– Μάθημα 12ο: Χώροι Banach: Τέλος:

▷ **Λήμμα:** Έστω $X, Y$ χώροι Banach και $F_k: X \to Y$ γραμμικοί και φραγμένοι τ.ω: $\dim F_k[X] < +\infty$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Έστω και $T: X \to Y$ γραμμικός και φραγμένος τ.ω: $F_k \xrightarrow{\|\cdot\|} T$. Τότε ο $T$ είναι συμπαγής τελεστής, δηλαδή: $\overline{T[B_X]}^{\|\cdot\|}$ είναι $\|\cdot\|$-συμπαγές.

– **Απόδειξη:** Έστω $(y_n)_{n\geq 1} \in T(B_X)^{\mathbb{N}}$. Θα αποδείξουμε ότι αυτή έχει Cauchy υπακολουθία και άρα και συγκλίνουσα στο $\overline{T[B_X]}^{\|\cdot\|}$ γιατί αυτός ως κλειστό υποσύνολο του χώρου Banach $Y$ είναι χώρος Banach. Τώρα αφού: $\forall n \in \mathbb{N}$: $y_n \in T[B_X] \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}: \exists x_n \in B_X: T(x_n) = y_n$. Επαγωγικά τώρα επιλέγουμε: $\mathbb{N} \underset{\infty}{\supseteq} X_1 \underset{\infty}{\supseteq} X_2 \supseteq \cdots$ τ.ω: $\forall k \in \mathbb{N}$: $(F_k(x_n))_{n\in X_k}$ να είναι Cauchy (για $k=1$: $F_1(x_n) \in F_1[X]$, $\forall n \in \mathbb{N}$ και αφού: $\dim F_1(X) < +\infty$ έπεται ότι: $\exists X_1 \underset{\infty}{\subseteq} \mathbb{N}$: $(F_1(x_n))_{n\in X_1}$ να είναι Cauchy και συνεχίζουμε με όμοιο τρόπο). Επιλέγουμε $X_\infty \subseteq \mathbb{N}$ άπειρο διαγώνιο των $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ δηλαδή: $X_\infty \setminus X_k$ πεπερασμένο $\forall k \in \mathbb{N}$. Τότε: $\forall k \in \mathbb{N}$: $(F_k(x_n))_{n\in X_\infty}$ είναι Cauchy, $\forall k \in \mathbb{N}$. Θα αποδείξουμε ότι: $(T(x_n))_{n\in X_\infty} = (y_n)_{n \in X_\infty}$ είναι Cauchy και θα έχουμε το ζητούμενο. Έστω $\varepsilon > 0$: τότε αφού: $F_k \xrightarrow{\|\cdot\|} T$ έπεται ότι: $\exists k_0 \in \mathbb{N}: \forall k \geq k_0: \|F_k - T\| < \varepsilon/3$. Τώρα έχουμε ότι $(F_{k_0}(x_n))_{n\in X_\infty}$ είναι Cauchy και άρα: $\exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n, m \in X_\infty$ με $n > m \geq n_0$: $\|F_{k_0}(x_n) - F_{k_0}(x_m)\| < \varepsilon/3$.
Συνεπώς τώρα: $\forall n > m \geq n_0$ ($n, m \in X_\infty$):

$$\|T(x_n) - T(x_m)\| \leq \|T(x_n) - F_{k_0}(x_n)\| + \|F_{k_0}(x_n) - F_{k_0}(x_m)\| + \|F_{k_0}(x_m) - T(x_m)\| \leq \|T - F_{k_0}\| \, \underbrace{\|x_n\|}_{} + \frac{\varepsilon}{3} + \|F_{k_0} - T\| \, \underbrace{\|x_m\|}_{\in B_X} \leq 2\|T - F_{k_0}\| + \frac{\varepsilon}{3} < \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

και άρα έχουμε το ζητούμενο.

▶ Πρόταση: Έστω $X$ χώρος Banach και $(x_n)_{n\geq 1}\in X^{\mathbb{N}}$ τ.ω: $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ WUC.

Τα εξής είναι ισοδύναμα:

(α). Η $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ συγκλίνει unconditionally

(β). Ο γραμμικός και φραγμένος $T: c_0 \to X$ με $T(e_n)=x_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$ είναι συμπαγής.

- Απόδειξη:

(α)⇒(β). Αρχικά παρατηρούμε ότι αν θεωρήσουμε τις κανονικές προβολές $P_n: c_0 \to$ [redacted] $c_0$ του $c_0$ (έχει Schauder βάση την $(e_n)_{n\geq 1}$), τότε έχουμε ότι: $\forall n\in\mathbb{N}$: $T\circ P_n: c_0 \to X$ είναι γραμμικός και φραγμένος ως σύνθεση τέτοιων με: $\dim T\circ P_n[c_0] < +\infty$ γιατί παρατηρούμε ότι ~~αν $a=(a_n)_{n\geq 1}\in c_0$ τότε: $a_n \to 0$ και $\forall n\in\mathbb{N}$: $T\circ P_n(e_k)=$~~ ~~$P_n: c_0 \to \langle e_n\rangle \Rightarrow T\circ P_n: \langle e_n\rangle \to \langle e_n\rangle$~~ $\dim T\circ P_n[c_0] \leq n < +\infty$ $\forall n\in\mathbb{N}$. Αρκεί τώρα από προηγούμενη πρόταση να αποδείξουμε ότι: $T\circ P_n \xrightarrow{\|\cdot\|} T$.

