- Μάθημα 11ο: Αρμονική Ανάλυση:

• <u>Σειρές Fourier:</u>

$$\mathbb{T} = \{ e^{i\theta} : \theta \in [0,2\pi) \} = S^1 = \mathbb{R}/2$$

Μια μετρική πάνω στο $\mathbb{T}$ είναι: $d(e^{i\theta}, e^{i\theta'})$ = γεωδαισιακή μετρική = $\min\{|\theta-\theta'|,$ [redacted] $2\pi-|\theta-\theta'|\}$

Άρα θα ταυτίζουμε τον κύκλο $\mathbb{T}$ με το $[0,2\pi)$, με την γεωδαισιακή μετρική. Μερικές φορές με το $[-\pi,\pi)$ και με αυτήν την μετρική ο $\mathbb{T}$ είναι συμπαγής μετρικός χώρος και η απεικόνιση: $[0,2\pi) \ni \theta \to e^{i\theta}$ είναι ομοιομορφισμός.

- Μια συνάρτηση $f: \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ ταυτίζεται με μια 2π-περιοδική συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$: $\tilde{f}(x) = f($[redacted]$)$. $x - [\frac{x}{2\pi}]2\pi$, $x\in\mathbb{R}$. Θα χρησιμοποιούμε το ίδιο σύμβολο f για μια συνάρτηση $f: \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ και για την αντίστοιχη 2π-περιοδική συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

Για $f: \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ μετρήσιμη το ολοκλήρωμα της f είναι: $\int_{\mathbb{T}} f(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt$

- <u>Βασική Ιδιότητα:</u> Για κάθε $s \in \mathbb{T}$: $\int_{\mathbb{T}} f(t-s)dt = \int_{\mathbb{T}} f(t)dt$:

γιατί: $\int_0^{2\pi} f(t-s)\,dt \overset{t'=t-s}{=} \int_{-s}^{2\pi-s} f(t')\,dt' = \int_0^{2\pi} f(t')\,dt'$ λόγω της 2π-περιοδικότητας της f.

▸ <u>Ορισμός:</u> (Τριγωνομετρική Σειρά): Είναι μια σειρά της μορφής $S \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{int}$, $c_n \in \mathbb{C}$ [redacted]

Το σύμβολο $\sim$ δεν υπονοεί τίποτα για την σύγκλιση της σειράς

▸ <u>Ορισμός:</u> (Τριγωνομετρικό Πολυώνυμο): Είναι κάθε συνάρτηση της μορφής: $P(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt}$, όπου: $c_k \in \mathbb{C}$ και $n \in \mathbb{N}$ και $t \in \mathbb{T}$. Το P <u>θα έχει βαθμό n</u> αν το n είναι ο μεγαλύτερος φυσικός αριθμός για τον οποίο $c_n \neq 0$ ή $c_{-n} \neq 0$. Ο βαθμός είναι 0 για P σταθερό πολυώνυμο.

. <u>Παρατήρηση:</u> $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{int}\,dt = \begin{cases} \text{[redacted]}\ 1, \text{[redacted]}\ n=0 \\ 0, \ n \neq 0 \end{cases}$. Αν P είναι ένα τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού n: $P(t) = \sum_{j=-n}^{n} c_j e^{ijt}$ από τα παραπάνω

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(t)e^{-ikt}\,dt = \frac{1}{2\pi}\sum_{j=-n}^{n} c_j \int_0^{2\pi} e^{i(j-k)t}\,dt = \begin{cases} c_k, \ \text{[redacted]}\ |k| \leq n \\ 0, \ \text{[redacted]}\ |k| > n \end{cases}$$

και άρα: $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(t)e^{-ikt}\,dt,\ k\in\mathbb{Z}$ καθορίζουν πλήρως το τριγωνομετρικό πολυώνυμο P.

- <u>Κίνητρο:</u> Από τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα θα ορίσουμε τους αριθμούς $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}\,dt$ για κάθε συνάρτηση $f:[0,2\pi)\to\mathbb{C}$.

▸ <u>Ορισμός:</u> Για μια συνάρτηση $f\in L^1(\mathbb{T})$ ορίζουμε: $\hat{f}(n)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\,dt$ για $n\in\mathbb{Z}$.

