόταση θα υπήρχε $Z \subset_c X$ με $Z \sim X$. Όμως έχουμε ότι ο Z θα ήταν αυτοπαθής αφού ο Y είναι και $Z \subset_c Y$ και αφού: $Z \sim X$ θα είχαμε ότι ο X είναι αυτοπαθής, άτοπο.

- **Pełczyński Decomposition Technique:**

▷ **Ορισμός:** Έστω X, Y χώροι Banach και $Z = c_0$ ή $Z = \ell_p$ με $p \in [1, +\infty)$. Ορίζουμε:

$\|\cdot\|_{\oplus Z} : X \times Y \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε:
$$\|(x,y)\|_{\oplus Z} = \begin{cases} \left(\|x\|_X^p + \|y\|_Y^p\right)^{1/p}, & \text{αν } Z = \ell_p \\ \max\{\|x\|, \|y\|_Y\}, & \text{αν } Z = c_0 \end{cases}$$

και θα γράφουμε: $X \oplus_Z Y = (X \times Y, \|\cdot\|_{\oplus Z})$
και $X \oplus Y = (X \times Y, \|\cdot\|_{\oplus \ell_1})$ και αυτοί είναι χώροι Banach.

- Άσκηση:

1. $(X\oplus_2 Y)\oplus_2 W = X\oplus_2 (Y\oplus_2 W)$:

- Παρατηρούμε αρχικά ότι: $(X\oplus_2 Y)\oplus_2 W = (X\times Y, \|\cdot\|_{\oplus 2})\oplus_2 W = (X\times Y\times W, \|\cdot\|_{\oplus 2})$

$=$

2. $X\oplus_2 Y \sim X\oplus Y$: Παρατηρούμε ότι: $X\oplus Y = (X\times Y, \|\cdot\|_{\oplus_1})$ και $X\oplus_2 Y = (X\times Y, \|\cdot\|_2)$

και παρατηρούμε ότι αν θεωρήσουμε τον: $T: X\oplus_2 Y \to X\oplus Y$ με $T(x,y)$

- Άσκηση:

(α). $X\oplus_2 (Y\oplus_2 W) = (X\oplus_2 Y)\oplus_2 W$

(β). $X\oplus_2 Y \sim X\oplus Y$

(γ). $Z \sim Z\oplus Z$ και Z είναι ισομετρικός με $Z\oplus_2 Z$

(δ). Αν $X\sim X'$ και $Y\sim Y'$ τότε: $X\oplus Y \sim X'\oplus Y'$

- Απόδειξη: (δ). Αφού: $X\sim X'$ έπεται ότι $\exists\, T_1: X\to X'$ γραμμικός ισομορφισμός και αφού $Y\sim Y'$ έπεται ότι $\exists\, T_2: Y\to Y'$ γραμμικός ισομορφισμός και άρα τώρα: θεωρούμε τον $T: X\times Y \to X'\times Y'$ με $T(x,y) = (T_1(x), T_2(y))$ και τότε έχουμε ότι ο T είναι γραμμικός αφού T_1, T_2 είναι γραμμικοί και επίσης έχουμε ότι: $\forall (x,y)\in X\times Y$:

$\|T(x,y)\|_{\oplus_1} = \|(T_1(x), T_2(y))\|_{\oplus_1} = \|T_1(x)\|_{X'} + \|T_2(y)\|_{Y'} \le \|T_1\|\,\|x\|_X + \|T_2\|\,\|y\|_Y$ όπου: $C = \max\{\|T_1\|, \|T_2\|\} > 0$ και $C<\infty$

$\le C\|x\|_X + C\|y\|_Y = C(\|x\|_X + \|y\|_Y) = C\|(x,y)\|_{\oplus_1}$ και άρα ο T είναι φραγμένος.

Επίσης αφού οι T_1, T_2 είναι 1-1 και επί έπεται ότι και ο T είναι 1-1 και επί.

