- Μάθημα 11ο: Τίτλος: Χώροι Banach.

- <u>Ορισμός</u>: Έστω X χώρος Banach και $(x_n)_{n\geq 1}\in X^{\mathbb{N}}$ ακολουθία του X. Τότε για αυτή λέμε ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ συγκλίνει <u>unconditionally</u> αν: $\forall \pi: \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 1-1 και επί (permutation) η $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$ συγκλίνει.

- <u>Πρόταση</u>: Έστω X χώρος Banach και $(x_n)_{n\geq 1}\in X^{\mathbb{N}}$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

(α). η $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ συγκλίνει unconditionally

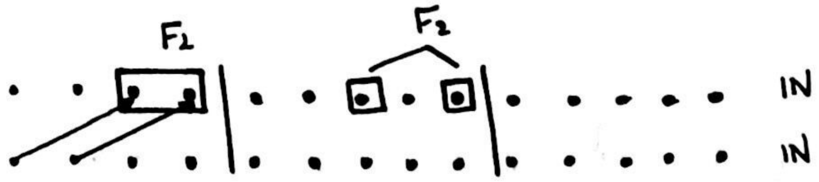
(β). $\forall (k_n)_{n\geq 1}$ γνησίως αύξουσα: $\sum_{n=1}^{\infty} x_{k_n}$ συγκλίνει (και συνεπώς unconditionally)

(γ). $\forall (\varepsilon_n)_{n\geq 1}\in\{-1,1\}^{\mathbb{N}}$ η $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n x_n$ συγκλίνει

(δ). $\forall \varepsilon>0$: $\exists n_0\in\mathbb{N}$ τέτοιο ώστε αν: $F\subseteq\mathbb{N}$ πεπερασμένο και $\min(F)>n_0$: $\|\sum_{j\in F} x_j\|<\varepsilon$.

- <u>Απόδειξη</u>:

<u>1</u> → <u>4</u>.: Προς άτοπον υποθέτουμε ότι: δεν ισχύει το <u>4</u>.: $\exists \varepsilon>0$ τ.ω: $\forall n_0\in\mathbb{N}$: $\exists F_{n_0}\subseteq\mathbb{N}$ πεπερασμένο με $\min F_{n_0}>n_0$ και: $\|\sum_{j\in F_{n_0}} x_j\|\geq\varepsilon$. Τότε υπάρχει $\varepsilon>0$ και $(F_n)_{n\geq 1}$ block ακολουθία στο $\mathbb{N}$ τέτοια ώστε: $\|\sum_{j\in F_n} x_j\|\geq\varepsilon$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Ορίζουμε τώρα: $\pi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ permutation που ικανοποιεί τα εξής:



<u>1</u>: $\pi[|F_1|]=$ [redacted] F_1 $(\pi(j): j<\max F_1)$

<u>2</u>: $\pi([\max F_1])=[\max(F_1)]$

<u>3</u>. $\pi(\{\max(F_1)+1,\dots,\max(F_2)\})=\{\max(F_1)+1,\dots,\max(F_2)\}$

$\vdots$

$\pi(\{\max(F_n)+1,\dots,\max(F_n)+|F_{n+1}|\})=F_{n+1}$

$\pi(\{\max(F_n)+1,\dots,\max(F_{n+1})\})=\{\max(F_n)+1,\dots,\max(F_{n+1})\}$

Τότε η [redacted] $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$ δεν είναι συγκλίνουσα και άρα άτοπο

Scanned with CamScanner

1. → 4.: Έστω $\pi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ permutation δηλ. 1-1 και επί. Αρκεί να αποδείξουμε ότι: η $(s_k)_{k\geq 1}$ είναι Cauchy όπου: $s_k = \sum_{j=1}^{k} x_{\pi(j)}$, $\forall k\in\mathbb{N}$. Έστω $\varepsilon>0$. Τότε από το 4. έπεται ότι υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$: $\forall F\subseteq\mathbb{N}$ πεπερασμένο με $\min F > n_0$: $\|\sum_{j\in F} x_j\| < \varepsilon$.

