- **Χώροι Hilbert:** $\forall \varepsilon > 0 : \exists V_\varepsilon :$ ανοικτό και $F_\varepsilon :$ κλειστό τέτοιο ώστε: $F_\varepsilon \subseteq B \subseteq V_\varepsilon$
X

Ένας γραμμικός χώρος επί ενός σώματος $\mathbb{K}$ λέγεται χώρος με __εσωτερικό γινόμενο__ αν υπάρχει μια συνάρτηση $\langle , \rangle : X \times X \longrightarrow \mathbb{K}$ με:

1. $\langle x,x \rangle \geq 0, \ \forall x \in X$ και $\langle x,x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\langle x,y \rangle = \overline{\langle y,x \rangle}, \ \forall x,y \in X$
3. $\langle ax+y, z \rangle = a\langle x,z \rangle + \langle y,z \rangle, \ \forall x,y,z \in X, \ \forall a \in \mathbb{K}$

Ορίζουμε: $\|x\| = \sqrt{\langle x,x \rangle}, \ \forall x \in X$ και αυτή είναι νόρμα.

• __Πρόταση:__ Έστω X γραμμικός χώρος με [redacted] εσωτερικό γινόμενο $\langle , \rangle$ και θέτουμε $\|x\| = \sqrt{\langle x,x \rangle}, \ \forall x \in X$ και τότε ο X με την $\|\cdot\|$ γίνεται χώρος με νόρμα.

- __Απόδειξη:__ Αρχικά έχουμε ότι αν: $x \in X$: $\|x\| \geq 0$ και $\|x\| = 0 \Leftrightarrow \langle x,x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Επίσης αν $a \in \mathbb{K}$ και $x \in X$: $\|ax\| = \sqrt{\langle ax, ax \rangle} = \sqrt{a\bar{a}\langle x,x \rangle} = \sqrt{|a|^2 \langle x,x \rangle} = |a|\sqrt{\langle x,x \rangle} = |a|\|x\|$

Τώρα έχουμε ότι: αν $x,y \in X$: $\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle = \langle x, x+y \rangle + \langle y, x+y \rangle = \langle x,x \rangle + \langle x,y \rangle + \langle y,x \rangle + \langle y,y \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + \langle x,y \rangle + \langle y,x \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2|\langle x,y \rangle| \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2 \Rightarrow \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ από την __ανισότητα Cauchy-Swhartz:__

$|\langle x,y \rangle| \leq \|x\|\|y\|, \ \forall x,y \in X$

• __Κανόνας Παραλληλογράμμου:__ Σε κάθε χώρο με εσωτερικό γινόμενο ισχύει ότι $\forall x,y \in X$:

$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$

- __Απόδειξη:__ $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + \langle x,y \rangle + \langle y,x \rangle + \|x\|^2 + \|y\|^2 - \langle x,y \rangle - \langle y,x \rangle$
$= 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$

• **Παρατήρηση:** Σε χώρο με εσωτερικό γινόμενο το εσωτερικό γινόμενο είναι συνεχής συνεχής συνάρτηση ως προς την νόρμα.

– Έστω $(x_n), (y_n)$ ακολουθίες τέτοιες ώστε: $x_n \to x$ και $y_n \to y$ στον X. Θα αποδείξουμε ότι: [redacted] $\langle x_n, y_n\rangle \to \langle x, y\rangle$. Τώρα παρατηρούμε ότι: $|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle|$

$$= |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x_n, y\rangle + \langle x_n, y\rangle - \langle x, y\rangle| = |\langle x_n, y_n - y\rangle + \langle x_n - x, y\rangle|$$

$$\leq |\langle x_n, y_n - y\rangle| + |\langle x_n - x, y\rangle| \leq \|x_n\|\,\underbrace{\|y_n - y\|}_{\downarrow\, 0} + \underbrace{\|x_n - x\|}_{\downarrow\, 0}\,\|y\| \to 0$$

και άρα έχουμε το ζητούμενο.

▶ **Ορισμός:** Ένας γραμμικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο λέγεται <u>χώρος Hilbert</u> αν είναι πλήρης ως προς την νόρμα που ορίζει το εσωτερικό γινόμενο.

▶ **Ορισμός:** Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο και $x, y \in X$. Τα x, y λέγονται <u>κάθετα</u> αν $\langle x, y\rangle = 0$ και τότε γράφουμε: $x \perp y$.

Αν M είναι γραμμικός υπόχωρος του X τότε και ο $M^{\perp} = \{y \in X \mid \langle x, y\rangle = 0, \forall x \in M\}$ είναι γραμμικός υπόχωρος του X.