Τώρα παρατηρούμε ότι ορίζεται και ο $T^{-1}: X'\times Y' \to X\times Y$ και ελέγχουμε ότι αυτός είναι φραγμένος αφού: $T^{-1}(x',y') = (T_1^{-1}(x'), T_2^{-1}(y'))$ και T_1^{-1}, T_2^{-1} φραγμένοι

(γ). Ορίζουμε: $T: Z\to Z\times Z$ με $T(z) = (z,z)$ και τότε παρατηρούμε ότι ο T είναι γραμμικός τελεστής, επί και προφανώς και 1-1. Επίσης είναι και φραγμένος γιατί: $\|T(z)\|_{\oplus_1} = \|(z,z)\|_{\oplus_1}$

$= \|z\|_z + \|z\|_z = 2\|z\|_z$ και άρα είναι και φραγμένος. Επίσης ορίζεται ο $T^{-1}: Z\times Z \to Z$ με $T^{-1}(z,w) = z$, $\forall z,w \in Z$ και είναι φραγμένος προφανώς. (ή από ΘΑΑ)

(β). Ορίζουμε: $T: (X\times Y, \|\cdot\|_{\oplus Z}) \to (X\times Y, \|\cdot\|_{\oplus \ell_1})$ με $T(x,y) = (x,y)$ και αυτός είναι προφανώς γραμμικός, 1-1, επί. Τώρα: $\|T(x,y)\|_{\oplus \ell_1} = \|(x,y)\|_{\oplus \ell_1} = \|x\|_X + \|y\|_Y$

$$\leq \begin{cases} (\|x\|_X^p + \|y\|_Y^p)^{1/p}, & \text{αν } Z=\ell_p \\ \max\{\|x\|_X, \|y\|_Y\}, & \text{αν } Z=c_0 \end{cases} = \|(x,y)\|_{\oplus Z}$$ και άρα ο T είναι φραγμένος

Επίσης ορίζεται ο T^{-1} και έχουμε ότι από Θεώρημα Αντίστροφης Απεικόνισης είναι και αυτός φραγμένος αφού οι χώροι μας είναι χώροι Banach

(α). Προφανώς.

_ Άσκηση: Έστω X Banach και $Y \hookrightarrow X$ κλειστός απειροδιάστατος. Τα εξής είναι ισοδύναμα:

(α). Ο Y είναι συμπληρωματικός υπόχωρος του X

(β). $\exists Z \hookrightarrow X$ κλειστός τέτοιος ώστε: $Z\cap Y = \{0\}$ και $Y+Z=X$

(γ). $\exists Z \hookrightarrow X$ κλειστός τέτοιος ώστε: $Y\oplus Z \overset{T}{\simeq} X$ όπου: $T: Y\oplus Z \to X$, $T(y,z) = y+z$

(*) $\ker P \cap \operatorname{Im} P = \{0\}$ γιατί: $x \in \ker P \cap \operatorname{Im} P \Rightarrow P(x) = 0$ και $\exists x' \in X: P(x') = x$ $\Rightarrow P^2(x') = P(x') = P(x) = x = 0$

_ Απόδειξη: (α) ⟹ (β): Αρχικά υποθέτουμε ότι ο Y είναι συμπληρωματικός υπόχωρος του X και τότε: $\exists P: X \to Y$ φραγμένη γραμμική προβολή. Τότε παρατηρούμε ότι: $\cancel{\ker P \cap Y = \{0\}}$ γιατί ~~αν:~~ $\cancel{x \in \ker P\cap Y}$ τότε: $\cancel{P(x)=0}$ ~~και αφού~~ $\cancel{\operatorname{Im}P = Y\ \exists x}$ ⟹ αν πάρουμε $x\in X$: $x = x - P(x) + P(x) = (I-P)(x) + P(x) \in \operatorname{Im}(I-P) + \operatorname{Im}P$ και τώρα παρατηρούμε ότι: $\ker P = \operatorname{Im}(I-P)$ γιατί: αν $y \in \ker P \subseteq X$ τότε: $y - P(y) = (I-P)(y) = y \in \operatorname{Im}(I-P)$ και αν $y \in \operatorname{Im}(I-P)$ τότε: $\exists x\in X: x - P(x) = y \Rightarrow P(y) = P(x) - P^2(x) = P(x) - P(x) = 0 \Rightarrow y \in \ker P$ (*) και άρα: $\ker P = \operatorname{Im}(I-P)$. Επίσης: $\operatorname{Im}P = Y$ και άρα: $X = \ker P + Y$ και $\ker P\cap Y = \{0\} = \ker P \cap \operatorname{Im}P$

