- Μάθημα 8ο: Αρμονική Ανάλυση: Σκαρμόγιαννης:

- <u>Ορισμός:</u> Ένας [redacted] τελεστής από έναν υπόχωρο του χώρου των μετρήσιμων συναρτήσεων σε έναν χώρο μέτρου $(X, \mathcal{A}, \mu)$ στις μετρήσιμες συναρτήσεις ενός χώρου μέτρου $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ λέγεται <u>υπογραμμικός:</u> αν: $|T(cf)| = c|T(f)|, \forall c \geq 0$ και $|T(f+g)| \leq |T(f)| + |T(g)|$, $\forall f, g$ στο πεδίο ορισμού του T.

- Ένας υπογραμμικός τελεστής καλείται <u>ισχυρού τύπου (p,q)</u> αν ορίζεται στον $L^p(\mu) \to L^q(\nu)$ και $\|T(f)\|_q \leq C\|f\|_p$ όπου q όχι αναγκαστικά συζυγής εκθέτης του p, και καλείται <u>ασθενούς τύπου (p,q)</u> αν: $\mu(\{y \in Y : |Tf(y)| > t\}) \leq C\left(\frac{\|f\|_p}{t}\right)^q, \forall t \geq 0$

- <u>Παρατήρηση:</u> Ισχυρού Τύπου $\to$ Ασθενούς Τύπου: Πράγματι αν έχουμε ότι: $\|T(f)\|_q \leq C\|f\|_p$, $\forall f \in L^p(\mu)$ δηλαδή είναι ισχυρού τύπου (p,q), όπου $C > 0$ σταθερά. Τότε όμως έχουμε ότι: $\forall t \geq 0$
$$\mu(\{y \in Y : |Tf(y)| > t\}) \leq \frac{\|Tf\|_q^q}{t^q} \ (\text{Markov}) \leq C^q\left(\frac{\|f\|_p}{t}\right)^q$$ και άρα έχουμε το ζητούμενο.

- <u>Θεώρημα:</u> Αν $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ τότε η f^* ικανοποιεί ασθενούς τύπου $(1,1)$ ανισότητα και συγκεκριμένα: $\lambda_n(\{x \in \mathbb{R}^n : \underbrace{|f(x)|}_{f^*(x)} > t\}) \leq 3^n \frac{\|f\|_1}{t}, \forall t > 0$.

- <u>Πόρισμα:</u> Αν $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ τότε: $f^* < +\infty$ λ_n-σχεδόν παντού:

- Πράγματι: $A = \{x \in \mathbb{R}^n : f^*(x) = +\infty\} = \bigcap_{m=1}^{\infty} \{x \in \mathbb{R}^n : f^*(x) > m\}$ και άρα: $\mu(\{x \in \mathbb{R}^n : f^*(x) = +\infty\}) \leq \mu(\{x \in \mathbb{R}^n : f^*(x) > m\})$, $\forall m \in \mathbb{N}$ και άρα έχουμε ότι: αφού από Θεώρημα: $\forall m \in \mathbb{N}$: $\mu(\{x \in \mathbb{R}^n : f^*(x) = +\infty\}) \leq \mu(\{x \in \mathbb{R}^n : |f^*(x)| > m\}) \leq 3^n \frac{\|f\|_1}{m}$ έπεται ότι: για $m \to \infty$

~~$\lim_{m \to \infty} \mu(\{x \in \mathbb{R}^n : f^*(x) > m\}) = 0$ και αφού τώρα η ακολουθία συνόλων: $A_m = \{x \in \mathbb{R}^n : f^*(x) > m\}$ είναι φθίνουσα ακολουθία μετρήσιμων συνόλων έπεται από την συνέχεια του μέτρου λ_n ότι: $\lim_{m \to \infty} \lambda_n(\{x \in \mathbb{R}^n : f^*(x) > m\}) = \lim_{m \to \infty} \lambda_n(A_m) = \lambda_n\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} A_m\right) = \lambda_n(A) = 0$~~

[redacted] $\lambda_n(A) = 0$ και άρα $f^* < \infty$ [redacted] λ_n-σχεδόν παντού. ($\mu = \lambda_n$ παραπάνω)

έχουμε

$B_{x_{ij}}$: ξένες

$$= \frac{3^n}{t} \int_{\bigcup_{j=1}^{m} B_{x_{ij}}} |f|\, d\lambda_n \le \frac{3^n}{t} \|f\|_1$$

και άρα τώρα από την εσωτερική κανονικότητα του λ_n: $\lambda_n(A_t) = \sup\{\lambda_n(K) : K \subseteq A_t,\ K: \text{συμπαγές}\} \le \frac{3^n}{t}\|f\|_1$.