Τώρα αφού π είναι permutation έπεται ότι: $\exists k_0 \in\mathbb{N}: \pi([k_0]) \supseteq [n_0]$

$\Rightarrow \pi([k_0]) = \{\pi(j): 1\leq j\leq k_0\} \supseteq \{1,\dots,n_0\}$. Τότε $\forall k>\ell\geq k_0$ έχουμε ότι:

$\min(\pi([k])\setminus\pi([\ell])) = \min\{\pi(j):$ [redacted] $\ell+1\leq j\leq k\} > n_0$ και συνεπώς:

$\|s_k - s_\ell\| = \|\sum_{j=\ell+1}^{k} x_{\pi(j)}\| < \varepsilon$.

2. → 3.: Έστω $\varepsilon_n \in\{-1,1\}$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Έστω $P=\{n\in\mathbb{N}: \varepsilon_n=1\}$ και $N=\{n\in\mathbb{N}: \varepsilon_n=-1\}$ και αν τώρα P ή N είναι πεπερασμένο και χ.β.γ το P είναι πεπερασμένο: έπεται ότι: $\exists n_0\in\mathbb{N}: \forall n\geq n_0: \varepsilon_n=-1$ και άρα: $\sum_{n\geq n_0}\varepsilon_n x_n = -\sum_{n\geq n_0} x_n = -\sum_{n\geq n_0} x_{k_n}$ για [redacted] $k_n=n$, $\forall n\in\mathbb{N}$ που είναι γνησίως αύξουσα και άρα από υπόθεση: $-\sum_{n\geq n_0} x_{k_n}$ [redacted] συγκλίνει αφού η $-\sum_{n=1}^{\infty} x_{k_n}$ συγκλίνει, από υπόθεση. Έστω τώρα ότι τα P και N είναι άπειρα και άρα τότε έστω $(k_n)_{n\geq1}$ και $(\ell_n)_{n\geq1}$ ακολουθίες τ.ω.: $P=\{k_n: n\in\mathbb{N}\}$ και [redacted] $N=\{\ell_n: n\in\mathbb{N}\}$. Τότε από υπόθεση οι $\sum_{n=1}^{\infty} x_{k_n}$ και $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\ell_n}$ συγκλίνουν. Τώρα όμως απ' αυτό έπεται ότι: και η $\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n x_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_{k_n} - \sum_{n=1}^{\infty} x_{\ell_n}$ συγκλίνει. (η ισότητα ισχύει γιατί: αν για κάποιο $n\in\mathbb{N}$ ισχύει ότι: $n\in P$ τότε: $\varepsilon_n=1$ και $n\notin N$. Επίσης όμως: αν $n\in P$: έπεται ότι: $\exists n_0\in\mathbb{N}: k_{n_0}=n$ και άρα:

$\varepsilon_{k_{n_0}}=1$ και ~~αφού: $n\notin N$ έπεται ότι:~~ [redacted] ~~$\varepsilon_n \neq$~~

και άρα: $\varepsilon_n x_n = x_n = x_{k_{n_0}}$).

3. → 2.: Έστω $(k_n)_{n\geq1}\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ γνησίως αύξουσα και έστω: $P=\{k_n: n\in\mathbb{N}\}$ και $\varepsilon_n = \begin{cases} 1, & \text{αν } n\in P \\ -1, & \text{αν } n\notin P\end{cases}$.

Τότε από υπόθεση: $\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n x_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ συγκλίνουν, από υπόθεση.

Επομένως και η $\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n x_n + \sum_{n=1}^{\infty} x_n\right) = \sum_{m=1}^{\infty} x_{k_m}$ συγκλίνει και η ισότητα ισχύει:

γιατί: αν πάρουμε $n\in\mathbb{N}$ με $n\in P$ τότε: $n=k_{n_0}$ για κάποιο $n_0\in\mathbb{N}$ και $\varepsilon_n=\varepsilon_{k_{n_0}}=1$ και άρα: $\frac{1}{2}(x_n+x_n) = x_n = x_{k_{n_0}}$ και αν $n\notin P$ τότε: $\varepsilon_n=-1$ και άρα: $\frac{1}{2}(-x_n+x_n)=0$