_ (β) ⟹ (γ). Έχουμε από υπόθεση ότι υπάρχει $Z \hookrightarrow X$ κλειστός τέτοιος ώστε: $Z\cap Y = \{0\}$ και $Y+Z=X$ ή ισοδύναμα κάθε $x\in X$ γράφεται μοναδικά ως: $x = y+z$ όπου: $y\in Y$ και $z\in Z$. Τώρα ορίζουμε: $T: (X, \|\cdot\|_X) \to (Y\times Z, \|\cdot\|_{\oplus \ell_1})$ με: $T(x) = T(y+z) = (y,z)$ και άρα έχουμε ότι προφανώς ο T είναι γραμμικός γιατί αν: $x_1 = y_1+z_1 \in X$ και $x_2 = y_2+z_2 \in X$ και $\lambda\in\mathbb{R}$ τότε: $T(\lambda x_1+x_2) = T(\lambda(y_1+z_1) + (y_2+z_2)) = T((\lambda y_1+y_2) + (\lambda z_1+z_2)) = (\lambda y_1+y_2, z_1+z_2) = (\lambda y_1, \lambda z_1) + (y_2, z_2) = \lambda(y_1,z_1) + (y_2,z_2) = \lambda T(x_1) + T(x_2)$.

Επίσης ο T είναι επί: προφανώς γιατί αν $(y,z) \in Y\times Z$ τότε αν θεωρήσουμε το $x = y+z \in X$: $T(x) = (y,z)$. Επίσης είναι 1-1:

γιατί αν: $T(x_1)=T(y_1+z_1)=(y_1,z_1)=(y_2,z_2)=T(y_2+z_2)=T(x_2)$ τότε: $y_1=y_2$ και $z_1=z_2$ και άρα: $x_1=y_1+z_1=y_2+z_2=x_2$. Επίσης ο T είναι φραγμένος γιατί: ~~$\|T(x)\|_{\oplus\ell_1}=\|(y,z)\|_{\oplus\ell_1}=\|y\|_X+\|z\|_X\le\|x\|_X$ γιατί παρατηρούμε~~: ορίζεται ο $T^{-1}: Y\times Z\to X$

με $T^{-1}((y,z))=y+z$ και αυτός είναι φραγμένος γιατί: $\|T^{-1}((y,z))\|_X=\|y+z\|_X \le \|y\|_X+\|z\|_X=\|(y,z)\|_{\oplus\ell_1}$ και άρα αφού ο T^{-1} είναι φραγμένος μεταξύ χώρων Banach γιατί ο X και $Y\oplus Z$ είναι χώροι Banach έπεται από το Θεώρημα Αντίστροφης απεικόνισης ότι και ο T είναι φραγμένος και άρα ο T είναι ισομορφισμός και άρα:

$X\sim Y\oplus Z$.

(γ)→(α).: Αν τώρα έχουμε ότι: $X\overset{T}{\sim}Y\oplus Z$ για κάποιον $Z\hookrightarrow X$ κλειστό υπόχωρο του X τότε θα αποδείξουμε ότι ο Y είναι συμπληρωματικός υπόχωρος του X, δηλαδή υπάρχει $P: X\to Y$ φραγμένη γραμμική προβολή. Αφού: $X\overset{T}{\sim}Y\oplus Z$ έπεται ότι [redacted] αν