Τώρα παρατηρούμε ότι: $\forall n\in\mathbb{N}$: $\|T-T\circ P_n\| = \sup_{\xi\in B_{c_0}} \|(T-T\circ P_n)(\xi)\| = \sup_{\xi\in B_{c_0}} \sup_{x^*\in B_{X^*}} |x^*((T-T\circ P_n)$

γιατί αν $x\in X$: $\|x\| = \sup\{|x^*(x)| : x^*\in X^* \text{ με: } \|x^*\|\leq 1\}$ από Hahn-Banach. Τώρα παρατηρούμε ότι: αν πάρουμε $\varepsilon>0$ τότε αφού η $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ συγκλίνει unconditionally από πρόταση έπεται ότι: $\exists n_0\in\mathbb{N}$: $\forall F\subseteq\mathbb{N}$ πεπερασμένο με $\min(F)>n_0$: $\|\sum_{j\in F} x_j\| < \frac{\varepsilon}{2}$ και άρα: $\forall F\subseteq\mathbb{N}$ πεπερασμένο με $\min(F)>n_0$ και $(\varepsilon_j)_{j\in F}\in\{-1,1\}^F$ έχουμε ότι: $\|\sum_{j\in F}\varepsilon_j x_j\| < \varepsilon$ ⊛ από τριγωνική ανισότητα. Άρα τώρα έχουμε ότι: $\forall (\xi_k)_{k\geq 1} = \xi \in B_{c_0}$, $x^*\in B_{X^*}$: και $F\subseteq\mathbb{N}$ πεπερασμένο με $\min(F)>n_0$: $|x^*(\sum_{j\in F}\xi_j x_j)| =$

$|\sum_{j\in F}\xi_j x^*(x_j)| \leq \sum_{j\in F}|\xi_j||x^*(x_j)| \leq \sum_{j\in F}|x^*(x_j)| = \sum_{j\in F}x^*(x_j)\,\mathrm{sgn}(x^*(x_j)) = x^*(\sum_{j\in F}\mathrm{sgn}(x^*(x_j))x_j)$

$\leq \|x^*\|\,\|\sum_{j\in F}\mathrm{sgn}(x^*(x_j))x_j\| \leq \|\sum_{j\in F}\mathrm{sgn}(x^*(x_j))x_j\| < \varepsilon$ από την ⊛ και άρα: παίρνοντας supremum ως προς τα $x^*\in$ [redacted] $B_{X^*}$: $\forall \xi=(\xi_k)_{k\geq 1}\in B_{c_0}$ και $F\subseteq\mathbb{N}$ πεπερασμένο με $\min(F)>n_0$: $\|\sum_{j\in F}\xi_j x_j\| < \varepsilon$ και άρα τώρα: $\forall \xi=(\xi_k)_{k\geq 1}\in B_{c_0}$ και $\forall m\geq n\geq n_0$: $\|\sum_{j=n+1}^{m}\xi_j x_j\| < \varepsilon$. Επομένως: $\forall \xi = (\xi_k)_{k\geq 1}\in B_{c_0}$

και $\forall n \geq n_0$: $\left\| \sum_{j=n+1}^{\infty} \xi_j x_j \right\| < \varepsilon$. **

Παρατηρούμε όμως ότι: $\forall\, \underline{\xi} = (\xi_k)_{k\geq 1} \in c_0$ έχουμε ότι: $(T - T\circ P_n)(\underline{\xi}) =$

$$T(\underline{\xi}) - T\circ P_n(\underline{\xi}) = T\left(\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k\right) - T\circ P_n\left(\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k x_k - T\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k x_k - \sum_{k=1}^{n} \xi_k x_k = \sum_{k=n+1}^{\infty} \xi_k x_k$$

λόγω γραμμικότητας και συνέχειας του $T$.

Επομένως: $\forall\, \underline{\xi} = (\xi_k) \in B_{c_0}$: $\|(T - T\circ P_n)(\underline{\xi})\| < \varepsilon$ από την ** και άρα παίρνοντας supremum ως προς $\underline{\xi} = (\xi_k) \in B_{c_0}$ έχουμε ότι: $\forall n \geq n_0$: $\|T - T\circ P_n\| \leq \varepsilon$ και αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν έπεται το ζητούμενο