CS Scanned with CamScanner

• **2 ⟹ 1** [redacted]. Έστω ότι δεν ισχύει η 1 και τότε έχουμε ότι: $\exists\, \varepsilon>0$ και block ακολουθία στο $\mathbb{N}$ έστω: $(F_n)_{n\geq 1}$ τέτοια ώστε: $\left\|\sum_{j\in F_n} x_j\right\| \geq \varepsilon,\ \forall n\in\mathbb{N}$. Έστω τώρα $(k_n)_{n\geq 1}\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ γνησίως αύξουσα με: $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \{k_n : n\in\mathbb{N}\}$. Τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} x_{k_n}$ δεν συγκλίνει.

• **1 ⟹ 2**. Έστω $(k_n)_{n\geq 1}\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ γνησίως αύξουσα ακολουθία και όπου τώρα και: $s_n = \sum_{j=1}^{n} x_{k_j},\ \forall n\in\mathbb{N}$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι αυτή είναι μια Cauchy ακολουθία. Έστω τώρα $\varepsilon>0$. Τότε από το 1.: $\exists\, \ell_0\in\mathbb{N}: \forall F\subseteq\mathbb{N}$ πεπερασμένο με: $\min F>\ell_0$: $\left\|\sum_{j\in F} x_j\right\| < \varepsilon$. Τότε: $\forall n,m\geq \ell_0$ με $n>m$: $\|s_n - s_m\| = \left\|\sum_{j=m+1}^{n} x_{k_j}\right\| < \varepsilon$ γιατί αφού:
$n>m\geq \ell_0 \Rightarrow k_m\geq m\geq \ell_0 \Rightarrow k_n > k_m \geq m\geq \ell_0$.

▷ __Πρόταση:__ Έστω X χώρος Banach και $(x_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία στον X. ΤΕΕΙ:

1. Η $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ συγκλίνει unconditionally
2. $\forall (t_n)_{n\geq 1}\in \ell_\infty^{\mathbb{N}}$: η $\sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n$ συγκλίνει.

– __Απόδειξη:__ **2 ⟹ 1**. Παρατηρούμε ότι αυτό είναι άμεσο αν πάρουμε: ~~$t_n=1, \forall n\in\mathbb{N}$ με: $\|t\|_\infty$~~ ~~...~~ $\varepsilon_n\in\{-1,1\},\ \forall n\in\mathbb{N}$ τότε: $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}\in\ell_\infty^{\mathbb{N}}$ με: $\|$[redacted]$\varepsilon_n\|_\infty \leq 1$ και άρα από υπόθεση: $\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n x_n$ συγκλίνει και από προηγούμενη πρόταση η $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ συγκλίνει unconditionally.

■ **1 ⟹ 2**.: Αρχικά παρατηρούμε ότι αρκεί να το αποδείξουμε για $(t_n)_{n\geq 1}\in B_{\ell_\infty}^{\mathbb{N}}$ (κανονικοποίηση). Έστω επομένως: $(t_n)_{n\geq 1}$ μια ακολουθία στην B_{ℓ_∞}. Ορίζουμε: $\forall k\in\mathbb{N}$: $s_k = \sum_{j=1}^{k} t_j x_j$ και αρκεί να αποδείξουμε ότι αυτή είναι Cauchy ακολουθία αφού ο X Banach. Τώρα: Έστω $\varepsilon>0$. Τότε αφού η $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ συγκλίνει unconditionally έπεται από το (4). της προηγούμενης πρότασης, ότι: $\exists\, n_0\in\mathbb{N}: \forall F\subseteq\mathbb{N}$ πεπερασμένο με: $\min F > n_0$: $\left\|\sum_{j\in F} x_j\right\| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Άρα τώρα: $\forall F\subseteq\mathbb{N}$ πεπερασμένο με $\min(F)>n_0$ και $(\varepsilon_j)_{j\in F}\in\{-1,1\}^{|F|}$ έχουμε:

$$\left\|\sum_{j\in F}\varepsilon_j x_j\right\| \text{[redacted]} \cancel{= \left\|\sum_{j\in F} x_j\right\|} \leq \left\|\sum_{j\in F} x_j\right\| + \left\|\sum_{j\in F} x_j\right\| < \varepsilon$$ από προηγούμενη.

