– Μάθημα 14ο: Αρμονική Ανάλυση: Σπαρταλιώτης

– **Πόρισμα:** Αν $f \in L^1(\mathbb{T})$ τότε: $K_n * f \to f$ στον $L^1(\mathbb{T})$.

▷ Συμβολισμός: $\sigma_n(f) = K_n * f$ και άρα: $\sigma_n(f)(t) = \frac{1}{n+1}\left(s_0(f)(t) + \dots + s_n(f)(t)\right)$

– **Παρατήρηση:** Απο προηγούμενη παρατήρηση του μαθήματος έχουμε ότι:

$\sigma_n(f) = \sum_{j=-n}^{n} \left(1 - \frac{|j|}{n+1}\right) \hat{f}(j) e_j$ και είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο

– **Πόρισμα:** Τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα είναι πυκνά στον $L^1(\mathbb{T})$:

Πράγματι αν πάρουμε $f \in L^1(\mathbb{T})$ τότε έχουμε ότι απο προηγούμενο πόρισμα ότι:

$\|\sigma_n(f) - f\|_1 \to 0$ όταν $n \to +\infty$ και $\sigma_n(f)$ είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο

και άρα έχουμε το ζητούμενο.

– **Θεώρημα:** (Μοναδικότητας): Αν $f \in L^1(\mathbb{T})$ και $\hat{f}(n) = 0$, $\forall n \in \mathbb{Z}$ τότε $f = 0$ στον $L^1(\mathbb{T})$

δηλαδή: $f = 0$ σχεδόν παντού.

▷ **Απόδειξη:** Αν $\hat{f}(n) = 0$, $\forall n \in \mathbb{Z}$ τότε αφού $\sigma_n(f)(t) = \sum_{j=-n}^{n} \left(1 - \frac{|j|}{n+1}\right) \hat{f}(n) e^{ijt}$

έπεται ότι: $\sigma_n(f)(t) = 0$, $\forall t \in \mathbb{T}$. Αφού όμως: $\sigma_n(f) \to f$ στον $L^1(\mathbb{T})$ έπεται

ότι: $f = 0$ στον $L^1(\mathbb{T})$ και άρα $f = 0$ σχεδόν παντού.

– **Πόρισμα:** Αν $f, g \in L^1(\mathbb{T})$ και $\hat{f}(n) = \hat{g}(n)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$ τότε $f = g$ σχεδόν παντού:

Πράγματι αφού $\hat{f}(n) = \hat{g}(n)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$ έπεται ότι: $(\widehat{f-g})(n) = 0$, $\forall n \in \mathbb{Z}$ και αφού

και $f - g \in L^1(\mathbb{T})$ γιατί $f, g \in L^1(\mathbb{T})$ έπεται απο το Θεώρημα Μοναδικότητας ότι:

$f = g$ στον $L^1(\mathbb{T})$ και άρα $f = g$ σχεδόν παντού.

– **Παρατήρηση:** Μια άλλη απόδειξη για το ότι: $g * f = f * g$: Αν $f, g \in L^1(\mathbb{T})$ τότε

έχουμε αποδείξει σε πρόταση ότι: $f * g, g * f \in L^1(\mathbb{T})$. Τώρα: $\widehat{f * g}(n) = \hat{f}(n)\hat{g}(n)$

$= \hat{g}(n)\hat{f}(n) = (\widehat{g * f})(n)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$ και άρα απο Θεώρημα Μοναδικότητας: $f * g = g * f$

σχεδόν παντού.

- **Λήμμα Riemann-Lebesgue:** Αν $f\in L^1(\mathbb{T})$. Τότε: $\hat{f}(n)\xrightarrow[|n|\to\infty]{} 0$

- **Απόδειξη:** Έστω αρχικά ότι P είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο, δηλαδή έστω: $P(t)=\sum_{j=-n}^{n} c_j e^{ijt}$ βαθμού n. Τότε έχουμε δει ότι: $\hat{P}(k)=\begin{cases} c_k\,\text{[redacted]}, & \text{αν } |k|\le n \\ 0, & \text{αν } |k|>n \end{cases}$

Τώρα αν $f\in L^1(\mathbb{T})$ τότε από θεώρημα ότι έχουμε ότι υπάρχει τριγωνομετρικό πολυώνυμο P τέτοιο ώστε: $\|f-P\|_1<\varepsilon$ (γιατί τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα είναι πυκνά στον $L^1(\mathbb{T})$) όπου $\varepsilon>0$ τυχόν. Τότε: $|\hat{f}(k)|=|\hat{f}(k)-\hat{P}(k)|$ $=|\widehat{f-P}(k)|\le\|f-P\|_1<\varepsilon$, $\forall |k|>$ [redacted] $\deg P$. Άρα αφού το $\varepsilon>0$ ήταν τυχόν έχουμε το ζητούμενο.