– (β)⇒(α): Έστω $\varepsilon_n \in \{-1, 1\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Θα αποδείξουμε ότι: $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n x_n$ συγκλίνει και από πρόταση θα έχουμε ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ συγκλίνει unconditionally. Έστω $\forall k \in \mathbb{N}$: $s_k = \sum_{j=1}^{k} \varepsilon_j x_j$. Τώρα παρατηρούμε ότι: αφού η $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ είναι WUC έπεται ότι: $\forall x^* \in X^*$: $\sum_{n=1}^{\infty} |x^*(x_n)| < +\infty \Rightarrow \forall x^* \in X^*$: $\sum_{n=1}^{\infty} x^*(x_n)$ συγκλίνει $\Rightarrow \forall x^* \in X^*$:

$s_k^* = x^*(x_1) + \dots + x^*(x_k) = \sum_{j=1}^{k} x^*(x_j) = x^*\left(\sum_{j=1}^{k} x_j\right) = x^*(s_k)$ [redacted] ~~→ 0 και άρα~~

και το όριο [redacted] της $(x^*(s_k))_{k\in\mathbb{N}}$ υπάρχει και άρα: εφ' όσον η $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ είναι w-Cauchy ή ασθενώς Cauchy. Επομένως τώρα από πρόταση έπεται ότι: $\exists x^{**} \in X^{**}$: $\hat{s}_k \longrightarrow x^{**} \in X^{**}$. Αφού όμως τώρα: $\forall k \in \mathbb{N}$: $s_k \in T[B_{c_0}]$ και $\overline{T[B_{c_0}]}^{\|\cdot\|}$ είναι συμπαγές έπεται ότι υπάρχει υπακολουθία $(s_{k_n})$ της $(s_n)_{n\geq 1}$ και $x \in X$ τ.ω: $s_{k_n} \xrightarrow{\|\cdot\|} x$. Τότε όμως έχουμε ότι: $\hat{s}_{k_n} \xrightarrow{\|\cdot\|} \hat{x}$ και αφού από την άλλη: $\hat{s}_{k_n} \xrightarrow{\|\cdot\|} x^{**}$ έπεται ότι: $\hat{x} = x^{**}$. Άρα: $\hat{s}_k \xrightarrow{\|\cdot\|} \hat{x}$ και άρα: $\hat{s}_k \xrightarrow{w^*} \hat{x}$. Τελικά έχουμε ότι: $s_k \xrightarrow{w} x \overset{?}{\Rightarrow} s_k \xrightarrow{\|\cdot\|} x$ και επομένως έχουμε το ζητούμενο. (Αφού: $\hat{s}_k \xrightarrow{w^*} \hat{x} \Rightarrow \forall x^* \in X^*$: $\hat{s}_k(x^*) = x^*(s_k) \to \hat{x}(x^*) = x^*(x) \Rightarrow s_k \xrightarrow{w} x$. Επίσης αφού: $\hat{s}_k \xrightarrow{\|\cdot\|} \hat{x}$ έπεται ότι: $\hat{s}_k \xrightarrow{w^*} \hat{x}$ γιατί: $\tau_{w^*} \subseteq \tau_{\|\cdot\|_{X^*}}$.
Τέλος παρατηρούμε ότι: αφού: $s_{k_n} \xrightarrow{\|\cdot\|} x \Rightarrow \hat{s}_{k_n} \xrightarrow{\|\cdot\|} \hat{x}$ γιατί έχουμε ότι η ^ είναι συνεχής).

- Παρατηρήσεις:

1. Είχαμε δει ότι αν $X$ είναι ένας χώρος Banach και $(x_n)_{n\geq 1} \in X^{\mathbb{N}}$, τότε ισχύει από πρόταση ότι: η $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ είναι WUC <=> έχει άνω $c_0$.

2. Έστω $X$ χώρος Banach και $(x_n)_{n\geq 1} \in X^{\mathbb{N}}$, Schauder βασική ακολουθία, για την οποία ισχύει ότι: $\|x_n\| \geq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$, όπου $M>0$ σταθερά. Τότε η $(x_n)_{n\geq 1}$ έχει κάτω $c_0$: γιατί: αν $C = \left( \frac{2bc((x_n)_{n\geq 1})}{M} \right)^{-1} > 0$ τότε αν πάρουμε $n \in \mathbb{N}$ και $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$: τότε παρατηρούμε ότι [redacted] βρίσκουμε $j_0 \in [n]$: $|\lambda_{j_0}| = \max_{1\leq j\leq n} |\lambda_j|$ και έχουμε ότι:

$$\|(\lambda_1, \dots, \lambda_n)\|_\infty = |\lambda_{j_0}| \leq \frac{\|x_{j_0}\|}{M} |\lambda_{j_0}| = \frac{1}{M} \|\lambda_{j_0} x_{j_0}\| = \frac{1}{M} \left\| \sum_{k=1}^{j_0} \lambda_k x_k - \sum_{k=1}^{j_0-1} \lambda_k x_k \right\|$$

$$\leq \frac{2bc((x_n))}{M} \left\| \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \right\|$$

και άρα έχουμε το ζητούμενο.

▷ Θεώρημα: Έστω $X$ χώρος Banach και $T: c_0 \to X$ γραμμικός και φραγμένος. Τα εξής είναι ισοδύναμα: (α). Ο $T$ είναι συμπαγής, (β). Ο $T$ είναι ασθενώς συμπαγής (γ). Ο $T$ είναι strictly singular.