Τώρα έστω $m>n\geq n_0$. Θα αποδείξουμε ότι: $\|s_m - s_n\| < \varepsilon$. Τώρα: $\forall x^*\in B_{X^*}$:

$$|x^*(s_m - s_n)| = \left|\sum_{j=n+1}^{m} x^*(x_j)\, t_j\right| \leq \sum_{j=n+1}^{m} |t_j|\,|x^*(x_j)| \leq \sum_{j=n+1}^{m} |x^*(x_j)|$$

$$= \sum_{j=n+1}^{m} x^*(x_j)\,\mathrm{sgn}(x^*(x_j)) = x^*\left(\sum_{j=n+1}^{m} x_j\,\mathrm{sgn}(x^*(x_j))\right)$$

$$\leq \|x^*\|\,\left\|\sum x_j\,\mathrm{sgn}(x^*(x_j))\right\|$$

Scanned with CamScanner

$\leq \left\| \sum_{j=n+1}^{m} sgn(x^*(x_j))x_j \right\| \leq \left\| \sum_{j=n+1}^{m} sgn(x^*(x_j))x_j \right\| < \varepsilon$ και άρα έχουμε ότι:

$\|s_n - s_m\| < \varepsilon$ από Hahn-Banach αφού: $\|s_n - s_m\| = \sup\{|x^*(s_n - s_m)| : x^* \in B_{X^*}\}$

▶ <u>Ορισμός:</u> Έστω X χώρος Banach και $(x_n)_n$ ακολουθία στον X. Η $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ καλείται <u>weakly unconditional Cauchy (WUC)</u> αν: $\forall x^* \in X^*$: [redacted] η $\sum_{n=1}^{\infty} |x^*(x_n)|$ συγκλίνει.

▶ <u>Πρόταση:</u> Έστω X χώρος Banach και $(x_n)_n \in X^{\mathbb{N}}$ τέτοια ώστε: $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ συγκλίνει δηλαδή στο x και η $\sum_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει <u>unconditionally</u>. Τότε ισχύουν τα εξής:

<u>1</u>. Τότε $\forall \pi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ permutation $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$ (μάλιστα ισοδύναμο της unconditionality κατά προφανή τρόπο [redacted]: για $\pi(n)=n$ που είναι permutation).

<u>2</u>. Τότε $\forall A$ άπειρο: [redacted] $\sum_{n\in A} x_n$ συγκλίνει (μάλιστα είναι ισοδύναμο της unconditionality γιατί αν ισχύει αυτό τότε αν πάρουμε $(k_n)_n$ γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{N}$ τότε: $\{k_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι άπειρο και από υπόθεση: $\sum_{n=1}^{\infty} x_{k_n}$ συγκλίνει και άρα από πρόταση: $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ συγκλίνει unconditionally).

<u>3</u>. Η $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ είναι WUC.

\- <u>Απόδειξη:</u> Αρχικά για το <u>1</u>: Έστω $\pi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ permutation, δηλαδή 1-1 και επί. Έστω ε. Τότε αφού: $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ έπεται ότι: $\exists k_1 \in \mathbb{N}: \forall k \geq k_1: \left\| \sum_{n=1}^{k} x_n - x \right\| < \varepsilon/2$

Τώρα αφού η $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ συγκλίνει unconditionally από το <u>4</u>. της πρότασης έπεται ότι: $\exists k_2 \in \mathbb{N}$: $\forall F \subseteq \mathbb{N}$ πεπερασμένο με $\min F$ [redacted] k_2 έχουμε: $\left\| \sum_{j\in F} x_j \right\| < \varepsilon/2$. Θέτουμε τώρα: $k_3 = \max\{k_1, k_2\}$. Τότε έχουμε ότι υπάρχει $k_4 \in \mathbb{N}$: $\pi([k_4]) = \{\pi(j) : 1 \leq j \leq k_4\} \supseteq \{1, \ldots, k_3\} = [k_3]$. Τότε: $\forall k \geq k_4$: $\left\| x - \sum_{n=1}^{k} x_{\pi(n)} \right\| \leq \left\| x - \sum_{n=1}^{k_4} x_{\pi(n)} \right\| + \left\| \sum_{n=k_4+1}^{k} x_{\pi(n)} \right\|$