– **Παρατήρηση:** Αν $x, y \in X$ με $\langle x, y\rangle = 0$ τότε: $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ (Θεώρημα Πυθαγόρα)

• **Θεώρημα:** (Ορθογώνια Προβολή). Αν H είναι ένας χώρος Hilbert και M είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος του H και $x \in H$ τότε υπάρχει μοναδικό $y \in M$ τέτοιο ώστε: $\|x - y\| = dist(x, M) = \inf\{\|x - z\| : z \in M\}$. Αυτό το $y \in M$ συμβολίζεται με $P_M(x)$ και λέγεται η προβολή του x στο M. Επιπλέον: $x - P_M(x) \in M^{\perp}$.

– **Απόδειξη:** Έστω $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}^{\infty}$ ακολουθία στο M με: $\|x - y_n\| \to \delta = \inf\{\|x - z\| : z \in M\}$.

Τότε: $\|y_n - y_m\|^2 + \|2x - y_n - y_m\|^2 = \cancel{\|(x-y_n)} + \|(y_n - x) \cancel{+ (x - y_m)\|^2 + \|(y_n - x) - (x}$

$$= \|(x - y_n) - (x - y_m)\|^2 + \|(x - y_n) + (x - y_m)\|^2 = 2\|x - y_n\|^2 + 2\|x - y_m\|^2 \Rightarrow$$

$$\|y_n - y_m\|^2 = 2\|x - y_n\|^2 + 2\|x - y_m\|^2 + 4\left\|x - \frac{y_n + y_m}{2}\right\|^2 \leq 2\|x - y_n\|^2 + 2\|x - y_m\|^2 + 4\delta^2$$

$\xrightarrow{n, m \to \infty} 0$ και άρα η (y_n) είναι βασική και αφού τώρα ο X είναι χώρος Hilbert και ο M είναι κλειστός υπόχωρος έπεται ότι και ο M είναι χώρος Hilbert και άρα η $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα και άρα $\exists\, y \in M$: $y_n \to y$. Τότε: $\|x - y\| = \lim_{n \to \infty} \|x - y_n\| = \delta$.

<u>Μοναδικότητας</u> Έστω ότι υπάρχει και $y' \in M$ τέτοιο ώστε: $\|x - y'\| = \delta$ και τότε από κανόνα του παραλληλογράμμου: $\|y - y'\|^2 =$ [redacted]

$$2\|x - y\|^2 + 2\|x - y'\|^2 - \|2x - y - y'\|^2 \leq 2\delta^2 + 2\delta^2 - 4\delta^2$$

και άρα: $y = y'$.

Να αποδείξουμε τώρα ότι $x - P_M(x) \in M^{\perp}$. Έστω $z = x - P_M(x)$.

Τώρα: $\langle z, w\rangle = |\langle z, w\rangle| e^{i\vartheta}$ για κάποιο $\vartheta \in \mathbb{R}$. Τώρα έχουμε ότι:

$$\|z - te^{i\vartheta}w\|^2 = \|z\|^2 + t^2\|w\|^2 - t\langle z, w\rangle e^{i\vartheta} - te^{i\vartheta}\langle w, z\rangle =$$

$$\|z\|^2 + t^2\|w\|^2 - 2t\,Re(\langle z, w\rangle e^{i\vartheta}) = \|z\|^2 + t^2\|w\|^2 - 2t|\langle z, w\rangle|$$

Τώρα η συνάρτηση αυτή του t ελαχιστοποιείται στο $t=0$ και άρα πρέπει η παράγωγος στο $t=0$ να μηδενίζεται. Η παράγωγος είναι: $2t\|w\|^2 - 2|\langle z, w\rangle|$ και στο $t=0$ είναι: $-2|\langle z, w\rangle|$ και άρα πρέπει: $|\langle z, w\rangle| = 0 \Rightarrow \langle z, w\rangle = 0$

- <u>Πόρισμα:</u> Αν X είναι χώρος Hilbert και M είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος τότε κάθε $x \in H$ γράφεται μοναδικά ως $x = x' + x''$ όπου: $x' \in M$ και $x'' \in M^{\perp}$.

• <u>Απόδειξη:</u> Έστω $x \in H$ και τότε από το προηγούμενο θεώρημα έχουμε ότι αν θεωρήσουμε το $P_M(x)$ τότε: $x = \underbrace{P_M(x)}_{\in M} + \underbrace{(x - P_M(x))}_{\in M^{\perp}}$ από το προηγούμενο θεώρημα. Τώρα για την μοναδικότητα έχουμε ότι αν: $x = x' + x'' = y' + y''$ όπου $x', y' \in M$ και $x'', y'' \in M^{\perp}$ τότε: έχουμε ότι: $x' + x'' - y' - y'' = 0 \Rightarrow \|x' + x'' - y' - y''\| = 0$

$$\iff \|\underbrace{(x' - y')}_{\in M} + \underbrace{(x'' - y'')}_{\in M^{\perp}}\|^2 = 0 \overset{\Pi\Theta}{\iff} \|x' - y'\|^2 + \|x'' - y''\|^2 = 0 \iff x' = y' \text{ και } x'' = y''$$ και άρα έχουμε την μοναδικότητα.

