- Μάθημα 15ο: Αρμονική Ανάλυση:

- <u>Θεώρημα Fejér:</u>

Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$.

1. Έστω $t \in \mathbb{T}$, για το οποίο υπάρχει $a \in \mathbb{C}$ ώστε: $\lim_{s \to 0} \left(f(t+s) + f(t-s) - 2a \right) = 0$. Τότε: $\sigma_n(f)(t) \xrightarrow{n\to\infty} a$ για αυτό το t.

2. Αν I είναι ένα κλειστό διάστημα σημείων συνέχειας της f τότε η σύγκλιση $\sigma_n(f) \to f$ είναι ομοιόμορφη στο I.

<u>Απόδειξη:</u> 1). Έστω $t \in \mathbb{T}$ για το οποίο ισχύει ότι υπάρχει $a \in \mathbb{C}$ τ.ω: $\lim_{s\to 0}\left(f(t-s)+f(t+s)\right.$ $\left.-2a\right)=0$. Τότε $\sigma_n(f)(t) - a = K_n * f(t) - a = K_n * f(t) - a \overset{*}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{[redacted]}^{\pi} K_n(s)\left(f(t-s)+f(t+s)-2a\right)ds$

Έστω $\delta > 0$ και γράφουμε: $\sigma_n(f)(t) - a = \int_0^{\delta} K_n(s)\left(f(t+s)+f(t-s)-2a\right)ds + \int_{\delta}^{\pi} K_n(s)\left(f(t+s)+f(t-s)\right.$ $\left.-2a\right)ds$. Έστω τώρα $\varepsilon > 0$. Τότε αφού $\lim_{s\to 0}\left(f(t+s)+f(t-s)-2a\right)=0$ έπεται ότι υπάρχει $\delta > 0$ όπου: $\delta = \delta(\varepsilon, t)$, τ.ω: $|f(t+s)+f(t-s)-2a| \leq \varepsilon/2$, $\forall s \in (-\delta, \delta)$.

Έτσι έχουμε ότι: το πρώτο ολοκλήρωμα: φράσσεται από: $\left|\int_0^{\delta} K_n(s)\left(f(t+s)+f(t-s)-2a\right)\frac{ds}{2\pi}\right|$ $\leq \frac{\varepsilon}{2}\int_0^{\delta} K_n(s)\frac{ds}{2\pi} \leq \frac{\varepsilon}{2}\int_0^{2\pi}\frac{K_n(s)}{2\pi}ds = \frac{\varepsilon}{2}$.

(*) χρησιμοποιούμε ότι K_n είναι άρτια συνάρτηση

1. <u>Ισχυρισμός:</u> $K_n(s) = \frac{1}{n+1}\frac{\sin^2((n+1)\frac{s}{2})}{\sin^2(s/2)} \leq \frac{1}{n+1}\frac{1}{\sin^2(\delta/2)}$, $\forall s \in (\delta, \pi)$:

Απόδειξη: Για $s \in (\delta, \pi)$: έχουμε ότι: $\frac{\delta}{2} < \frac{s}{2} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin(s/2) \geq \sin(\delta/2)$

$\Rightarrow \frac{1}{\sin^2(s/2)} \leq \frac{1}{\sin^2(\delta/2)}$ και άρα έχουμε το ζητούμενο.

2. <u>Ισχυρισμός:</u> $\sup_{\delta \leq s < [redacted]\pi} |K_n(s)| \xrightarrow{n\to\infty} 0$, $\forall \delta > 0$: $K_n(s) \leq \frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{\sin^2(\delta/2)}$, $\forall s \in (\delta, [redacted])$

γιατί σε αυτό το διάστημα ισχύει η ίδια ανισότητα και άρα: παίρνοντας sup ως προς αυτά τα s και αφήνοντας $n \to \infty$ έχουμε το ζητούμενο.

- Για το 2ο ολοκλήρωμα: $\left|\int_{\delta}^{\pi} K_n(s)\left(f(t+s)+f(t-s)-2a\right)ds\right| \leq \sup_{s \in (\delta,\pi)} K_n(s)\, 2(\|f\|_1 + |a|)$ $\leq \frac{1}{n+1}\frac{1}{\sin^2(\delta/2)}\cdot 2(\|f\|_1+|a|) \xrightarrow{n\to\infty} 0$ από τους 2 παραπάνω ισχυρισμούς που αποδείξαμε.