γραμμικός ισομορφισμός $T: X\to Y\oplus Z$. Τώρα παρατηρούμε ότι: αν θεωρήσουμε τον τελεστή: $T_1: Y\oplus Z\to Y$ με $T_1((y,z))=y$ τότε παρατηρούμε ότι αρχικά ο T_1 είναι καλά ορισμένος, γραμμικός και φραγμένος τελεστής αφού η γραμμικότητα ορίζεται εύκολα και: $\|T_1((y,z))\|_Y=\|y\|_X\le\|y\|_X+\|z\|_X=\|(y,z)\|_{\oplus\ell_1}$. Τώρα αν θεωρήσουμε τον: $T_2=T_1\circ T: X\to Y$ τότε αυτός είναι φραγμένος και γραμμικός τελεστής και επίσης είναι και προβολή

Θεωρήσουμε $T: Y\oplus Z\to X$ με $T(y,z)=y+z$ που είναι γραμμικός ισομορφισμός και θεωρούμε και τον τελεστή: $T_1: Y\oplus Z\to Y$ με $T_1(y,z)=y$ τότε και αυτός είναι γραμμικός, φραγμένος και επίσης [redacted] αν θεωρήσουμε τον: $T_1\circ T^{-1}: X\to Y$ τότε αυτός είναι γραμμικός και φραγμένος τελεστής ως σύνθεση τέτοιων με: $T_1\circ T^{-1}(x)$

και εύκολα αποδεικνύεται ότι είναι προβολή και άρα ο Y είναι

τελικά συμπληρωματικός υπόχωρος του X.

- **Ορισμός:** Έστω X χώρος Banach και $Z = c_0$ ή $Z = \ell_p$ με $p \in [1,+\infty)$.

Ορίζουμε: $\bigoplus_Z X = \{ (x_n)_{n\geq 1} \in X^{\mathbb{N}} : (\|x_n\|)_{n\geq 1} \in Z \}$ και ορίζουμε $\forall (x_n)_{n\geq 1} \in \bigoplus_Z X$

$\|(x_n)_{n\geq1}\|_{\oplus Z} = \|(\|x_n\|)_{n\geq 1}\|_Z$ και αυτός είναι ένας χώρος Banach.

► **Βασικές Ιδιότητες:**

1. $\bigoplus_Z X$ είναι χώρος Banach
2. $\bigoplus_Z Z$ είναι ισομετρικός με τον Z
3. Αν $X \simeq Y$ τότε: $\bigoplus_Z X \simeq \bigoplus_Z Y$
4. $\bigoplus_Z X \simeq X \oplus (\bigoplus_Z X)$
5. $\bigoplus_Z (X\oplus Y) \simeq (\bigoplus_Z X)\oplus(\bigoplus_Z Y)$

- **Απόδειξη:** (α). Παρατηρούμε ότι αν πάρουμε μια $(x_n)_{n\geq1}$ που $\bigoplus_Z X$ η οποία είναι Cauchy ως προς την νόρμα: $\|\cdot\|_{\oplus Z}$ τότε ~~παρατηρούμε ότι: η $(x_n)_{n\geq 1}$~~ είναι $\|\cdot\|_X$-Cauchy γιατί για ε>0 τυχόν ~~έχουμε ότι:~~ $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n,m \geq n_0 : \|x_n - x_m\|_{\oplus Z} =$ ~~$\|(\|x_n\|)$~~

- **Θεώρημα:** (The Pełczyński decomposition tech[redacted]nique). Έστω X, Y χώροι Banach τέτοιοι ώστε X ισόμορφος με συμπληρωματικό υπόχωρο του Y και ο Y είναι ισόμορφος με συμπληρωματικό υπόχωρο του X. Υποθέτουμε επίσης ότι είτε: 1. $X \simeq X\oplus X$ και $Y \simeq Y \oplus Y$ είτε: 2. $X \simeq \bigoplus_Z X$ όπου $Z = c_0$ ή $Z = \ell_p$ με $p\in[1,+\infty)$. Τότε: $X \simeq Y$