- **Θεώρημα:** Αν $f\in L^p$ με $1\le p<+\infty$ τότε: $K_n*f\xrightarrow{L^p} f$ για κάθε $(K_n)_n$ καλής πυρήνας άθροισης

- **Απόδειξη:** Παραλείπεται.

- **Θεώρημα:** Αν $f\in C(\mathbb{T})$ και $(K_n)_n$ είναι πυρήνας άθροισης τότε έχουμε ότι: $K_n*f\to f$ στον $C(\mathbb{T})$, δηλαδή με την $\|\cdot\|_\infty$

- **Θεώρημα:** 1. Έστω $1\le p<+\infty$. Τότε: $\|\sigma_n(f)-f\|_p\to 0$ όταν $n\to+\infty$, $\forall f\in L^p(\mathbb{T})$

2. $\|\sigma_n(f)-f\|_\infty\to 0$, $\forall f\in C(\mathbb{T})$.

- **Απόδειξη:** 1. Έστω $1\le p<+\infty$, και έστω και $f\in L^p(\mathbb{T})$. Τότε έχουμε ότι:

$$\sigma_n(f)(t)-f(t)=K_n*f(t)-f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}K_n(s)f(t-s)\,ds-f(t)\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}K_n(s)\,ds=$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}K_n(s)\big(f(t-s)-f(t)\big)\,ds=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}K_n(s)\big(f_s(t)-f(t)\big)\,ds$$ και άρα:

$$\|\sigma_n(f)-f\|_p=\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\sigma_n(f)(t)-f(t)|^p\,dt\right)^{1/p}=\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}K_n(s)\big(f_s(t)-f(t)\big)\,ds\right|^p\right)^{1/p}$$

$$=\left\|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}K_n(s)(f_s-f)$$ [redacted] $$ds\right\|_p\underset{\text{Minkowski}}{\le}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}K_n(s)\|f_s-f\|_p\,ds$$ και τώρα από

εδώ και κάτω η απόδειξη είναι ίδια με τον $L^1(\mathbb{T})$. Τώρα αφού: $\|f_s-f\|_p\xrightarrow[s\to 0]{} 0$

Έπεται ότι αν πάρουμε $\varepsilon>0$ τότε υπάρχει $\delta>0$ [redacted] τέτοιο ώστε: για $s\in(0,\delta)\cup(2\pi-\delta,2\pi)$: $\|f_s-f\|_p<\varepsilon$. Τότε: $\|\sigma_n(f)-f\|_p \leq \frac{1}{2\pi}\varepsilon\int_{(0,\delta)\cup(2\pi-\delta,2\pi)} K_n(s)\,ds$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_\delta^{2\pi-\delta} K_n(s)\,\|f_s-f\|_p\,ds$$

$$<\varepsilon+\frac{1}{2\pi}\|f\|_p\cdot 2\,\frac{1}{2\pi}\int_\delta^{2\pi-\delta} K_n(s)\,ds \xrightarrow[n\to\infty]{} \varepsilon+0$$ και άρα: $\limsup_{n\to\infty}\|\sigma_n(f)-f\|_p<\varepsilon$

και αφού το $\varepsilon>0$ ήταν τυχόν έπεται ότι: $\|\sigma_n(f)-f\|_p \longrightarrow 0$ όταν $n\to\infty$

2. Για $f\in C(\mathbb{T})$ τότε έχουμε ότι: $\sigma_n(f)(t)-f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}K_n(s)\big(f_s(t)-f(t)\big)\,ds$

και άρα: $\cancel{\sup_{t\in\mathbb{T}}|\sigma_n(f)(t)-f(t)|\leq}$ $\leq\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}K_n(s)$

$$\Longrightarrow |\sigma_n(f)(t)-f(t)|\leq\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}K_n(s)\,|f_s(t)-f(t)|\,ds\leq\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}K_n(s)\sup_{t\in\mathbb{T}}|(f_s-f)(t)|$$

ds και άρα: $\sup_{t\in\mathbb{T}}|\sigma_n(f)(t)-f(t)|=\|\sigma_n(f)-f\|_\infty\leq\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}K_n(s)\,\|f_s-f\|_\infty\,ds$

και από εδώ και πέρα η απόδειξη είναι όμοια με το 1.

— Παρατήρηση: Αν $f\in C(\mathbb{T})$ τότε $\sigma_n(f)\xrightarrow{\text{κ.δ}} f$ όταν $n\to\infty$, από το 2 του παραπάνω θεωρήματος.

. Αν $f\in L^1(\mathbb{T})$ και $t\in\mathbb{T}$ είναι ένα σημείο ασυνέχειας της f τότε η $(\sigma_n(f)(t))_n$ δεν είναι αναγκαίο ότι συγκλίνει και όταν συγκλίνει το όριο δεν είναι κατ' ανάγκη $f(t)$: Π.χ.: $f(t)=\mathbb{1}_{[0,\pi]}(t)$ τότε: $\sigma_n(f)(\pi)\longrightarrow\frac{1}{2}$ όταν $n\to\infty$.

$$\sigma_n(f)(0)\longrightarrow\frac{1}{2}$$