$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

γιατί: $\{\pi(j) : k_4 + 1 \leq j \leq k\} \subseteq \mathbb{N}$ πεπερασμένο και το minimum αυτού του συνόλου:

$\min\{\pi(j) : k_4+1 \leq j \leq k\}$ [redacted] $> k_2$ και επίσης: $k_4 \geq k_3 \geq k_1$

CS Scanned with CamScanner

2. Είναι προφανές

3. Με άμεσο τρόπο

- **Παράδειγμα:** Θεωρούμε την ακολουθία $(e_n)_{n\geq 1}$ του c_0. Τότε έχουμε ότι [redacted] η $s_n=\sum_{k=1}^{n} e_k$ δεν είναι ασθενώς συγκλίνουσα, αλλά: $\sum_{n=1}^{\infty} e_n$ είναι WUC από την παρακάτω πρόταση ($s_n = e_1+\dots+e_n$: summing βάση του c_0) γιατί παρατηρούμε ότι: α[redacted]ν πάρουμε $n\in\mathbb{N}$ και $\lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{R}$ τότε: $\|\sum_{k=1}^{n}\lambda_k e_k\|_\infty = \|(\lambda_1,\dots,\lambda_n,0,0,\dots,0,\dots)\|_\infty$ [redacted] $\leq \max_{1\leq i\leq n}|\lambda_i|\cdot 1$ και άρα για $C=1$ από την παρακάτω πρόταση έχουμε το ζητούμενο. Τώρα το ότι η s_n δεν είναι ασθενώς συγκλίνουσα

- **Πρόταση:** Έστω X χώρος Banach και $(x_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία του X. ΤΕΕΙ:

(α). $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ είναι WUC

(β). $\exists$ κάποια $C>0$: $\forall n\in\mathbb{N}$, $\lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{R}$: $\|\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k\| \leq C\max_{1\leq k\leq n}|\lambda_k| \leq C\|(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\|_\infty$

(γ). $\exists$ κάποια $C'>0$: $\forall F\subseteq\mathbb{N}$ πεπερασμένο και $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία προσήμων: $\|\sum_{n\in F}\varepsilon_n x_n\| \leq C'$

Scanned with CamScanner

- Απόδειξη:

$\underline{3} \Rightarrow \underline{1}$. Έχουμε ότι υπάρχει σταθερά $C'>0$ τέτοια ώστε: $\forall F \subseteq \mathbb{N}$ πεπερασμένο και (επίσης κατάλληλη επιλογή προσήμων: $\|\sum_{n\in F} \varepsilon_n x_n\| \le C'$

Έστω τώρα $x^*\in X^*$ και θέτουμε: $\forall n\in\mathbb{N}$: $\varepsilon_n = sgn(x^*(x_n))$. Τώρα σταθεροποιούμε

~~$N\in\mathbb{N}$ και τότε: $\sum_{n=m}^{N} |x^*(x_n)| = \sum_{n=m}^{N} x^*(x_n)\varepsilon_n \le \|x^*\| \, \|\sum_{n=m}^{N} x_n\varepsilon_n\| \le \|x^*\|C'$~~

~~$= x^*(\sum_{n=m}^{N} x_n\varepsilon_n)$.~~

~~$\forall m<N$ και άρα απ' αυτό βλέπουμε εύκολα ότι: τα μερικά αθροίσματα της $\sum_{n=1}^{\infty}|x^*(x_n)|$~~

$N\in\mathbb{N}$ και τότε: $\sum_{n=1}^{N} |x^*(x_n)| = \sum_{n=1}^{N} x^*(x_n)\varepsilon_n = x^*\left(\sum_{n=1}^{N} x_n\varepsilon_n\right) \le \|x^*\| \, \|\sum_{n=1}^{N} x_n\varepsilon_n\|$

$\le \|x^*\|C'$ και άρα έχουμε ότι: η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της $\sum_{n=1}^{\infty}|x^*(x_n)|$ είναι άνω φραγμένη και αύξουσα προφανώς και άρα έπεται ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} x^*(x_n)$ συγκλίνει απολύτως και άρα συγκλίνει. Επομένως αφού το $x^*\in X^*$ ήταν και τυχόν έπεται ότι: η $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ είναι WUC.