- <u>Πόρισμα:</u> Αν H είναι ένας χώρος Hilbert και M είναι ένας κλειστός υπόχωρος του H με $M \neq H$ τότε: $\exists x \in H \setminus \{0\}$ με $x \in M^{\perp}$.

• <u>Απόδειξη:</u> Αν $M \neq H$ τότε $\exists x \in M \setminus H$ και $x \neq 0$. Θέτουμε: $y = x - P_M(x) \in M^{\perp}$ και αφού: $x \notin M$ $y \neq 0$ και έχουμε το ζητούμενο.

- <u>Γραμμικά Συναρτησοειδή:</u> Έστω H ένας χώρος Hilbert. Αν $a \in H$ τότε: $\varphi_a(x) = \langle x, a\rangle, x \in H$ είναι γραμμικό συναρτησοειδές. Είναι και φραγμένο μάλιστα γιατί: $|\varphi_a(x)| = |\langle x, a\rangle| \leq \|x\|\|a\|$ από την Cauchy-Schwarz και άρα το φ_a είναι φραγμένο και $\|\varphi_a\| \leq \|a\|$. Επίσης έχουμε μάλιστα ότι: $\|\varphi_a\| = \|a\|$ γιατί: για $x = a$: $|\varphi_a(a)| = \|a\|^2 \leq \|\varphi_a\|\|a\|$ $\Rightarrow \|\varphi_a\| \geq \|a\|$ και άρα από τις 2 ανισότητες: $\|\varphi_a\| = \|a\|$. Μάλιστα αυτό αποδεικνύει ότι η απεικόνιση $T: H \to H^*$ με $T(a) = \varphi_a$ είναι ισομετρία

Μάλιστα έχουμε ότι η T είναι αντιγραμμική: δηλαδή: $\forall a,b \in H$ και $\lambda,\mu \in \mathbb{K}$: $T(\lambda a+\mu b) = \bar{\lambda}\, T(a) + \bar{\mu}\, T(b)$ το οποίο ελέγχεται εύκολα.

• <u>**Θεώρημα Riesz:**</u> Έστω H ένας χώρος Hilbert και $\varphi \in H^*$. Τότε $\exists a \in H$ τέτοιο ώστε: $\varphi(x) = \langle x, a \rangle$, $\forall x \in H$.

- <u>*Απόδειξη:*</u> Θεωρούμε τον $\ker\varphi = \{x \in H : \varphi(x) = 0\}$ και έχουμε ότι αυτός είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος του H. Μάλιστα υποθέτουμε ότι είναι γνήσιος γιατί: αν $\ker\varphi = H$ τότε θα είχαμε ότι: $\varphi(x) = 0$, $\forall x \in H$ και άρα μπορούμε να επιλέξουμε $a = 0$ στην περίπτωση αυτή. Τότε έχουμε από προηγούμενο Πόρισμα ότι υπάρχει $z \in H$ με $z \neq 0$ όπου: $z \in \ker\varphi^{\perp}$. Τότε όμως για $y \in H$: $\varphi(z\varphi(y) - \varphi(z)y) = 0$ και άρα: $z\varphi(y) - y\varphi(z) \in \ker\varphi$ και άρα: $\cancel{\langle z, z\varphi(y) - y\varphi(z)\rangle = 0 \Rightarrow \langle z, z\varphi(y)\rangle - \langle z, y\varphi(z)\rangle = 0}$
$\cancel{\Rightarrow \varphi(y)\|z\|^2 - \varphi(z)\langle z,y\rangle = 0 \Rightarrow \varphi(y)\|z\|^2 = \varphi(z)\langle z,y\rangle \Rightarrow \varphi(y) = \langle y, \frac{\varphi(z)}{\|z\|^2} z\rangle}$

$\langle z\varphi(y) - y\varphi(z), z\rangle = 0 \Rightarrow \varphi(y)\|z\|^2 = \langle y, z\rangle \varphi(z)$, $\forall y \in H \Rightarrow \varphi(y) = \langle y, \underbrace{\frac{\varphi(z)}{\|z\|^2} z}_{a} \rangle$ $\forall y \in H$ και άρα έχουμε το ζητούμενο.

Τώρα για την μοναδικότητα: παρατηρούμε ότι αν υπάρχουν $z_1, z_2 \in H$ τ.ω: $\varphi(y) = \langle y, z_1\rangle = \langle y, z_2\rangle$, $\forall y \in H$ τότε: $\forall y \in H$: $\langle y, z_1 - z_2\rangle = 0 = \varphi(y) - \varphi(y)$ και άρα $z_1 = z_2$ επειδή το μόνο στοιχείο του H που είναι κάθετο σε όλα είναι το μηδενικό στοιχείο 0.