– Μάθημα 10ο: Χώροι Banach: Τύπος:

• <u>Χώροι Πηλίκο</u>: Έστω X είναι διανυσματικός χώρος και $Y \subset X$ υπόχωρός του.

Για $x_1, x_2 \in X$ ορίζεται η σχέση ισοδυναμίας: $x_1 \sim x_2 \iff x_1 - x_2 \in Y$, και είναι άμεσο ότι αυτή είναι σχέση ισοδυναμίας στον X. Επίσης: $x_1 \sim x_2 \iff x_1 - x_2 \in Y \iff x_1 \in x_2 + Y$ και άρα η κλάση ισοδυναμίας ενός $x \in X$ είναι το σύνολο: $\{z \in X : z \sim x\} = x + Y$.

Ο χώρος όλων των κλάσεων ισοδυναμίας συμβολίζεται με X/Y και ονομάζεται χώρος πηλίκο του X ως προς τον Y. Έτσι: [redacted] $X/Y = \{x + Y : x \in X\}$. Ο X/Y εφοδιάζεται με φυσιολογικό τρόπο με τις πράξεις της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού από τις σχέσεις: $(x_1 + Y) + (x_2 + Y) = (x_1 + x_2) + Y$ και $\lambda(x_1 + Y) = \lambda x_1 + Y$, $\forall x_1, x_2 \in X$. Τώρα είναι άμεσο ότι αυτές οι πράξεις είναι καλά ορισμένες και άρα ο X/Y γίνεται διανυσματικός χώρος με μηδενικό στοιχείο το $0 + Y = Y$.

– Τώρα αν ο $(X, \|\cdot\|)$ είναι ένας χώρος με νόρμα και $Y \subset X$ διανυσματικός κλειστός υπόχωρος του X. Η φυσιολογική νόρμα με την οποία θα εφοδιάσουμε τον X/Y είναι η: $\|x + Y\| = \inf\{\|x+y\| : y \in Y\} = \inf\{\|x-y\| : y \in Y\} = \rho(x, Y)$ και εύκολα διαπιστώνουμε ότι αυτή αποτελεί νόρμα στον X/Y. (Μάλιστα η παραπάνω νόρμα είναι νόρμα στον X/Y <u>ανν</u>: $Y = \overline{Y} \iff Y$: κλειστός).

▷ <u>Πρόταση</u>: Έστω X χώρος Banach και $Y \subset X$ κλειστός υπόχωρος του X. Τότε ο $(X/Y, \|\cdot\|)$ όπου $\|\cdot\|$ η νόρμα του X/Y που ορίσαμε παραπάνω, είναι χώρος Banach.

– <u>Απόδειξη</u>: (Σημειώσεις Αργυρού):

- <u>Πρόταση:</u> Έστω X, Z χώροι Banach και έστω: $T: X \to Z$, φραγμένος, γραμμικός επί. Τότε εάν θέσουμε: $Y = \ker T \hookrightarrow X$ κλειστός αφού T: φραγμένος και άρα ο $X \backslash Y$ γίνεται χώρος Banach με βάση τα προηγούμενα και μάλιστα $X \backslash Y \sim Z$.

• <u>Απόδειξη:</u> Ορίζουμε $Q: X\backslash Y \to Z$ με: $Q(x+Y) = Q([x]) = T(x)$ και αυτός είναι καλά ορισμένος γιατί αν: $[x] = [y] \Rightarrow \{x_0 \in X : x \sim x_0\} = \{x_0 \in X : x_0 \sim$ [redacted] $y\}$ $\Rightarrow y \sim x \Rightarrow$ [redacted] $x - y \in Y = \ker T \Rightarrow T(x) = T(y) \Rightarrow Q(x+Y) = Q(y+Y)$. Επίσης ο Q είναι γραμμικός λόγω γραμμικότητας του T. Επίσης ο Q είναι επί γιατί: αν $z \in Z$ τότε αφού ο T είναι επί: $\exists x \in X: T(x) = Q(x+Y) = z$ και άρα Q επί. Επίσης ο Q είναι 1-1 γιατί αν: $[x] \neq [y]$ τότε έχουμε ότι: $\exists x_0 \in X: x \sim x_0$ και $y \not\sim x_0$ και άρα: $x \neq y \Rightarrow T(x) \neq T(y)$ γιατί: αν: $T(x) = T(y) \Rightarrow x - y \in Y = \ker T \Rightarrow x \sim y$ άτοπο, γιατί τότε: $y \sim x_0$. Τώρα παρατηρούμε ότι αν αποδείξουμε ότι ο Q είναι και φραγμένος τότε αφού ο Z είναι χώρος Banach και $X\backslash Y$ επίσης από Θ.Α.Α έπεται ότι και ο Q^{-1} θα είναι φραγμένος και άρα: Q ισομορφισμός.