- Απόδειξη: (β)$\Rightarrow$(γ): Προς άτοπο υποθέτουμε ότι: ο $T$ δεν είναι strictly singular και άρα έχουμε ότι $\exists Y \subset_{\triangleright} c_0$ κλειστός, απειροδιάστατος τέτοιος ώστε: $T|_Y$ ισομορφισμός. Τότε παρατηρούμε ότι: $T(B_Y)$ είναι προφανώς κυρτό αφού $B_Y$ είναι κυρτό και $T$ γραμμικός, και επίσης είναι και κλειστό αφού: $T$ ισομορφισμός και $B_Y$ είναι κλειστό υποσύνολο του $Y$. Επομένως από Θεώρημα Mazur έπεται ότι: $T(B_Y)$ είναι και ασθενώς κλειστό υποσύνολο του $\overline{T(B_X)}^{w}$ που είναι ασθενώς συμπαγές και άρα $T(B_Y)$ είναι και αυτό ασθεν[redacted]ως συμπαγές και άρα και $B_Y$ είναι ασθενώς συμπαγές γιατί: $T|_Y$ είναι ισομορφισμός.
Αφού τώρα: $B_Y$ είναι ασθενώς συμπαγές από πρόταση έπεται ότι ο $Y$ είναι αυτοπαθής.
Τώρα αφού $Y \subset_{\triangleright} c_0$ κλειστός + απειροδιάστατος από πρόταση έπεται ότι υπάρχει $Z \subset_{\triangleright} Y$ με: $Z \sim c_0$.
Αφού όμως: $Z \subset_{\triangleright} Y$ και $Y$ αυτοπαθής $\Rightarrow$ $Z$: αυτοπαθής και αφού $Z \sim c_0 \Rightarrow$ $c_0$: αυτοπαθής άτοπο.

(β)$\Rightarrow$(α): Προς άτοπον υποθέτουμε ότι ο $T$ δεν είναι συμπαγής.

Η $\sum_{n=1}^{\infty} T(e_n)$ είναι WUC και δεν συγκλίνει unconditionally από προηγούμενες προτάσεις που είδαμε. Άρα αφού δεν συγκλίνει unconditionally έπεται από πρόταση ότι υπάρχει $\varepsilon>0$ και $(F_n)_{n\geq 1}$ block ακολουθία υποσυνόλων του [redacted] $\mathbb{N}$ τ.ω: $\varepsilon \leq \| \sum_{j\in F_n} T(e_j)\| \leq \|T\|$. (*) Ορίζουμε τώρα: $\forall n\in\mathbb{N}$: $u_n = \sum_{j\in F_n} e_n$ και $x_n = T(e_n)$ και άρα έχουμε ότι: αφού τώρα $(u_n)_{n\geq 1} \trianglelefteq (e_n)_{n\geq 1}$ όπου: $(e_n)_{n\geq 1}$ η Schauder βάση του $c_0$, έπεται από πρόταση ότι: $u_n \xrightarrow{w} 0$ και αφού: $(u_n)\sim(e_n)$ και $e_n \xrightarrow{w} 0$ και συνεπώς: $T(u_n) = x_n \xrightarrow{w} 0$ και η $(x_n)_{n\geq 1}$ είναι ημινορμαρισμένη από την (*) [redacted]

Τώρα από πρόταση έπεται ότι υπάρχει υπακολουθία $(x_{e_n})_{n\geq 1}$ της $(x_n)_{n\geq 1}$:

$(x_{e_n}) \sim (e_n^{c_0}) \sim (u_{e_n})$. Καθώς τώρα: $T(u_{e_n}) = x_{e_n}$ έπεται ότι: $T|_{\overline{\langle u_{e_n}: n\geq 1\rangle}}$ ισομορφισμός και άρα άτοπο. $\rightarrow$ από πρόταση που έχουμε δει

