- Αρμονική Ανάλυση: Μάθημα [redacted]: Σπαρμογιάννης:

- <u>Παρατηρήσεις:</u> 6. Αν $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι φραγμένης κύμανσης τότε υπάρχει μοναδικό μέτρο Borel με $\mu((-\infty,x])=f(x)-f(a)$, $x\in[a,b]$, $\mu((-\infty,x])=0$, $x\le a$, $\mu((-\infty,x])=1$, $x\ge b$.

1. Κάθε απολύτως συνεχής συνάρτηση είναι ομοιόμορφα συνεχής και αν είναι ορισμένη σε ένα συμπαγές διάστημα τότε είναι και φραγμένης κύμανσης

2. Αν $F,G:I\to\mathbb{R}$ είναι απολύτως συνεχείς συναρτήσεις και $c\in\mathbb{R}$ τότε οι cF και cG είναι απολύτως συνεχείς και αν I = συμπαγές διάστημα τότε και η $F\cdot G$ είναι απολύτως συνεχής

3. Αν $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι φραγμένης κύμανσης τότε η $x\to V([a,x])$ είναι μη φθίνουσα με $x\in[a,b]$

4. Αν $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι φραγμένης κύμανσης τότε αν $a\le x<y\le b$ τότε: $V([a,y])\ge V([a,x])+|f(y)-f(x)|$

5. Αν $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι φραγμένης κύμανσης τότε $f=f_1-f_2$ όπου f_1,f_2: μη φθίνουσες: Πράγματι για $f_1(x)=V([a,x])$ και $f_2(x)=f_1(x)-f(x)$ έχουμε το ζητούμενο από το 4.

- <u>Θεώρημα 2ο</u>: Αν $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι μια απολύτως συνεχής συνάρτηση, τότε η f είναι διαφορίσιμη λ-σχεδόν παντού, $f'\in L^1([a,b])$ και $\int_a^b f'(x)\,dx=f(b)-f(a)$.

- <u>Απόδειξη</u>: Αρχικά αφού η f είναι απολύτως συνεχής έπεται ότι υπάρχει μέτρο Borel στο $\mathbb{R}$ με $\mu((-\infty,x])=f(x)-f(a)$ για $x\in[a,b]$, $\mu((-\infty,x])=0$ για $x\le a$ και $\mu((-\infty,x])=1$ για $x\ge b$ από παρατήρηση 6. αφού η f είναι φραγμένης κύμανσης. <u>Ισχυριζόμαστε</u> ότι το μ είναι απολύτως συνεχές ως προς το μέτρο Lebesgue και άρα από το Θεώρημα Radon-Nikodym έπεται ότι υπάρχει $g\in L^1(\mathbb{R})$ με: $\mu(B)=\int_B g\,d\lambda$, $\forall B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Τότε: $\mu((-\infty,x])=\int_{-\infty}^{x} g\,d\lambda \Rightarrow f(x)-f(a)=\int_{-\infty}^{x} g\,d\lambda$, $\forall x\in[a,b]$. Τώρα από το Θεώρημα προηγούμενου μαθήματος έπεται ότι η f είναι σχεδόν παντού παραγωγίσιμη με: $f'(x)=g(x)$ λ-σχεδόν για κάθε $x\in[a,b]$ και $\int_a^b f'(x)\,dx=f(b)-f(a)$ και άρα έχουμε το ζητούμενο.

- <u>Απόδειξη Ισχυρισμού:</u>

Έστω $B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ με $\lambda(B)=0$. Τώρα έστω $\varepsilon>0$ και τότε από την κανονικότητα του μέτρου Lebesgue υπάρχει U_1: ανοιχτό τέτοιο ώστε: $\lambda(U_1)<\delta$ όπου το $\delta>0$ είναι αυτό που προκύπτει από την απόλυτη συνέχεια της f. Επίσης: αφού το μ είναι μέτρο Borel στο $\mathbb{R}$ έπεται ότι είναι κανονικό και άρα υπάρχει:

$$U_1\supseteq U_2\supseteq \dots \supseteq U_n\supseteq \dots \supseteq B \text{ με } \mu(U_n)\to\mu(B).$$

Τώρα κάθε U_n είναι ξένη ένωση ανοιχτών διαστημάτων και άρα: $U_n=\bigcup\,(a_i^{(n)}, b_i^{(n)})$

και $\sum (b_j^{(n)} - a_j^{(n)}) = \lambda(U_n) \le \lambda(U_1) < \delta$

και άρα: $|\mu(U_n)| = \left| \sum \mu((a_j^{(n)}, b_j^{(n)})) \right| = \left| \sum (f(b_j^{(n)}) - f(a_j^{(n)})) \right|$

$\le \sum |f(b_j^{(n)}) - f(a_j^{(n)})| \le \varepsilon$ και άρα αφού: $|\mu(U_n)| \longrightarrow |\mu(B)|$