- **Θεώρημα Παραγώγισης του Lebesgue:** Αν $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ τότε:
$$\frac{1}{\lambda_n(B)} \int_B f(y)\, d\lambda_n(y) \xrightarrow[\substack{x \in B \\ B: \text{ανοιχτή μπάλα}}]{\lambda_n(B) \to 0} f(x) \quad (*)$$
λ_n-σχεδόν παντού στο $\mathbb{R}^n$.

- **Απόδειξη:** Έχουμε δει ότι για $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ η $(*)$ ισχύει για κάθε x σημείο συνέχειας της f. Θα αποδείξουμε ότι $\forall t > 0 : \lambda_n(E_t) = 0$ όπου: $E_t = \{x \in \mathbb{R}^n : \limsup_{\substack{x \in B \\ \lambda_n(B) \to 0 \\ B: \text{ανοιχτή μπάλα}}} \left| \frac{1}{\lambda_n(B)} \int_B f\, d\lambda_n - f(x) \right| > t \}$ και τότε έχουμε ότι: $\lambda_n\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} E_{1/m}\right) = 0$ και για $x \in \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{m=1}^{\infty} E_{1/m}$: $\limsup_{\substack{x \in B \\ \lambda_n(B) \to 0}} \left| \frac{1}{\lambda_n(B)} \int_B f\, d\lambda_n - f(x) \right| = 0$. Έστω $t > 0$ και $\varepsilon > 0$:

Τότε έχουμε ότι από θεώρημα υπάρχει $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$: $\|f - g\|_1 < \frac{\varepsilon t}{2(3^n + 1)}$

και τότε:
$$\left| \frac{1}{\lambda_n(B)} \int_B f\, d\lambda_n - f(x) \right| \le \underbrace{\left| \frac{1}{\lambda_n(B)} \int_B g\, d\lambda_n - g(x) \right|}_{A} + \underbrace{|f(x) - g(x)|}_{\Gamma} + \underbrace{\frac{1}{\lambda_n(B)} \left| \int_B (f-g)\, d\lambda_n \right|}_{B}$$

$\le A + \cancel{|f(x) - g(x)| + (f-g)^*(x)}$ και άρα: αφού: $\frac{1}{\lambda_n(B)} \int_B |f-g|\, d\lambda_n \ge B$

$$\limsup_{\substack{x \in B \\ \lambda_n(B) \to 0}} \left| \frac{1}{\lambda_n(B)} \int_B f\, d\lambda_n - f(x) \right| \le 0 + |f(x) - g(x)| + (f-g)^*(x)$$
και άρα έχουμε ότι:

$E_t \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : (f-g)^*(x) > t/2\} \cup \{x \in \mathbb{R}^n : |f(x) - g(x)| > t/2\}$ γιατί διαφορετικά: $\limsup \le t$ και άρα: $\lambda_n(E_t)$
$$\le \lambda_n(\{x \in \mathbb{R}^n : (f-g)^*(x) > t/2\}) + \lambda_n(\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x) - g(x)| > t/2\}) \le \frac{\|f-g\|_1}{t/2} + \frac{3^n}{t/2}\|f-g\|_1 < \varepsilon$$
(Markov) (θεώρημα (1,1))

και αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν έπεται ότι: $\lambda_n(E_t) = 0,\ \forall t > 0$ αφού και το $t > 0$ ήταν τυχόν.

- **Παρατήρηση:** Για $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ έχουμε ότι: $|f(x)| \le |f^*(x)| = f^*(x)$ λ_n-σχεδόν κάθε $x \in \mathbb{R}^n$

- Απόδειξη: Από θεώρημα Παραγώγισης του Lebesgue για $|f|$:
$$|f(x)| = \lim_{\substack{x \in B \\ \lambda_n(B) \to 0}} \frac{1}{\lambda_n(B)} \int_B |f|\, d\lambda_n \le \sup_{x \in B} \frac{1}{\lambda_n(B)} \int_B |f|\, d\lambda_n = f^*(x)$$
λ_n-σχεδόν παντού ■

- <u>Παρατήρηση</u>: Για $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$ [redacted] ο τελεστής $L^1(\mathbb{R}^n)\longrightarrow L(\mathbb{R}^n)$ (μετρήσιμες) $f\longmapsto f^*$ είναι υπογραμμικός τελεστής

▸ <u>Λήμμα Κάλυψης του Vitaly</u>:

Αν $B_1,\dots,B_N$ είναι [redacted] μπάλες τότε υπάρχουν ξένες ανά 2 μπάλες $B_{i_1},\dots,B_{i_m}$ απ' αυτές τέτοιες ώστε: $\bigcup_{j=1}^N B_j \subseteq \bigcup_{j=1}^m \tilde{B}_{i_j}$ όπου $\tilde{B}_{i_j}$ μπάλα με το ίδιο κέντρο με την B_{i_j} και τριπλάσια ακτίνα. Άρα: $\lambda_n\left(\bigcup_{i=1}^N B_i\right)\leq 3^{n}$ [redacted] $\sum_{j=1}^m \lambda_n(B_{i_j})$