(α)$\Rightarrow$(β): Έστω αρχικά ότι ο $T$ είναι συμπαγής και τότε θα αποδείξουμε ότι είναι ασθενώς συμπαγής και άρα δηλαδή ότι: $\overline{T(B_X)}^{w}$ είναι ασθενώς συμπαγές. Παρατηρούμε τώρα ότι: αφού ο $T$ είναι συμπαγής έπεται ότι: $\overline{T(B_X)}^{\|\cdot\|}$ είναι norm-συμπαγές. Τώρα παρατηρούμε ότι: $\overline{T(B_X)}^{\|\cdot\|} = \overline{T(B_X)}^{w}$ γιατί αρχικά παρατηρούμε ότι: [redacted] $\overline{T(B_X)}^{w}$ είναι ασθενώς κλειστό και άρα και norm-κλειστό και αφού: $T(B_X) \subseteq \overline{T(B_X)}^{w}$ έπεται ότι: $\overline{T(B_X)}^{\|\cdot\|} \subseteq \overline{T(B_X)}^{w}$. Από την άλλη: $\overline{T(B_X)}^{\|\cdot\|}$ είναι norm-κλειστό και κυρτό και άρα από Mazur έπεται ότι είναι και ασθενώς κλειστό και αφού: $T(B_X) \subseteq \overline{T(B_X)}^{\|\cdot\|}$ $\Rightarrow \overline{T(B_X)}^{w} \subseteq \overline{T(B_X)}^{\|\cdot\|}$ και άρα: $\overline{T(B_X)}^{w} = \overline{T(B_X)}^{\|\cdot\|}$. Τώρα παρατηρούμε ότι: αν θεωρήσουμε τον τελεστή: $I_d : (B, \tau_{\|\cdot\|}) \to (B, \tau_w)$ όπου: $B = \overline{T(B_X)}^{w} = \overline{T(B_X)}^{\|\cdot\|}$ είναι συνεχής και άρα αφού: $B = \overline{T(B_X)}^{\|\cdot\|}$ είναι συμπαγές $\Rightarrow I_d(B) = B = \overline{T(B_X)}^{w}$ είναι $\tau_w$-συμπαγές. Επομένως έχουμε το ζητούμενο.

- <u>Παρατήρηση</u>: Από ορισμό κλειστότητας και θεώρημα Mazur: $\overline{A}^{w} = \overline{A}^{\|\cdot\|}$, $\forall A \subseteq X$ κυρτό

- **Θεώρημα:** Έστω $X$ χώρος Banach. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

(α). Ο $X$ δεν περιέχει υπόχωρο ισόμορφο με τον $c_0$

(β). Κάθε WUC σειρά είναι unconditionally συγκλίνουσα.

- **Απόδειξη:** [redacted]

(α)$\Rightarrow$(β).: Έστω $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ που είναι WUC. Τότε όπως είχαμε δει από πρόταση $\exists\ T: c_0 \to X$ γραμμικός και φραγμένος με $T(e_n)=x_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Αρκεί από πρόταση να αποδείξουμε ότι ο $T$ είναι συμπαγής. Μάλιστα από πρόταση που είδαμε αρκεί να αποδείξουμε ότι είναι strictly singular. Προς άτοπον υποθέτουμε ότι ο $T$ δεν είναι strictly singular και άρα $\exists\ Y \hookrightarrow c_0$ κλειστός απειροδιάστατος τέτοιος ώστε: $T|_Y$ είναι ισομορφισμός, δηλαδή: $T: Y \to T(Y) \hookrightarrow$ $X$ [redacted] είναι ισομορφισμός. Τότε όπως από πρόταση υπάρχει $Z \hookrightarrow Y$ κλειστός τέτοιος ώστε: $Z \sim c_0$. Τώρα όμως αφού: και $T|_Z$ είναι ισομορφισμός γιατί $Z \hookrightarrow Y$ έπεται ότι $T(Z) \sim Z \sim c_0$ όπου: $T(Z) \hookrightarrow X$ και άρα άτοπο από υπόθεση.

(β)$\Rightarrow$(α).: Προς άτοπον υποθέτουμε ότι υπάρχει $\exists\ T: c_0 \to X$ ισομορφισμός (όχι επί). Τότε έχουμε από πρόταση ότι: $\sum_{n=1}^{\infty} T(e_n)$ είναι WUC και δεν είναι unconditionally συγκλίνουσα γιατί ο $T$ δεν είναι συμπαγής, αφού δεν είναι stricly singular, και άρα άτοπο από την υπόθεση (β).

- **Παρατήρηση:** Έστω $X$ χώρος Banach και $(x_n)_{n\geq 1} \in X^{\mathbb{N}}$ τω $\forall (n_k)_{k\geq 1}$ γνησίως αύξουσα: $\left(\sum_{k=1}^{N} x_{n_k}\right)_{N\geq 1}$ είναι ασθενώς συγκλίνουσα. Τότε <u>θα λέμε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} x_{n_k}$ είναι ασθενώς συγκλίνουσα.</u>

- **Παρατήρηση:** Έστω $X$ χώρος Banach και $(x_n)_{n\geq 1} \in X^{\mathbb{N}}$. Αν $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ είναι unconditionally συγκλίνουσα τότε: $\forall (n_k)_{k\geq 1}$ γνησίως αύξουσα $\sum_{k=1}^{\infty} x_{n_k}$ είναι ασθενώς συγκλίνουσα το οποίο ισχύει [redacted] γιατί: $\forall (n_k)_{k\geq 1}$ γνησίως αύξουσα η $\sum_{k=1}^{\infty} x_{n_k}$ συγκλίνει $\Rightarrow s_N = \sum_{k=1}^{N} x_{n_k}$ είναι συγκλίνει $\Rightarrow (s_N)_{N\geq 1}$ ασθενώς συγκλίνουσα

- <u>Παρατηρήσεις:</u>

1. Έστω $M_0 = \{(a_n)_{n\geq 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \{a_n : n\in\mathbb{N}\} = \text{πεπερασμένο}\}$. Τότε: $M_0$ ~~το όσο~~ πυκνός (το οποίο έχει τετριμμένη απόδειξη).