Οι αριθμοί $\hat{f}(n)$ όπου $n\in\mathbb{Z}$ είναι οι <u>συντελεστές Fourier</u> της f.

Γράφουμε: $S(f)\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}(n)e^{int}$ (η σειρά Fourier της f) και ξανά το $\sim$ δεν σημαίνει κάτι για την σύγκλιση της σειράς, πόσο μάλλον για την σύγκλιση της f.

Θα γράφουμε $S_n(f)=\sum_{k=-n}^{n}\hat{f}(n)e^{int}$ το n-οστό τριγωνομετρικό πολυώνυμο της f που είναι μερικό άθροισμα της σειράς Fourier της f. Γενικά μια τριγωνομετρική σειρά θα λέγεται σειρά Fourier αν είναι σειρά Fourier κάποιας $f\in L^1(\mathbb{T})$.

- Για μια $f:\mathbb{T}\to\mathbb{C}$ μετρήσιμη η $\|f\|_p=\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)|^p\,dt\right)^{1/p}$, $1\le p<+\infty$ και

$\|f\|_\infty=\inf\{t>0:\ \lambda(\{x\in\mathbb{T}: |f(x)|>t\})=0\}$

- Για $1\le p<q\le+\infty$ ισχύει ότι: $\|f\|_p\le\|f\|_q$ από Hölder και $\|f\|_p\to\|f\|_\infty$ καθώς $p\to+\infty$

και άρα απ' αυτό έπεται ότι: $L^1(\mathbb{T}) \supseteq$ [redacted] $L^2(\mathbb{T})\supseteq L^\infty(\mathbb{T})$, $\forall p$ ή καλύτερα

$L^p(\mathbb{T})\supseteq L^q(\mathbb{T}),\ \forall p\le q$

▸ <u>Πρόταση:</u> Αν $f,g\in L^1(\mathbb{T})$, $c\in\mathbb{C}$ τότε:

(α). $\widehat{(f+g)}(n)=\hat{f}(n)+\hat{g}(n)$, $\forall n\in\mathbb{Z}$

(β). $\widehat{(cf)}(n)=c\hat{f}(n)$, $\forall n\in\mathbb{Z}$

(γ). $\hat{f}(-n)=$ [redacted] $\overline{\hat{f}}(n)$, $\forall n\in\mathbb{Z}$

(δ). Αν για $s\in\mathbb{T}$ ορίσουμε $f_s(t)=f(t-s)$ [redacted] τότε: $\hat{f_s}(n)=e^{-ins}\hat{f}(n)$, $\forall n\in\mathbb{Z}$

(ε). $|\hat{f}(n)|\le\|f\|_1$, $\forall n\in\mathbb{Z}$ και άρα: $\|\hat{f}\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z})}\le\|f\|_{L^1(\mathbb{T})}$

– **Πόρισμα:** Αν $f_k \in L^1(\mathbb{T})$, $k \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε: $f_k \xrightarrow{\|\cdot\|_1} f \in L^1(\mathbb{T})$ τότε: $\hat{f}_k(n) \xrightarrow{k\to\infty} \hat{f}(n)$ ομοιόμορφα ως προς n και άρα: $\sup_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}_k(n) - \hat{f}(n)| \to 0$ όταν $k \to +\infty$

– **Απόδειξη:** $|\hat{f}_k(n) - \hat{f}(n)| = |\widehat{f_k - f}(n)| \le \|f_k - f\|_1 \xrightarrow{k\to\infty} 0$, $\forall n \in \mathbb{Z}$ από προηγούμενη πρόταση και άρα: $\sup_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}_k(n) - \hat{f}(n)| \le \|f_k - f\|_1 \xrightarrow{k\to\infty} 0$ και άρα έχουμε το ζητούμενο

▸ **Πόρισμα:** Αν $s \sim \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikt}$ είναι μια τριγωνομετρική σειρά τέτοια ώστε: τα μερικά αθροίσματα $s_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt}$ ικανοποιούν $s_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} f$ τότε: $c_k = \hat{f}(k)$ $\forall k \in \mathbb{Z}$.

