(Απόδειξη Cauchy-Schwartz: σημειώσεις)

• Μάθημα 6ο: Αρμονική Ανάλυση: Σκαφογιάννης.

– Έστω X γρ. χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Ένα υποσύνολο $\{e_i : i\in I\}\subseteq X$ λέγεται ορθοκανονικό αν: $\langle e_i, e_j\rangle = 0,\ \forall i\neq j$ και $\langle e_i, e_i\rangle = 1$ $(\|e_i\|=1)$ $\forall i\in I$.

• Παρατήρηση: Κάθε ορθοκανονικό σύνολο είναι γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο: Πράγματι, αν $\lambda_1,\dots,\lambda_n\in \mathbb{K}$ και $e_1,\dots,e_n\in X$ με $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i e_i = 0$ τότε έχουμε ότι: $\langle \sum_{i=1}^{n}\lambda_i e_i, e_j\rangle$ $= \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\langle e_i, e_j\rangle = \lambda_j\|e_j\|^2 = \lambda_j = 0,\ \forall j=1,\dots,n$ και άρα είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

– Ορισμός: Ορθοκανονική Βάση: Ένα ορθοκανονικό σύνολο λέγεται ορθοκανονική βάση αν:
[redacted] $X = \overline{\operatorname{span}}\{e_i : i\in I\}$

• Πρόταση: Κάθε (διαχωρίσιμος) χώρος Hilbert έχει ορθοκανονική βάση. (αριθμήσιμη)

▸ Απόδειξη: Επειδή ο H είναι διαχωρίσιμος έπεται ότι κάθε ορθοκανονικό σύνολο είναι αριθμήσιμο γιατί: αν $\{e_i : i\in I\}$ είναι ορθοκανονικό σύνολο τότε: $\|e_i - e_j\| = \sqrt{2},\ \forall i\neq j\in I$. Σε ένα διαχωρίσιμο όμως χώρο δεν μπορούμε να έχουμε υπεραριθμήσιμα το πλήθος στοιχεία με $\|e_i - e_j\|\geq \delta$ για κάποιο $\delta>0$. Θεωρούμε τώρα την κλάση των ορθοκανονικών υποσυνόλων του [redacted] H με την διάταξη του υποσυνόλου. Κάθε αλυσίδα ως προς αυτή έχει άνω φράγμα και άρα από το Λήμμα του Zorn, υπάρχει μεγιστικό ορθοκανονικό σύνολο. Αυτό θα είναι αριθμήσιμο και αποτελεί βάση γιατί: αν $H\neq \overline{\operatorname{span}}\{e_n : n\in\mathbb{N}\}$ τότε έχουμε ότι υπάρχει $z\in H,\ z\neq 0$ και $z\notin \overline{\operatorname{span}}\{e_n : n\in\mathbb{N}\}$ και άρα έχουμε: $\exists\, z' \perp$ $\overline{\operatorname{span}}\{e_n : n\in\mathbb{N}\}$ και $z'\neq 0$ και άρα το $\{$[redacted]$z\}\cup\{e_n : n\in\mathbb{N}\}$ είναι ορθοκανονικό σύνολο και είναι μεγαλύτερο από το μεγιστικό $\{e_n :$ [redacted]$\}$ και άρα άτοπο και έχουμε ότι επομένως: $\{e_n : n\in\mathbb{N}\}$ είναι ορθοκανονική βάση του H.

• Λήμμα: Αν X είναι ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο και $\{e_i : i\in I\}$ είναι ορθοκανονικό σύνολο τότε: $\forall x\in X$: $d(x, \operatorname{span}\{e_1,\dots,e_n\}) = \|x - \sum_{i=1}^{n}\langle x, e_i\rangle e_i\|$

• Απόδειξη: Αρχικά έχουμε ότι: (*) $\|x - \sum_{i=1}^{n}\lambda_i e_i\|^2 = \|x - \sum_{i=1}^{n}\langle x, e_i\rangle e_i\|^2 + \|\sum_{i=1}^{n}(\langle x, e_i\rangle - \lambda_i)e_i\|^2$

Επειδή τώρα: $\langle x - \cancel{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i e_i}$ [redacted] $, \cancel{x -} \sum_{i=1}^{n}\lambda_i e_i\rangle$ $\langle x - \sum_{i=1}^{n}\langle x, e_i\rangle e_i, \sum_{i=1}^{n}(\langle x, e_i\rangle - \lambda_i) e_i\rangle$