2. Έστω $X, Y$ χώροι Banach και $T: X \to Y$ γραμμικός και φραγμένος. Τότε: $T^*: (Y^*, \tau_{w^*_{Y^*}}) \to (X^*, \tau_{w^*_X})$ είναι συνεχής γιατί παρατηρούμε:

~~ότι αν πάρουμε: μια ασθενής * περιοχή του $(X^*, \tau_{w^*_X})$ τότε έχουμε ότι αυτή είναι~~

~~$y_0^* \in Y^*$ και πάρουμε και $x_1, \dots, x_n \in X$ όπου $n\in\mathbb{N}$ και $\varepsilon>0$ τότε έχουμε ότι: $W(T(y_0^*), x_1, \dots, x_n, \varepsilon)$ είναι μια ασθενής * περιοχή βασική του [redacted] $T(y_0^*)$~~

~~και: $T^{-1}(W(T^*(y_0^*), x_1, \dots, x_n, \varepsilon)) = T^{-1}(\{x \in X^* : |x^*(x_i) -$~~

$$(T^*)^{-1}(W(T^*(y_0^*), x_1, \dots, x_n, \varepsilon)) = \{y^* \in Y^* : T^*(y^*) \in W(T^*(y_0^*), x_1, \dots, x_n, \varepsilon)\}$$

$$= \{y^* \in Y^* : |T^*(y^*)(x_i) - (T^*(y_0^*))(x_i)| < \varepsilon, \ \forall i=1,\dots,n\}$$

$$= \{y^* \in Y^* : |y^* \circ T(x_i) - y_0^* \circ T(x_i)| < \varepsilon, \ \forall i=1,\dots,n\}$$

$$= \{y^* \in Y^* : |y^*(T(x_i)) - y_0^*(T(x_i))| < \varepsilon, \ \forall i=1,\dots,n\}$$

$= W(y_0^*, T(x_1), \dots, T(x_n), \varepsilon)$ και άρα αφού ο $T^*$ αντιστρέφει τις βασικές περιοχές σε βασικές περιοχές έπεται ότι είναι συνεχής αφού: $W(T^*(y_0^*), x_1, \dots, x_n, \varepsilon)$ είναι τυχούσα βασική περιοχή του $(X^*, \tau_{w^*_X})$

3. Αν $X, Y$ είναι χώροι Banach και $T: X \to Y$ είναι γραμμικός και φραγμένος

τότε:
$$\begin{tikzcd} X^{**} \arrow[r, "T^{**}"] & Y^{**} \\ X \arrow[u, "\Lambda_X"] \arrow[r, "T"'] & Y \arrow[u, "\Lambda_Y"'] \end{tikzcd}$$
: $T^{**} \circ$ [redacted] $\Lambda_X = \Lambda_Y \circ T$

όπου: $T^{**}: X^{**} \to Y^{**}$

αφού: $T^*: Y^* \to X^*$

- Πράγματι παρατηρούμε ότι: αν πάρουμε $x \in X$: $T^{**} \circ \Lambda_X(x) = T^{**}(\hat{x}) \in Y^{**}$ και άρα έστω: $y^* \in Y^*$, $T^{**}(\hat{x})(y^*) = \hat{x}(T^*(y^*)) = \hat{x}(y^* \circ T)$

$= (y^* \circ T)(x) = y^*(T(x)) = \hat{T(x)}^{Y}$ και άρα έχουμε το ζητούμενο.

1. Έστω $X, Y$ χώροι Banach και $T: X \to Y$ γραμμικός και φραγμένος, και τότε ορίζονται οι τελεστές $T^*: Y^* \to X^*$ και $T^{**}: X^{**} \to Y^{**}$ οι οποίοι είναι γραμμικοί και φραγμένοι.

- Μάθαμε ισχύει ότι: $T^{**}(\overset{\Lambda_X}{\widehat{B_X}}) = \overset{\Lambda_Y}{\widehat{T(B_X)}}$. Επίσης αν υποθέσουμε επιπλέον ότι: $T^{**}: X^{**} \to \hat{Y}$ τότε ο $T$ είναι ασθενώς συμπαγής.

► Πράγματι παρατηρούμε ότι αφού: [redacted] $\overset{\Lambda_Y}{\widehat{T(B_X)}} = T^{**}(\overset{\Lambda_X}{\widehat{B_X}})$

έχουμε ότι: $T(B_X) = \Lambda_Y^{-1}[T^{**}[\overset{\Lambda_X}{\widehat{B_X}}]] \overset{⊛}{\subseteq} \Lambda_Y^{-1}[T^{**}[B_{X^{**}}]]$

Τώρα αφού: $B_{X^{**}}$ είναι $w^*$-συμπαγές ($\tau_{w^*}^{X^{**}}$-) έπεται ότι από [redacted] 2.