έπεται ότι: $|\mu(B)| \le \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$ και άρα $\mu(B) = 0$

- <u>Πόρισμα</u>: <u>(Ολοκλήρωση Κατά Μέρη)</u>: Αν $f, g \in L^1([a,b])$ και $F(x) = \int_a^x f(y)dy$ και $G(x) = \int_a^x g(y)dy$, $\forall x \in [a,b]$ τότε: $\int_a^b F(x)g(x)dx = (FG)'(b) - (FG)'(a) - \int_a^b f(x)G(x)dx$

- <u>Απόδειξη</u>: Αρχικά έχουμε ότι οι F', G' υπάρχουν λ-σχεδόν παντού στο $[a,b]$ και άρα η $(FG)'$ υπάρχει λ-σχεδόν παντού στο $[a,b]$ και $(F \cdot G)'(x) = F'(x)G(x) + F(x)G'(x) = f(x)G(x) + F(x)g(x)$. Οι F, G είναι συνεχείς συναρτήσεις και άρα και φραγμένες στο $[a,b]$ και άρα $Fg, fG \in L^1([a,b])$ και άρα $(fG)' \in L^1([a,b])$ και: $\int_a^b (FG)'(x)dx = \int_a^b f(x)G(x)dx + \int_a^b F(x)g(x)dx$. Αν αποδείξουμε ότι η $F \cdot G$ είναι απολύτως συνεχής τότε θα έχουμε από προηγούμενο θεώρημα ότι: $\int_a^b (FG)'dx = (FG)(b) - (FG)(a)$ και άρα θα έχουμε το ζητούμενο. Η FG είναι απολύτως συνεχής αφού $I = [a,b] \subseteq \mathbb{R}$ συμπαγές αν καθεμιά από τις F, G είναι απολύτως συνεχής

+ παρατήρηση 2.

- **Πρόταση:**

Αν $h\in L^1([a,b])$ και $H(x)=\int_a^x h(y)\,dy$ για $x\in[a,b]$, τότε η H είναι απολύτως συνεχής:

- **Απόδειξη:** Έστω μ [redacted] το μέτρο Borel που ορίζει η h, $\mu(B)=\int_B h(x)\,d\lambda(x)$ για $B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Έστω ότι η H δεν είναι απολύτως συνεχής, και τότε θα αποδείξουμε ότι το μ δεν είναι απολύτως συνεχές ως προς το λ το οποίο είναι άτοπο (γιατί αν $\lambda(B)=0 \Rightarrow$ τότε: $\int_B h\,d\lambda=0$). Τότε έχουμε ότι υπάρχει $\varepsilon>0$ τέτοιο ώστε για κάθε $\delta>0$ υπάρχει ξένη ένωση ανοικτών διαστημάτων $\mathcal{U}$, τ.ω $\lambda(\mathcal{U})<\delta$ και $\sum|H(b_i)-H(a_i)|$ [redacted] $\geq\varepsilon$, όπου: $\mathcal{U}=\bigcup(a_i,b_i)$.
Υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $h\geq 0$ και άρα έχουμε ότι η H είναι μη φθίνουσα και στην περίπτωση αυτή έχουμε: $\sum|H(b_i)-H(a_i)|$ $=\sum(H(b_i)-H(a_i))=\sum\mu(a_i,b_i]\geq\varepsilon$ [redacted] αφού $\sum\mu(a_i,b_i]=\mu(\mathcal{U})=\sum\mu(a_i,b_i)$.
Παίρνουμε $\delta=\frac{1}{n^2}>0$ και τότε υπάρχουν $\mathcal{U}_n$ το καθένα ξένη ένωση ανοικτών διαστημάτων τέτοια ώστε: $\lambda(\mathcal{U}_n)<\frac{1}{n^2}$ και $\mu(\mathcal{U}_n)\geq\varepsilon$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Τώρα θέτουμε: $\mathcal{U}=\bigcap_{m=1}^{\infty}$ [redacted] $\bigcup_{n=m}^{\infty}\mathcal{U}_n$ και τότε: $\mathcal{U}=\limsup\mathcal{U}_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda(\mathcal{U}_n)<+\infty$ και άρα από το λήμμα Borel-Cantelli: $\lambda(\mathcal{U})=0$. Τώρα: $\mu(\mathcal{U})=\lim_{m\to\infty}\mu(\bigcup_{n=m}^{\infty}\mathcal{U}_n)$ $\geq\limsup\mu(\mathcal{U}_n)\geq\varepsilon>0$ και άρα άτοπο.

από συνέχεια του μέτρου αφού η $(\bigcup_{n=m}^{\infty}\mathcal{U}_n)_{m\geq 1}$ είναι φθίνουσα ακολουθία συνόλων