– **Απόδειξη:** $\cancel{|c_k - \hat{f}(k)| = |\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}}$ Παρατηρούμε ότι: $\hat{s}_n(k) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{j=-n}^{n} c_j e^{ijt} e^{-ikt}$ [redacted]

$= \sum_{j=-n}^{n} c_j \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(j-k)t}\,dt = \sum_{j=-n}^{n} c_j \delta_{jk}$. Όμως: $|\hat{s}_n(k) - \hat{f}(k)| \le \|s_n - f\|_1 \xrightarrow{n\to\infty} 0$

και άρα: $\forall k \in \mathbb{Z}$: $\hat{s}_n(k) \to \hat{f}(k)$, και αν: $n \ge |k|$: $\hat{s}_n(k) = c_k$ και άρα έχουμε ότι: $c_k = \hat{f}(k)$ και άρα έχουμε το ζητούμενο

– **Παρατήρηση:** Αν $f \in L^1(\mathbb{T})$ τότε: $\hat{f}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt$

▸ **Πρόταση:** Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$, με f[redacted]$(0) = 0$. Τότε η $F(t) = \int_0^t f(s)\,ds$, $t \in \mathbb{T}$ είναι στον $L^1(\mathbb{T})$ και είναι 2π-περιοδική. Μάλιστα: $\hat{F}(n) = \frac{1}{in}\hat{f}(n)$, $\forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

– **Απόδειξη:** Αρχικά έχουμε ότι: [redacted] αφού $f \in L^1(\mathbb{T})$ έπεται ότι $F \in$ [redacted]$(\mathbb{T})$ (C από θεώρημα (μάλιστα απολύτως συνεχής)) και $F(2\pi) = \int_0^{2\pi} f(s)\,ds = 2\pi \hat{f}(0) = 2\pi \cdot 0 = 0 = F(0)$ και άρα είναι 2π-περιοδική. Έστω τώρα: $e_n(t) = e^{int}$ και $E_n(t) = \int_0^t e^{-ins}\,ds$, $t \in \mathbb{T}$. Τότε: $E_n(t) = \frac{1}{in}(1 - e^{int})$ (αφού: $e^{ins} = \left(\frac{1}{in}e^{ins}\right)'$), και

$$\hat{F}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(t)e^{-int}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(t)\,\underline{e_n(t)}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(t)\left(\frac{e^{-int}}{-in}\right)'dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{1}{in}\left(\underbrace{F(2\pi)}_{0} e^{-2\pi i n} - \underbrace{F(0)}_{0}\right)\right] - \int_0^{2\pi} F'(t)\left(\frac{e^{-int}}{-in}\right)dt = \frac{1}{in}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}$$

$= \frac{1}{in}\hat{f}($[redacted]$n)$

- Πόρισμα: Αν $f \in L^1(\mathbb{T})$ είναι απολύτως συνεχής τότε $f' \in L^1(\mathbb{T})$ και $\widehat{(f')}(n) = in\hat{f}(n)$

▸ Απόδειξη: Υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $f(0)=0$. Τότε το αόριστο ολοκλήρωμα της f' είναι η f. Από την πρόταση: $\hat{f}(n) = \frac{1}{in}\hat{f'}(n)$ για $n \neq 0, n \in \mathbb{Z}$.

Παρατηρούμε ότι: $\int_0^{2\pi} f'(s)\,ds = f(2\pi) - f(0) = 0$ και άρα: $\hat{f'}(0) = i \cdot 0 \cdot \hat{f}(0)$.

Αν τώρα $f(0) \neq 0$ τότε δουλεύουμε με την $g = f - f(0)$ και έχουμε ότι:

$\widehat{(f - f(0))}(n) = \frac{1}{in}\widehat{(f - f(0))'}(n)$ και άρα: $\hat{f}(n) - \underbrace{\widehat{f(0)}(n)}_{0} = \frac{1}{in}\hat{f'}(n)$ για $n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$

και άρα: $\hat{f}(n) = \frac{1}{in}\hat{f'}(n)$, για $n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$

(Απολύτως συνεχής στο $\mathbb{T}$ σημαίνει απολύτως συνεχής στο $[0,2\pi]$ και 2π-περιοδική)