Τώρα: παρατηρούμε ότι αν πάρουμε $x \in X$ και θεωρήσουμε την κλάση: $x + Y = [x]$ τότε: $\forall \varepsilon > 0$ μπορούμε να επιλέξουμε $y \in x + \ker T = x + Y$ με: $\|y\| \leq \|x+Y\| = \inf\{\|x+y\| : y \in Y\} + \varepsilon$ από τον ε-χαρακτηρισμό του infimum. Τότε όμως:
$\|Q(x+\ker T)\| = \|Q(x+Y)\| = \|Q(y+Y)\| = \|T(y)\| \leq \|T\|\,\|y\| \leq \|T\|(\|x+Y\| + \varepsilon)$
$\forall \varepsilon > 0$ και άρα αφήνοντας $\varepsilon \to 0^+$: $\|Q(x+Y)\| \leq \|T\|\,\|x+Y\|$ και άρα ο Q είναι φραγμένος αφού: $\|T\| < +\infty$ και: $\|Q\| \leq \|T\|$.

- **Πόρισμα:** Κάθε X διαχωρίσιμος χώρος Banach είναι ισομετρικά ισόμορφος με πηλίκο του ℓ_1:

► **Απόδειξη:** Αφού ο X είναι διαχωρίσιμος χώρος Banach από θεώρημα έπεται ότι: $\exists\, T: \ell_1 \to X$ φραγμένος, γραμμικός, επί με $\|$ [redacted] $T\|=1$ και $B_X \subseteq$ [redacted] $T((1+\varepsilon)B_{\ell_1})$ $\forall \varepsilon>0$. Τώρα: αν θέσουμε: $Y = \ker T \subset \ell_1$ κλειστός από προηγούμενη πρόταση ο $Q: \ell_1 / Y \to X$ με: $Q(x+Y) = T(x)$, $\forall x=(x_n)_{n\geq 1} \in \ell_1$ είναι γραμμικός ισομορφισμός με: [redacted] $\|Q\| \leq \|T\|$ [redacted] $=1$ και άρα: $\|Q\| \leq 1$. Τότε όμως έχουμε ότι: [redacted] αν πάρουμε $x+Y \in B_{\ell_1/Y}$, $x=(x_n)_{n\geq 1} \in \ell_1$ τότε: $\|Q(x+Y)\| \leq \|Q\|\,\|x+Y\| \leq \|x+Y\|$. Θα αποδείξουμε επίσης ότι: $\|Q(x+Y)\| \geq \|x+Y\|$ και θα έχουμε επομένως ότι είναι και ισομετρία. Τώρα αρκεί να αποδείξουμε ότι: [redacted] $x \in \ell_1$ τ.ω: $\|Q(x+Y)\|=1$ έχουμε ότι: $\|x+Y\| \leq 1 = \|Q(x+Y)\|$. Πράγματι τώρα έστω $x \in \ell_1$: $\|Q(x+Y)\|=1$. Θα αποδείξουμε ότι: $\forall \varepsilon>0$: $\|x+Y\| \leq 1+\varepsilon$. Έστω επομένως και $\varepsilon>0$ και τότε: αφού: $Q(x+Y) \in B_X \subseteq$ [redacted] $T((1+\varepsilon)B_{\ell_1})$ και άρα υπάρχει: $y \in B_{\ell_1}$: $T((1+\varepsilon)y) = Q(x+Y) = T(x) = Q((1+\varepsilon)y+Y) \overset{Q:\,1\text{-}1}{\Longrightarrow} \cancel{x \in (1+\varepsilon)y+Y}$ $x+Y = (1+\varepsilon)y+Y$ και άρα: [redacted] $\|x+Y\| = \|(1+\varepsilon)y\| = (1+\varepsilon)\|y\| \leq 1+\varepsilon$ αφού: $y \in B_{\ell_1}$.