- <u>Απόδειξη</u>: Έστω $\mathcal{B}_1=\{B_1,\dots,B_N\}$. Διαλέγουμε i_1 ώστε η B_{i_1} να έχει μέγιστη ακτίνα. Τώρα έστω: $\mathcal{B}_2=\{B\in\mathcal{B}_1 \mid B\cap B_{i_1}=\emptyset\}$ και διαλέγουμε B_{i_2} ώστε η ακτίνα της να είναι μέγιστη στην $\mathcal{B}_2$. Επαγωγικά ορίζουμε $\mathcal{B}_1,\dots,\mathcal{B}_k$ και $B_{i_1},\dots,B_{i_k}$ και $\mathcal{B}_{k+1}=\{B\in\mathcal{B}_k \mid B\cap B_{i_k}=\emptyset\}$ και $B_{i_{k+1}}$ να είναι μια μπάλα στην $\mathcal{B}_{k+1}$ με την μέγιστη ακτίνα. Υπάρχει $m\leq N$ με [redacted] $\mathcal{B}_{m+1}=\emptyset$. Έστω τώρα $\tilde{B}_{i_k}$ η μπάλα με το ίδιο κέντρο και τριπλάσια ακτίνα της B_{i_k}.

<u>Ισχυρισμός</u>: $\bigcup_{i=1}^N B_i \subseteq \bigcup_{j=1}^m \tilde{B}_{i_j}$ και [redacted] $B_{i_j}\cap B_{i_{j'}}=\emptyset,\ \forall j\neq j'$

- Από την κατασκευή έχουμε αρχικά ότι: καμία από τις B_{i_j} δεν τέμνει τις προηγούμενες. Κάθε τώρα B_i περιέχεται στο $\mathcal{B}_1$ και δεν περιέχεται στο $\mathcal{B}_{m+1}$ και άρα υπάρχει $k\in\{1,2,\dots,m\}$ τ.ω: $B_i\in\mathcal{B}_k$ και $B_i\notin\mathcal{B}_{k+1}$ και άρα: $B_i\cap B_{i_k}\neq\emptyset$ και αφού $B_i\in\mathcal{B}_k$ έπεται ότι ακτίνα$(B_i)\leq$ ακτίνα(B_{i_k}) και άρα: $B_i\subseteq\tilde{B}_{i_k}$ από τριγωνική ανισότητα.

Τέλος: $\lambda_n\left(\bigcup_{i=1}^N B_i\right)\leq\lambda_n\left(\bigcup_{j=1}^m \tilde{B}_{i_j}\right)\leq\sum_{j=1}^m\lambda_n(\tilde{B}_{i_j})=3^n\sum_{j=1}^m\lambda_n(B_{i_j})$

- <u>Απόδειξη Θεωρήματος</u>: Έστω $t>0$ και K συμπαγές υποσύνολο του $A_t=\{x\in\mathbb{R}^n: f^*(x)>t\}$. Τώρα παρατηρούμε ότι: $\forall x\in A_t$: $\exists$ ανοιχτή μπάλα B_x τέτοια ώστε: $x\in B_x$ και $\frac{1}{\lambda_n(B_x)}\int_{B_x}|f(y)|\,d\lambda$ [redacted] $(y)>t \iff \frac{1}{t}\int_{B_x}|f(y)|\,d\lambda_n(y)>\lambda_n(B_x)$. Τώρα η $\{B_x: x\in K\}$ αποτελούν ανοιχτή κάλυψη του K και αφού το K είναι συμπαγές έπεται ότι υπάρχει πεπερασμένη ανοιχτή υποκάλυψη $\{B_{x_1},\dots,B_{x_N}\}$. Τώρα από το λήμμα έχουμε ότι υπάρχουν $i_1,\dots,i_m\in\{1,\dots,N\}$ τέτοιες ώστε οι μπάλες $B_{x_{i_j}}$ να είναι ξένες μεταξύ τους και: $\bigcup_{i=1}^N B_{x_i}\subseteq\bigcup_{j=1}^m\tilde{B}_{x_{i_j}}$ και άρα: $K\subseteq\bigcup_{j=1}^m\tilde{B}_{x_{i_j}}$. Τότε όμως: $\lambda_n(K)\leq\lambda_n\left(\bigcup_{j=1}^m\tilde{B}_{x_{i_j}}\right)$

$$=\sum\lambda_n(\tilde{B}_{x_{i_j}})=3^n\sum_{j=1}^m\lambda_n(B_{x_{i_j}})\leq\frac{3^n}{t}\sum_{j=1}^m\int|f|\,d\lambda_n$$