- **Απόδειξη:** Καθώς ο X είναι ισόμορφος με συμπληρωματικό υπόχωρο του Y έπεται ότι: $\exists X_1 \subset_c Y$ κλειστός τέτοιος ώστε: [redacted] $X \oplus X_1 \simeq Y$ από πρόταση. Ομοίως τώρα αφού ο Y είναι ισόμορφος με συμπληρωματικό υπόχωρο του X έπεται ότι υπάρχει $Y_1 \subset_c X$ κλειστός τέτοιος ώστε: $Y \oplus Y_1 \simeq X$ (Αφού ο X είναι ισόμορφος με συμπληρωματικό υπόχωρο του Y έπεται ότι: $\exists Z_x \subset_c Y$ συμπληρωματικός με: $X \simeq Z_x$. Τώρα αφού: $Z_x \subset_c Y$ είναι συμπληρωματικός: από πρόταση $\exists X_1 \subset_c Y$ με: $Z_x \oplus X_1 \simeq$ Y [redacted] και αφού: $X \simeq Z_x$ έπεται ότι: $X \oplus X_1 \simeq Z_x \oplus X_1 \simeq Y$ και όμοια για το άλλο).

Τώρα υποθέτουμε το (α). :

- $X \sim Y\oplus Y_1 \sim Y\oplus Y\oplus Y_1 \sim Y\oplus X \sim X\oplus Y$ και $Y \sim X\oplus X_1 \sim X\oplus X\oplus X_1 \sim X\oplus Y$

$Y \sim Y\oplus Y$ $\quad$ $Y\oplus Y_1 \sim X$

και άρα: $X \sim Y$

Τώρα υποθέτουμε το (β). : $X \sim \oplus_2 X \sim X\oplus(\oplus_2 X) \sim X\oplus X$

ιδιότητες $\quad$ $X\sim \oplus_2 X$ από υπόθεση

$X \sim \oplus_2 X \sim \oplus_2 (Y\oplus Y_1) \sim (\oplus_2 Y)\oplus(\oplus_2 Y_1) \sim Y\oplus(\oplus_2 Y)\oplus(\oplus_2 Y_1)$

$X\sim Y\oplus Y_1$ $\quad$ ιδιότητα

$\sim Y\oplus X \sim X\oplus Y$ και $Y \sim X\oplus X_1 \overset{(1)}{\sim} X\oplus X\oplus X_1 \sim X\oplus Y$

αφού: $X\sim X\oplus X$ $\quad$ $X\oplus X_1 \sim Y$

και άρα: $X\sim Y$ και έχουμε το ζητούμενο.

- Πόρισμα: Αν $X = c_0$ ή $X=\ell_p$ με $p\in[1,\infty)$ και $Y \hookrightarrow X$ απειροδιάστατος (κλειστός) συμπληρωματικός και τότε: $Y\sim X$.

~~- Απόδειξη: Καθώς τώρα: [redacted] $Y\hookrightarrow X$ συμπληρωματικός έπεται ότι τετριμμένα ο Y θα είναι ισόμορφος με συμπληρωματικό υπόχωρο του X παίρνοντας τον $Id_Y : Y \to Y$~~

- Απόδειξη: Αρχικά έχουμε ότι: $X \sim \oplus_X X$ από πρόταση. Επίσης έχουμε ότι: αφού $Y\hookrightarrow X$ είναι συμπληρωματικός υπόχωρος του X έπεται ότι τετριμμένα ο Y είναι ισόμορφος με συμπληρωματικό υπόχωρο του X (μέσω της Id_Y). Από προηγούμενη πρόταση τώρα έπεται ότι $\exists\ Z \hookrightarrow Y$ συμπληρωματικός υπόχωρος του [redacted] και [redacted] $Z\sim X$ και άρα από το προηγούμενο θεώρημα: $Y\sim X$.

– <u>Ο χώρος ℓ_1:</u>

► <u>Θεώρημα:</u> Έστω X Banach και διαχωρίσιμος. Τότε: $\exists\, Q: \ell_1 \to X$ γραμμική, επί, φραγμένη. Επίσης: $\|Q\|=1$.