[redacted]

- **Παρατήρηση:** Έστω X χώρος Banach και $Y \subset X$ συμπληρωματικός (κλειστός) υπόχωρος του X. Τότε: $\exists\, Z \subset X$ κλειστός τέτοιος ώστε: $Y+Z = X$ και $Y \cap Z = \{0\}$. Τότε: $Z \simeq X/Y$. Πράγματι ο $T: Z \to X/Y$ τέτοιος ώστε: $T(z) = z+Y = [z]_Y$ και τότε παρατηρούμε ότι αυτός είναι καλά ορισμένος, γραμμικός λόγω των πράξεων που ορίσαμε στον X/Y και επίσης [redacted] και επί προφανώς. Επίσης είναι και 1-1 γιατί αν: $[z_1]_Y \neq [z_2]_Y$ $\Rightarrow$ $\{$[redacted] $y \in Y: z_1 \sim y\} \neq \{y \in Y: z_2 \sim y\} \Rightarrow z_1 \neq z_2$ γιατί: $\cancel{z_1 \sim z_1 \text{ και } z_2 \sim z_2 \Rightarrow z_1 \sim z_2}$ $\Rightarrow \cancel{z_1 - z_2 \in Y}$ [redacted] ~~και~~ αφού: $\cancel{z_1 - z_2 \in Z \text{ και } Y \cap Z = \{0\} \Rightarrow z_1 = z_2}$ υπάρχει $y \in Y$: $z_1 \sim y$ και $z_2 \not\sim y$ και άρα: $z_1 \neq z_2$ και άρα είναι 1-1. Επίσης ο T είναι και φραγμένος: γιατί: $\forall z \in Z$: $\|T(z)\| = \|[z]_Y\| = \|z+Y\| = \inf\{\|z+y\|: y \in Y\} \leq \|z+0\| = \|z\|$ και άρα T φραγμένος και $\|T\| \leq 1$. Επίσης αφού ο X/Y είναι χώρος Banach γιατί ο X είναι και ο Z είναι χώρος Banach ως κλειστός υπόχωρος χώρου Banach από Θ.Α.Α έπεται ότι και ο T^{-1} είναι φραγμένος.

- <u>Πόρισμα</u>: Ο ℓ_1 έχει μη συμπληρωματικό κλειστό υπόχωρο:

▶ <u>Απόδειξη</u>: Έστω X διαχωρίσιμος χώρος Banach με $X \not\cong \ell_1$. Τότε: $\exists Q: \ell_1 \to X$ επί, γραμμικός, φραγμένος τέτοια ώστε αν: $Y = \ker Q$ τότε: $X \sim \ell_1 / Y$. Τότε ο $Y \subset \ell_1$ είναι κλειστός υπόχωρος του ℓ_1 και [redacted] μη συμπληρωματικός γιατί αν ήταν συμπληρωματικός προς άτοπον τότε: $\exists Z \subset$ [redacted] ℓ_1 συμπληρωματικός (κλειστός) τέτοιος ώστε: $Z \sim$ [redacted] $\ell_1 / Y \sim X$ από προηγούμενη παρατήρηση. Άρα: $Z \sim X \sim \ell_1$ από πρόταση και άρα άτοπο αφού: $X \not\cong \ell_1$.

▶ <u>Ορισμός</u>: Έστω X χώρος Banach. Λέμε ότι ο X έχει την <u>ιδιότητα Schur</u> αν:
$\forall (x_n)_{n\geq 1} \in X^{\mathbb{N}}$: ισχύει: $x_n \xrightarrow{w} 0 \Rightarrow$ [redacted] $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$

- <u>Παρατήρηση</u>: Έστω $X = c_0$ ή $X = \ell_p$ με $p > 1$ (γνήσια). Τότε ο X δεν έχει την ιδιότητα Schur.

• $X = \ell_p : p > 1$: Παρατηρούμε αρχικά ότι: $\|e_n\|_p = 1, \forall n \in \mathbb{N}$ και άρα: $e_n \not\xrightarrow{\|\cdot\|} 0$. Παρατηρούμε όμως ότι: $e_n \xrightarrow{w} 0$. Πράγματι έστω $x^* \in X^*$. Τώρα αφού: $X^* \sim \ell_q$ όπου: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ έχουμε ότι: $\exists (b_n)_{n\geq 1} \in \ell_q$ τέτοια ώστε: τέτοια ώστε: $\forall (a_n)_{n\geq 1} \in \ell_p$:

(T: ~~$X^* \to \ell_q$ που ορίζεται ως: $T(x^*)($[redacted]$(a_n)_{n\geq 1}) = \sum_{n=1}^{\infty}$~~

$x^*((a_n)_{n\geq 1}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ από θεώρημα και άρα: $x^*(e_n) =$ [redacted] $b_n \to 0$ αφού: $(b_n)_{n\geq 1} \in \ell_q$ και άρα από πρόταση: $e_n \xrightarrow{w} 0$