$T^{**}[B_{X^{**}}]$ είναι συμπαγές λόγω συνέχειας του: $T^{**}: (X^{**}, \tau_{w^*}^{X^{**}}) \to (Y^{**}, \tau_{w^*}^{Y^{**}})$, και επίσης: $T^{**}[B_{X^{**}}] \subseteq \hat{Y}$ από την υπόθεσή μας.

Επομένως: $\Lambda_Y^{-1}[T^{**}[B_{X^{**}}]]$ είναι $\tau_w$-συμπαγές και άρα $T(B_X)$ είναι σχετικά ασθενώς συμπαγές από την ⊛ και άρα έχουμε το ζητούμενο.

► <u>Θεώρημα:</u> (Orlicz-Pettis): Έστω $X$ ένας χώρος Banach και $(x_n)_{n\geq 1} \in X^{\mathbb{N}}$ τ.ω: $\forall (n_k)_{k\geq 1} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ γνησίως αύξουσα η $\sum_{k=1}^{\infty} x_{n_k}$ είναι ασθενώς συγκλίνουσα. Τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ είναι unconditionally συγκλίνουσα.

- <u>Απόδειξη:</u> <u>Ισχυρισμός:</u> $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ είναι WUC:

<u>Απόδειξη:</u> Έστω $x^* \in X^*$. Τότε ορίζουμε $P = \{n \in \mathbb{N}: x^*(x_n) > 0\}$ και $N = \{n \in \mathbb{N}: x^*(x_n) < 0\}$. Υποθέτουμε ότι και τα 2 είναι άπειρα (αλλιώς άμεσο). Έστω τώρα $(n_k), (m_k) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ γνησίως αύξουσες τέτοιες ώστε: $N = \{n_k : k \geq 1\}$ και $P = \{m_k : k \geq 1\}$. Από υπόθεση έχουμε ότι: $\sum_{k=1}^{\infty} x^*(x_{n_k})$ και $\sum_{k=1}^{\infty} x^*(x_{m_k})$ συγκλίνουν και άρα συγκλίνει και η

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^*(x_{n_k}) - \sum_{k=1}^{\infty} x^*(x_{m_k}) = \sum_{n=1}^{\infty} |x^*(x_n)|$$

και άρα έχουμε το ζητούμενο.

Επομένως από πρόταση έπεται ότι υπάρχει $T: c_0 \to X$ γραμμικός και φραγμένος με $T(e_n)=x_n, \forall n\in\mathbb{N}$. Αρκεί τώρα από πρόταση να αποδείξουμε ότι ο $T$ είναι ασθενώς συμπαγής, δηλαδή: $\overline{T(B_X)}^{w}$ είναι $w$-συμπαγές. Από παρατήρηση 1 αρκεί να αποδείξουμε ότι: $T^{**}: \ell_\infty \to \hat{X}$. Για κάθε $A\subseteq\mathbb{N}$ ορίζουμε $\chi_A\in\ell_\infty$ με $\chi_A(k)=\begin{cases}1, & k\in A\\ 0, & k\notin A\end{cases}, \forall k\in\mathbb{N}$.

<u>Ισχυρισμός:</u> $\forall A\subseteq\mathbb{N}: \ T^{**}(\chi_A)\in\hat{X}$:

<u>Απόδειξη:</u> Έστω $A\subseteq\mathbb{N}$ άπειρο (αλλιώς άμεση). Έστω $(n_k)_{k\geq 1}$ γνησίως αύξουσα τέτοια ώστε: $A=\{n_k: k\geq 1\}$. Από υπόθεση έχουμε ότι $\sum_{k=1}^{\infty} x_{n_k}$ είναι ασθενώς συγκλίνουσα και άρα: $\exists z_A\in X: \ z_A = \lim\limits_{N\to\infty}^{\tau\omega} \sum_{k=1}^{N} x_{n_k}$ και άρα: $\hat{X}\ni \hat{z}_A =$

$$\hat{z}_A = \lim_{N\to\infty}^{\tau\omega^*} \widehat{\sum_{k=1}^{N} x_{n_k}} = \lim_{N\to\infty}^{\tau\omega^*} \sum_{k=1}^{N} \hat{x}_{n_k} = \lim_{N\to\infty}^{\tau\omega^*} \sum_{k=1}^{N} T^{**}(\hat{e}_{n_k})$$

$$= [redacted] \lim_{N\to\infty}^{\tau\omega^*} T^{**}\left(\sum_{k=1}^{N} \hat{e}_{n_k}\right) = T^{**}\left(\lim_{N\to\infty}^{\tau\omega^*} \sum_{k=1}^{N} \hat{e}_{n_k}\right) \overset{(*)}{=} T^{**}(\chi_A)$$

από συνέχεια του $T^{**}$ και το γεγονός ότι είναι και γραμμικός, και άρα αρκεί να αποδείξουμε ότι: $\sum_{k=1}^{N} \hat{e}_{n_k} \xrightarrow{\tau\omega^*} \chi_A \iff \sum_{k=1}^{N} \hat{e}_{n_k} = \widehat{e_{n_1}+\dots+e_{n_N}}^{\,c_0} \xrightarrow{w^*} \chi_A$