– <u>Απόδειξη:</u> Αρχικά αφού ο X είναι διαχωρίσιμος έπεται ότι υπάρχει $(x_n)_{n\ge1}$ πυκνή στην [redacted] B_X

Ορίζουμε: $Q: \ell_1 \to X$ με $Q((\xi_n)_{n\ge1}) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n x_n$, $\forall (\xi_n)_{n\ge1} \in \ell_1$. Τώρα παρατηρούμε ότι:

ο Q είναι καλά ορισμένος γιατί αν $(\xi_n)_{n\ge1}$ είναι του ℓ_1: $\sum_{n=1}^{\infty} \|\xi_n x_n\| \le \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n| < +\infty$

αφού: $\|x_n\| \le 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$ και άρα αφού ο X είναι Banach έπεται ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n x_n$

συγκλίνει από γνωστή πρόταση. Τώρα παρατηρούμε ότι ο Q είναι γραμμικός και αυτό

έπεται εύκολα. Επίσης: $\|Q\| \le 1$ από την προηγούμενη ανισότητα. Μάλιστα $\|Q\|=1$

για [redacted] $(\xi_n)_{n\ge1} = e_n$ γιατί: $Q(e_n) = x_n$ και άρα: $\|Q(e_n)\| = \|x_n\|$ ≤ [redacted] 1 και αφού

$\|Q\| = \sup\{\|Q(x)\| : \|x\| \le 1\} \ge \|Q(e_n)\| = \|x_n\|$ [redacted], $\forall n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow \|Q\| \ge 1 \Rightarrow \|Q\| = 1$, αφού: $\sup\|x_n\| = 1$

Τώρα παρατηρούμε ότι: ο Q είναι επί: Αρκεί να αποδείξουμε ότι: $B_X \subseteq$

$Q(2B_{\ell_1}) \subseteq Q(\ell_1)$ γιατί τότε: $X =$ [redacted] $Q(\ell_1)$ και άρα επί. Πράγματι έστω $x \in B_X$.

Παρατηρούμε ότι: [redacted] $Q(B_{\ell_1})$ είναι πυκνό στην B_X. Επαγωγικά επιλέγουμε $(u_n)_{n\ge1} \in \ell_1^{\mathbb{N}}$ τέτοια

ώστε: $\|u_n\| \le \frac{1}{2^{n-1}}$ και $\|x - Q(u_1 + \dots + u_n)\| \le \frac{1}{2^n}$: Πράγματι αρχικά επιλέγουμε $u_1 \in B_{\ell_1}$

τέτοιο ώστε: $\|x - Q(u_1)\| \le \frac{1}{2}$. Υποθέτουμε τώρα ότι έχουμε επιλέξει κατάλληλα $u_1, \dots, u_n$

και τότε: $\|Q(u_1 + \dots + u_n) - x\|_X \le \frac{1}{2^n} \Rightarrow \|2^n Q(u_1 + \dots + u_n) - 2^n x\|_X \le 1$ και επιλέγουμε

$u'_{n+1} \in B_{\ell_1}$ τέτοιο ώστε: $\|2^n x - 2^n Q(u_1 + \dots + u_n) - Q(u'_{n+1})\| < \frac{1}{2}$ και ορίζουμε: $u_{n+1} = \frac{u'_{n+1}}{2^n}$

και τότε: $\|u_{n+1}\| \le \frac{1}{2^{n+1}}$ και $\|x - Q(u_1 + \dots + u_{n+1})\| \le \frac{1}{2^{n+1}}$ και αν ορίσουμε: $y = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$

που συγκλίνει αφού ο ℓ_1 είναι Banach και λόγω συνέχειας του Q: $Q(y) = x$

και $\|y\| \le 2$, και άρα ο Q είναι επί. ↳ και: $\sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\| \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ συγκλίνει

– <u>Παρατήρηση:</u> Στην απόδειξη έχοντας ότι $Q(B_{\ell_1})$ είναι πυκνό στην B_X μπορούμε να

αποδείξουμε ότι: $\forall \varepsilon > 0$: $B_X \subseteq (1+\varepsilon) Q(B_{\ell_1})$.