$\cancel{\langle \sum_{i=1}^{n} \dots e_i\rangle}$ $\langle x, \sum_{i=1}^{n}(\langle x, e_i\rangle - \lambda_i) e_i\rangle$ [redacted] $- \sum_{i,j=1}^{n}\langle \langle x, e_i\rangle e_i, (\langle x, e_j\rangle - \lambda_j) e_j\rangle$

Scanned with CamScanner

$$= \Big\| \sum_{i=\min\{n,m\}}^{\max\{n,m\}} \langle x, e_i\rangle e_i \Big\|^2 \underset{\Pi.\Theta}{=} \sum_{i=\min\{n,m\}}^{\max\{n,m\}} |\langle x, e_i\rangle|^2 \|e_i\|^2 = \sum_{i=\min\{n,m\}}^{\max\{n,m\}} |\langle x, e_i\rangle|^2 \xrightarrow{n,m\to\infty} 0$$ και άρα η

$(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική ακολουθία και άρα συγκλίνει αφού ο H είναι χώρος Hilbert.

Έστω τώρα: $y = \lim_{n\to\infty} S_n(x)$. Θα αποδείξουμε ότι: $y = x$ και έτσι θα έχουμε το ζητούμενο.

Έχουμε τώρα: $\langle x-y, e_k\rangle = \langle x, e_k\rangle - \langle y, e_k\rangle = \langle x, e_k\rangle - \lim_{n\to\infty} \langle S_n(x), e_k\rangle$

$= \lim_{n\to\infty} \left(\langle x, e_k\rangle - \langle S_n(x), e_k\rangle \right)$ και τώρα παρατηρούμε ότι: $\langle S_n(x), e_k\rangle = \langle x, e_k\rangle$, για $n \geq k$

και άρα $\langle x-y, e_k\rangle = \lim_{n\to\infty} \left(\langle x, e_k\rangle - \langle x, e_k\rangle \right) = 0$ και άρα από την υπόθεση έχουμε ότι:

αφού: $\langle x-y, e_k\rangle = 0$, $\forall k \in \mathbb{N} \Longrightarrow x = y$ και άρα έχουμε το ζητούμενο.

3 ⟹ 4.): Στην απόδειξη της ανισότητας Bessel έχουμε ότι:

$$\|x\|^2 = \|x - S_n(x)\|^2 + \|S_n(x)\|^2 = \|x - S_n(x)\|^2 + \sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i\rangle|^2 \longrightarrow 0 + \sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, e_i\rangle|^2$$

και άρα: $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, e_i\rangle|^2$ από την υπόθεση (3). και άρα έχουμε το ζητούμενο.

4 ⟹ 1.): Έστω $x \in H$ και τότε έχουμε από την ίδια ισότητα: $\|x - S_n(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|S_n(x)\|^2$

$= \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i\rangle|^2 \longrightarrow \|x\|^2 - \|x\|^2 = 0$ από Parseval και άρα έχουμε ότι αφού

$S_n(x) \in \operatorname{span}\{e_i : i\in\mathbb{N}\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ έπεται ότι: $x \in \overline{\operatorname{span}}\{e_i : i\in\mathbb{N}\}$ και άρα: $H = \overline{\operatorname{span}}\{e_i : i \in \mathbb{N}\}$

και άρα έχουμε ότι το $\{e_i : i\in\mathbb{N}\}$ είναι ορθοκανονική βάση.

CS Scanned with CamScanner

$= \sum_{i=1}^{n} (\langle x,e_i\rangle - \lambda_i)$ [redacted] $\langle x,e_i\rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle x,e_i\rangle(\langle x,e_i\rangle - \lambda_i) = 0$ και άρα από Π.Θ

έχουμε την ⊛ και άρα από την ⊛: $\|x - \sum_{i=1}^{n}\lambda_i e_i\|^2 \geq \|x - \sum_{i=1}^{n}\langle x,e_i\rangle e_i\|^2_{\text{span}\{e_1,\dots,e_n\}}$

- **Παρατήρηση (Ανισότητα Bessel)**: Σε είναι γραμμικό χώρο με εσωτερικό γινόμενο

αν $\{e_i : i\in I\}$ είναι (αριθμήσιμο) ορθοκανονικό σύνολο τότε: $\sum_{i\in I} |\langle x,e_i\rangle|^2 \leq \|x\|^2$ ~~αφού~~ και τότε

Απόδειξη: Έστω $I = \mathbb{N}$ και $S_n(x) = \sum_{i=1}^{n}\langle x,e_i\rangle e_i$ ~~και από το λήμμα~~ έχουμε ότι