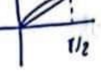
- <u>Απόδειξη</u>:

1). Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$. Έστω και $t \in \mathbb{T}$ [redacted] για το οποίο υπάρχει $a \in \mathbb{C}$:

$$\frac{1}{h}\int_0^h |f(t+s)+f(t-s)-2a|\,ds \xrightarrow{h\to 0} 0.$$

<u>Ισχυρισμός</u>: $0 \le K_n(s) \le \min\{n+1, \frac{\pi^2}{(n+1)s^2}\}$, για $s \in (0,\pi$[redacted]$)$:

<u>Απόδειξη</u>: Για $s \in (0,\frac{\pi}{2})$: ισχύει ότι $\sin(s) > \frac{2}{\pi}s$



και άρα για $s \in (0,\pi)$ είναι: $\sin(s/2) > \frac{s}{\pi}$ και έτσι

έχουμε ότι: για $s \in (0,\pi)$: $0 \le K_n(s) = \frac{1}{n+1}\frac{\sin^2((n+1)s/2)}{\sin^2(s/2)} \le \frac{1}{n+1}\cdot\frac{\pi^2}{s^2}$.

Επίσης: για $s \in (0,\pi)$: $K_n(s) = \sum_{k=-n}^{n}\left(1-\frac{|k|}{n+1}\right)e^{iks}$ και άρα: $K_n(s) = |K_n(s)|$

$$\le \sum_{k=-n}^{n}\left|1-\frac{|k|}{n+1}\right| = \sum_{k=-n}^{n}\left(1-\frac{|k|}{n+1}\right) = 2n+1-\frac{1}{n+1}\sum_{k=-n}^{n}|k| = 2n+1-\frac{1}{\cancel{n+1}}\cancel{2}\frac{n(\cancel{n+1})}{\cancel{2}} = n+1$$

και άρα έχουμε το ζητούμενο.

Όπως είδαμε στο θεώρημα Fejèr: $\sigma_n(f)(t)-a = \int_0^\delta K_n(s)(f(t+s)+f(t-s)-2a)\frac{ds}{2\pi}$

$+\int_\delta^\pi K_n(s)(f(t+s)+f(t-s)-2a)\frac{ds}{2\pi}$. Το δεύτερο ολοκλήρωμα: $\left|\int_\delta^\pi K_n(s)(f(t+s)+f(t-s)-2a)\frac{ds}{2\pi}\right|$

$$\le \int_\delta^\pi \frac{\pi^{\cancel{2}}}{(n+1)s^2}|f(t+s)+f(t-s)-2a|\frac{ds}{2\cancel{\pi}} \le \frac{\pi}{2(n+1)}\cdot\frac{1}{\delta^2}\int_\delta^\pi |f(t+s)+f(t-s)-2a|\,ds$$

$$\le \frac{\pi}{\cancel{2}(n+1)}\cdot\frac{1}{\delta^2}\cancel{2}\|f-a\|_1 = \frac{\pi\|f-a\|_1}{(n+1)\delta^2}.$$ Επιλέγουμε $\delta_n = \frac{1}{\sqrt[4]{n+1}} > 0$ και τότε

$$\left|\int_{\delta_n}^\pi K_n(s)(f(t+s)+f(t-s)-2a)\frac{ds}{2\pi}\right| \le \frac{\pi}{\sqrt{n+1}}\cdot\|f-a\|_1 \le \frac{\pi}{\sqrt{n+1}}(\|f\|_1+|a|) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

- $\left|\int_0^{\delta_n} K_n(s)(f(t+s)+f(t-s)-2a)\,ds\right| \le \int_0^{1/n+1}\cdots + \int_{1/n+1}^{\delta_n}\cdots$

Ορίζουμε $\phi(h)=\int_{-2a}^{h}|f(t+s)+f(t-s)-2a|\,ds$, $h\in[0,2\pi]$ και τότε το 1ο ολοκλήρωμα:

$$\left|\int_0^{\frac{1}{n+1}} K_n(s)(f(t+s)+f(t-s))\frac{ds}{2\pi}\right| \le \frac{n+1}{2\pi}\int_0^{1/n+1}|f(t+s)+f(t-s)-2a|\,ds = \frac{n+1}{2\pi}\,\phi\left(\frac{1}{n+1}\right)\xrightarrow{n\to\infty}0$$