$\iff \widehat{e_{n_1}+\dots+e_{n_N}}^{\,c_0} \xrightarrow{w^*} \chi_A \overset{(2)}{\iff}$

- Τώρα αφού $M_0 \hookrightarrow \ell_\infty$ πυκνός και $M_0 = \langle\{\chi_A: A\subseteq\mathbb{N}\}\rangle$ έχουμε ότι:

[redacted] $T^{**}(M_0)\subseteq\hat{X}$ αφού $\forall A\subseteq\mathbb{N}: T^{**}(\chi_A)\in$ [redacted] $\hat{X}$. Αφού όμως $M_0 \hookrightarrow \ell_\infty$ πυκνός και $T^{**}$ συνεχής έπεται ότι και: $T^{**}(\ell_\infty) \hookrightarrow \hat{X}$ και άρα έχουμε το ζητούμενο.

- **Πόρισμα:** Έστω $X$ Banach. Αν ο $X$ είναι WSC τότε κάθε WUC σειρά είναι unconditionally συγκλίνουσα.

- **Απόδειξη:** Έστω $(x_n)_{n\geq 1}\in X^{\mathbb{N}}$ όπου $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ είναι WUC. Τότε παρατηρούμε ότι: $\forall x^*\in X^*$ και $(n_k)_{k\geq 1}\in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ γνησίως αύξουσα έχουμε ότι: $\sum_{k=1}^{\infty}|x^*(x_{n_k})|<+\infty$ γιατί αφού $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ είναι WUC έπεται ότι $\forall x^*\in X^*$: $\sum_{n=1}^{\infty}|x^*(x_n)|<+\infty$ και άρα αν θέσω: $S_N=\sum_{n=1}^{N}|x^*(x_n)|$ τότε αυτή είναι συγκλίνουσα και άρα αν πάρουμε $(n_k)_{k\geq 1}\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ γνησίως αύξουσα και θεωρήσουμε τα μερικά αθροίσματα της $\sum_{k=1}^{\infty}|x^*(x_{n_k})|$ τότε: $S'_N=\sum_{k=1}^{N}|x^*(x_{n_k})|$ είναι γνησίως αύξουσα ~~μη αρνητική~~ και ~~υπακολουθία~~ άνω φραγμένη ακολουθία αφού είναι άνω φραγμένη η $(S_N)_{N\geq 1}$ ~~της $(S_N)$ που συγκλίνει~~ και άρα και η $(S'_N)$ συγκλίνει $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}|x^*(x_{n_k})|<+\infty$.

Άρα: $\forall x^*\in X^*$ και $(n_k)_{k\geq 1}\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ γνησίως αύξουσα: $\sum_{k=1}^{\infty}x^*(x_{n_k})$ συγκλίνει

$\overset{(*)}{\Longrightarrow}$ $\forall (n_k)_{k\geq 1}\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ η $\sum_{k=1}^{\infty}$ $x_{n_k}$ [redacted] είναι ασθενώς Cauchy και άρα και ασθενώς συγκλίνουσα αφού ο $X$ είναι WSC (κάθε ασθενώς Cauchy ακολουθία είναι και ασθενώς συγκλίνουσα αφού ο $X$ είναι WSC και αφού η [redacted] ~~$(x_{n_k})_{k=1}^{N}$~~ ~~είναι ασθενώς~~ $\left(\sum_{k=1}^{N}x_{n_k}\right)$ [redacted] $_{N\geq 1}$ είναι ασθενώς Cauchy $\Rightarrow \left(\sum_{k=1}^{N}x_{n_k}\right)_{N\geq 1}$ είναι ασθενώς συγκλίνουσα και άρα: $\sum_{k=1}^{\infty}x_{n_k}$ είναι ασθενώς συγκλίνουσα)

Από θεώρημα Orlicz-Pettis η $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ είναι unconditionally συγκλίνουσα.

((*) Αφού $\forall x^*\in X^*$, $\forall (n_k)_{k\geq 1}$ γνησίως αύξουσα: $\sum_{k=1}^{\infty}x^*(x_{n_k})$ συγκλίνει έπεται ότι [redacted] $\forall (n_k)_{k\geq 1}\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ γνησίως αύξουσα η $\sum_{k=1}^{\infty}x_{n_k}$ είναι ασθενώς Cauchy δηλ.: $(S_N)=\left(\sum_{k=1}^{N}x_{n_k}\right)_{N\geq 1}$ είναι ασθενώς Cauchy γιατί αν σταθεροποιήσουμε $(n_k)_{k\geq 1}$ γνησίως αύξουσα και πάρουμε τυχόν $x^*\in X^*$ τότε: $x^*(S_N)=\sum_{k=1}^{N}x^*(x_{n_k})$ $\longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty}x^*(x_{n_k})$ αφού αυτή η σειρά συγκλίνει και άρα: $\exists \lim_{N\to\infty}x^*(S_N)$ και άρα η $(S_N)_{N\geq 1}$ είναι ασθενώς Cauchy.)