$\langle x - S_n(x), S_n(x)\rangle = 0$ αφού: [redacted] $\langle x - S_n(x), S_n(x)\rangle = \langle x - \sum_{i=1}^{n}\langle x,e_i\rangle e_i, \sum_{j=1}^{n}\langle x,e_j\rangle e_j\rangle$

$= \langle x, \sum_{j=1}^{n}\langle x,e_j\rangle e_j\rangle - \langle \sum_{i=1}^{n}\langle x,e_i\rangle e_i, \sum_{j=1}^{n}\langle x,e_j\rangle e_j\rangle$

$= \sum_{j=1}^{n}\overline{\langle x,e_j\rangle}\langle x,e_j\rangle - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\langle x,e_i\rangle\overline{\langle x,e_j\rangle}\langle e_i,e_j\rangle$

$= \sum_{j=1}^{n}\overline{\langle x,e_j\rangle}\langle x,e_j\rangle - \sum_{j=1}^{n}\langle x,e_j\rangle\overline{\langle x,e_j\rangle}\|e_j\|^2 = 0$ και άρα τώρα

από το Πυθαγόρειο Θεώρημα: $\|x\|^2 = \|x - S_n(x)\|^2 + \|S_n(x)\|^2 \geq \|S_n(x)\|^2 =$

$\|\sum_{i=1}^{n}\langle x,e_i\rangle e_i\|^2 \underset{\text{Π.Θ}}{=} \sum_{i=1}^{n}|\langle x,e_i\rangle|^2\|e_i\|^2 = \sum_{i=1}^{n}|\langle x,e_i\rangle|^2$, $\forall n\in\mathbb{N}$ και άρα

παίρνοντας όριο $n\to+\infty$: $\|x\|^2 \geq \sum_{i=1}^{\infty}|\langle x,e_i\rangle|^2$

- **Θεώρημα**: Έστω H είναι χώρος Hilbert και $\{e_i : i\in \mathbb{N}\}$ αριθμήσιμο ορθοκανονικό σύνολο.

Τα εξής είναι ισοδύναμα:

1. Το $\{e_i : i\in I\}$ είναι ορθοκανονική βάση
2. Αν $x\in H$ τότε: $\langle x,e_i\rangle = 0, \forall i\in I \Rightarrow x = 0$
3. Αν για $x\in H$ ορίσουμε $\forall n\in\mathbb{N}$: $S_n(x) = \sum_{i=1}^{n}\langle x,e_i\rangle e_i$, τότε: $S_n(x) \longrightarrow x$
4. Ισχύει η ταυτότητα Parseval: $\|x\|^2 = \sum_{i\in\mathbb{N}}|\langle x,e_i\rangle|^2$

- **Απόδειξη**: $1 \Rightarrow 2$.) Αν το $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ είναι ορθοκανονική βάση τότε: $H = \overline{\text{span}\{e_i : i\in\mathbb{N}\}}$

τότε αν πάρουμε $x\in H = \overline{\text{span}\{e_i : i\in\mathbb{N}\}}$ τέτοιο ώστε: $\langle x,e_i\rangle = 0$, $\forall i\in\mathbb{N}$ τότε έχουμε ότι:

υπάρχει ακολουθία $(y_n)_{n\geq 1}$ από την $\text{span}\{e_i : i\in\mathbb{N}\}$ τέτοια ώστε: $y_n \to x$. Τώρα όμως

έχουμε ότι αφού η $\langle , \rangle$ είναι συνεχής: $\langle x,y_n\rangle \longrightarrow \langle x,x\rangle$ και αφού τώρα

$\forall n\in\mathbb{N}$: $\langle x,y_n\rangle = 0$ γιατί $\forall n\in\mathbb{N}$: $y_n\in\text{span}\{e_i : i\in\mathbb{N}\}$ και $\langle x,e_i\rangle = 0$ έπεται ότι

τελικά: $\langle x,x\rangle = 0 \Rightarrow x = 0$

$2 \Rightarrow 3$.) Έστω $x\in H$ και ορίζουμε $\forall n\in\mathbb{N}$: $S_n(x) = \sum_{i=1}^{n}\langle x,e_i\rangle e_i$ και έχουμε αρχικά ότι

από Bessel: $\sum_{i=1}^{\infty}|\langle x,e_i\rangle|^2 \leq \|x\|^2 < +\infty$ και άρα: $\|S_n(x) - S_m(x)\|^2 =$

Scanned with CamScanner