- <u>Παρατήρηση</u>: $e_n \not\xrightarrow{w} 0$ στον ℓ_1

▶ <u>Πρόταση</u>: Ο ℓ_1 έχει την Schur property:

- <u>Απόδειξη</u>: Προς άτοπον υποθέτουμε ότι $\exists (x_n) \in \ell_1^{\mathbb{N}}$ τέτοια ώστε: $x_n \xrightarrow{w} 0$ και $x_n \not\xrightarrow{\|\cdot\|} 0$. Τότε από θεώρημα-πρόταση έπεται ότι υπάρχει υπακολουθία $(x_{k_n})_{n\geq 1}$ της $(x_n)_{n\geq 1}$ και $(y_n)_{n\geq 1} \preceq (e_n)_{n\geq 1}$ τέτοια ώστε: $(x_{k_n})_{n\geq 1} \sim (y_n)_{n\geq 1} \overset{\text{θεώρημα}}{\sim} (e_n^{\ell_1})$. Άτοπο αφού: [redacted] $x_{k_n} \xrightarrow{w} 0$ αλλά: e_n [redacted] $\not\xrightarrow{w} 0$ γιατί αφού τώρα $\exists T: \overline{\langle x_{k_n} : n \geq 1 \rangle} \to \overline{\langle e_n : n \in \mathbb{N} \rangle}$ γραμμικός ισομορφισμός, επί με $T(x_{k_n}) = e_n$

έπεται ότι αυτός είναι και w-συνεχής από πρόταση έπεται ότι αφού: $x_{k_n} \xrightarrow{w} 0$

$\Rightarrow T(x_{k_n}) = e_n \xrightarrow{w} 0$ άτοπο αφού που ℓ_1: $e_n \not\xrightarrow{w} 0$ και άρα άτοπο.

- **Θεώρημα:** Έστω X χώρος Banach με την Schur property. Τότε κάθε ασθενώς συμπαγές $\subseteq X$ είναι norm-συμπαγές.

▷ **Απόδειξη:** Έστω $A \subseteq X$ ασθενώς συμπαγές $\subseteq X$. Τότε θα αποδείξουμε ότι είναι norm-συμπαγές. Επομένως αρκεί να αποδείξουμε ότι είναι norm-ακολουθιακά συμπαγές και άρα έστω: $(x_n)_{n\geq 1} \in A^{\mathbb{N}}$ [redacted]. Τότε αφού η ασθενής συμπάγεια είναι ισοδύναμη με την ασθενής ακολουθιακή συμπάγεια από Eberlein-Smulian, έπεται ότι αφού το A είναι ασθενώς συμπαγές έπεται ότι υπάρχει $(x_{k_n})_{n\geq 1}$ υπακολουθία [redacted] της $(x_n)_{n\geq 1}$ και $x \in A$: $x_{k_n} \xrightarrow{w} x$. Τότε όμως αφού ο X έχει την Schur property έπεται ότι: $x_{k_n} \xrightarrow{\|\cdot\|} x$ και άρα έχουμε το ζητούμενο.

- **Πόρισμα:** Αν X είναι αυτοπαθής με την Schur property τότε αυτός είναι πεπερασμένης διάστασης.

▷ **Απόδειξη:** Αφού ο X είναι αυτοπαθής έχουμε από θεώρημα ότι (B_X, τ_w) είναι ασθενώς συμπαγές και άρα και norm-συμπαγές αφού ο X έχει την Schur property, έπεται ότι ο X είναι πεπερασμένης διάστασης.

- **Ορισμός:** Έστω X χώρος Banach και $(x_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία στον X. Η $(x_n)_{n\geq 1} \in X^{\mathbb{N}}$ καλείται <u>ασθενώς-Cauchy</u> ή <u>w-Cauchy</u> αν: $\forall x^* \in X^*: \exists \lim_{n\to\infty} x^*(x_n)$

▷ **Παρατήρηση:** 1). [redacted] Κάθε ασθενώς συγκλίνουσα ακολουθία είναι ασθενώς Cauchy

2). Έστω $(x_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία στον X και $x^{**} \in X^{**}$ τέτοια ώστε: $\hat{x}_n \xrightarrow{w^*} x^{**}$.
Τότε: $\forall x^* \in X^*: x^*(x_n) = \hat{x}_n(x^*) \to x$ [redacted] $(x^*) = \hat{x}(x^*)$ και άρα η $(x_n)_{n\geq 1}$ είναι ασθενώς Cauchy.