$\underline{2} \Rightarrow \underline{3}$: Έχουμε αρχικά ότι: $\exists$ σταθερά $C>0$ τέτοια ώστε: $\forall n\in\mathbb{N}$ και $\forall \lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{R}$:
$\|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\| \le C \max_{1\le i\le n}|\lambda_i|$. Τώρα παρατηρούμε ότι είναι άμεσο για $C'=C$

$\underline{1} \Rightarrow \underline{2}$: Αρχικά παρατηρούμε ότι αρκεί να αποδείξουμε το ζητούμενο για $|\lambda_i|\le 1$, $\forall 1\le i\le n$.
Έστω επομένως $n\in\mathbb{N}$ και $\lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{R}$ τ.ω: $|\lambda_i|\le 1$, $\forall 1\le i\le n$. Τότε: πρέπει να αποδείξουμε ότι: $\|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\| \le C$ για κάποια σταθερά $C>0$ που πρέπει να προσδιορίσουμε.
Τώρα: θεωρούμε τον $S = \{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k : n\in\mathbb{N}, \lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{R}\} \subseteq X$ και παρατηρούμε ότι: $\forall x^*\in X^*$: $\sup_{y\in S}|x^*(y)| \le \|x^*\| \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{n} \|x_k\| \le \|x^*\| \sum_{k=1}^{\infty} |x^*(x_k)| < +\infty$

αφού είναι WUC και άρα Θ.Ο.Φ έχουμε το ζητούμενο.

Scanned with CamScanner

▸ **Πρόταση:** Έστω X χώρος Banach και (x_n) ακολουθία του X.

Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα

1. [redacted] $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ είναι WUC

2. $\exists\, T: c_0 \to X$ γραμμικός, φραγμένος με $T(e_n) = x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

– **Απόδειξη:** Ορίζουμε: $T': c_{00} \to X$ γραμμικό με: $T'(e_n) = x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Τότε παρατηρούμε ότι: T': φραγμένος $\Longleftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ είναι WUC

γιατί παρατηρούμε ότι: αν T': φραγμένος τότε έχουμε ότι αν πάρουμε $n \in \mathbb{N}$ και $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$: $\left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \right\| = \left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k T(e_k) \right\| = \left\| T\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \right) \right\|$ $\leq \|T\| \left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \right\|_{\infty} = \|T\| \, \|(\lambda_1, \dots, \lambda_n)\|_{\infty}$ και άρα από προηγούμενη πρόταση η $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ είναι WUC. Τώρα αν η $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ είναι WUC τότε παρατηρούμε ότι: $\exists$ σταθερά $C > 0$: $\forall n \in \mathbb{N}$: $\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$: $\left\| T\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \right) \right\|$ $\leq C \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i| = \|(\lambda_1, \dots, \lambda_n, 0, 0, \dots)\|_{\infty}$ και άρα ο T είναι φραγμένος.

(c_{00} = οι τελικά μηδενικές ακολουθίες: $c_{00} = \text{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$).

Τώρα όμως γνωρίζουμε ότι: $\overline{c_{00}} = \overline{\text{span}}\{e_n : n \in \mathbb{N}\} = c_0$ δηλαδή είναι πυκνός του c_0 και άρα ο T' είναι φραγμένος $\Longleftrightarrow$ $\exists\, T: c_0 \to X$ συνεχή επέκταση του T από δεδομένα αφού ο c_{00} είναι πυκνός του c_0. Άρα έχουμε το ζητούμενο.

Scanned with CamScanner