3). Τώρα έστω $(x_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία του X που είναι ασθενώς Cauchy. Τότε ορίζουμε:
$x^{**}: X^* \to \mathbb{R}$ τ.ω: $x^{**}(x^*) = \lim_{n\to\infty} x^*(x_n)$, $\forall x^* \in X^*$ το οποίο όριο υπάρχει από υπόθεση.
$= \lim_{n\to\infty} \hat{x}_n(x^*)$

Τώρα το x^{**} είναι και γραμμικό. Τώρα από το Θεώρημα Ομοιόμορφου Φράγματος έχουμε ότι το x^{**} είναι και φραγμένο και $\|x^{**}\| \leq \liminf \|\hat{x}_n\| = \liminf \|x_n\|$.

Τότε $\hat{x}_n \xrightarrow{w^*} x^{**}$ και άρα ισχύει και το αντίστροφο.

1). Αν X είναι ανακλαστικός και $(x_n)_{n\geq 1}$ είναι ασθενώς Cauchy τότε είναι και ασθενώς συγκλίνουσα, γιατί: αν πάρουμε $(x_n)_{n\geq 1}$ που είναι ασθενώς Cauchy τότε δείξαμε ότι υπάρχει $x^{**} \in X^{**}$ τέτοιο ώστε: $\hat{x}_n \xrightarrow{w^*} x^{**}$. Όμως: $X^{**} = \hat{X}$ και άρα υπάρχει $x \in X$ τέτοιο ώστε: $\hat{x}_n \xrightarrow{w^*} \hat{x} \Rightarrow \forall x^* \in X^*: \hat{x}_n(x^*) \to \hat{x}(x^*) \Rightarrow \forall x^* \in X^*: x^*(x_n) \to x^*(x)$

$\Leftrightarrow x_n \xrightarrow{w} x$

- Παρατήρηση:

▷ Ορισμός: Έστω X Banach. Ο X καλείται WSC (weakly sequentially complete) αν κάθε ασθενώς Cauchy είναι και ασθενώς συγκλίνουσα.

- Παρατήρηση: Ο c_0 δεν είναι WSC: Θεωρούμε $\forall n \in \mathbb{N}$: $s_n = e_1 + \dots + e_n$. Τότε: $\hat{s}_n \xrightarrow{w^*} (1,1,\dots,1,1,\dots) \in \ell^\infty / c_0$ και άρα (s_n) είναι ασθενώς Cauchy αλλά όχι ασθενώς συγκλίνουσα, γιατί είναι ασθενώς Cauchy από παρατήρηση 1.., αλλά δεν είναι ασθενώς συγκλίνουσα γιατί $(1,1,\dots,1,\dots) \notin c_0$.

- Παρατήρηση: Ο ℓ_1 είναι WSC: γιατί έχει την Schur property όπως αποδείξαμε πριν

▷ Πρόταση: Έστω X χώρος Banach που έχει την Schur property. Τότε ο X είναι WSC:

- Απόδειξη: Έστω αρχικά $(x_n)_{n\geq 1} \in X^{\mathbb{N}}$ ασθενώς Cauchy. Τότε έχουμε ότι $\forall (x_{k_n})_{n\geq 1}$ και (x_{ℓ_n}) υπακολουθίες της $(x_n)_{n\geq 1}$: $x_{k_n} - x_{\ell_n} \xrightarrow{w} 0$ γιατί αν πάρουμε $x^* \in X^*$: $x^*(x_{k_n} - x_{\ell_n}) = x^*(x_{k_n}) - x^*(x_{\ell_n}) \to 0$ γιατί αφού $(x_n)_{n\geq 1} \in X^{\mathbb{N}}$ είναι ασθενώς Cauchy έπεται ότι: $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x^*(x_n)$ και άρα: $\lim\limits_{n\to\infty} x^*(x_{k_n}) = \lim\limits_{n\to\infty} x^*(x_{\ell_n})$. Επομένως: τώρα αφού ο X έχει και την Schur property: έπεται ότι: $x_{k_n} - x_{\ell_n} \xrightarrow{w} 0 \Rightarrow x_{k_n} - x_{\ell_n} \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$.

Ισχυρισμός: $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$: Υποθέτουμε προς άτοπον ότι $x_n \not\xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ και τότε έχουμε ότι $\exists \varepsilon > 0$: $\forall n_0 \in \mathbb{N}: \exists n, m \geq n_0: \|x_n - x_m\| \geq \varepsilon$. Άτοπο. Επομένως: [redacted]

$x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} 0 \Rightarrow x_n \xrightarrow{w} 0$ αφού $\tau_w \subseteq \tau_{\|\cdot\|}$ γιατί: αν $x^* \in X^*$: $x^*(x_n) \to 0$