από την υπόθεση. Το δεύτερο ολοκλήρωμα: $\left|\int_{1/n+1}^{\delta_n} K_n(s)(f(t+s)+f(t-s)-2a)\frac{ds}{2\pi}\right|$

$$\le \int_{1/n+1}^{\delta_n}\frac{\pi^{\cancel{2}}}{(n+1)s^2}|f(t+s)+f(t-s)-2a|\frac{ds}{2\cancel{\pi}} = \frac{\pi}{2(n+1)}\int_{1/n+1}^{\delta_n}\frac{1}{s^2}|f(t+s)+f(t-s)-2a|\,ds$$

$$\underset{\text{ολοκλήρωση}}{\overset{\text{παραγοντική}}{=}} \frac{\pi}{2(n+1)}\left(\frac{\phi(\delta_n)}{\delta_n^2}-\frac{\phi\left(\frac{1}{n+1}\right)}{\left(\frac{1}{n+1}\right)^2}\right)-\frac{\pi}{\cancel{2}(n+1)}\int_{1/n+1}^{\delta_n}\frac{1}{s^3}(-\cancel{2})\,\phi(s)\,ds$$

$$= \frac{\pi}{2(n+1)}\left(\frac{\phi(\delta_n)}{\delta_n^2}-\frac{\phi(1/n+1)}{(1/n+1)^2}\right)+\frac{\pi}{n+1}\int_{\frac{1}{n+1}}^{\delta_n}\frac{\phi(s)}{s^3}\,ds \le \frac{\pi}{2(n+1)}\cdot\frac{1}{\delta_n}\,\frac{\phi(\delta_n)}{\delta_n}+\frac{\pi}{(n+1)}\int_{1/n+1}^{\delta_n}\frac{\phi(s)}{s}\frac{ds}{s^2}$$

Δοθέντος τώρα $\varepsilon>0$: υπάρχει $\delta>0$ τ.ω.: $\frac{\phi(s)}{s}<\varepsilon$, $\forall s\in(0,\delta)$ από την υπόθεση.
Τώρα αφού: $\delta_n\xrightarrow{n\to\infty}0$ έπεται ότι υπάρχει n_δ τ.ω.: $\delta_n<\delta$, $\forall n\geq n_\delta$. Έτσι για $n\geq n_\delta$:

$$\left|\int_{1/n+1}^{\delta_n}K_n(s)(f(t+s)+f(t-s)-2a)\frac{ds}{2\pi}\right| \le \frac{\varepsilon\pi}{\delta_n\,(n+1)^{3/4}}+\frac{\pi}{n+1}\,\varepsilon\int_{1/n+1}^{\delta_n}\frac{ds}{s^2}$$

$\le \ldots$ (πράξεις) $\le \frac{\varepsilon\pi}{(n+1)^{3/4}}+\varepsilon\pi$ και άρα: $\left|\int_{1/n+1} K_n(s)(f(t+s)+f(t-s)-2a)\,ds\right|$

$\le 2\varepsilon\pi$, $\forall n\geq n_\delta$ και αφού το $\varepsilon>0$ ήταν τυχόν το όριο $n\to+\infty$ δίνει 0.

και άρα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$: $\forall n \geq n_0$: $\left| \int_{\delta}^{\pi} K_n(s)(f(t+s)+f(t-s)-2a)\,ds \right| < \varepsilon/2$

όπου το n_0 εξαρτάται από ε και δ το οποίο με την σειρά του εξαρτάται

από τα ε, t. Άρα: $\forall n \geq n_0$: $|\sigma_n(f)(t) - a| < \varepsilon$.

Ιδιαιτέρως αν η f είναι συνεχής στο t ισχύει ότι: $f(t+s)+f(t-s)-2a \xrightarrow{s \to 0}$ [redacted] 0

για $a = f(t)$

2). Αν η f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα I τότε η f είναι ομοιόμορφα

συνεχής στο I. Πριν το $n_0 \in \mathbb{N}$ εξαρτάται από το t μόνο μέσω της εξάρτησης

του από το $\delta > 0$. Για $a_t = f(t)$ επειδή η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο I

έπεται ότι [redacted] δοθέντος $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τ.ω: $|f(t+s)+f(t-s)$

$-2a_t| < \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall t \in I$, $\forall s \in (-\delta, \delta)$ και άρα το $\delta > 0$ δεν εξαρτάται πλέον από

το t και άρα η σύγκλιση $\sigma_n(f) \xrightarrow{n \to \infty} f$ είναι ομοιόμορφη στο I.

▷ <u>Θεώρημα:</u> (Lebesgue): Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$.

1. Έστω $t \in \mathbb{T}$ για το οποίο υπάρχει $a \in \mathbb{C}$ τ.ω: $\frac{1}{h} \int_0^h |f(t+s)+f(t-s)-2a|\,ds \xrightarrow{h \to 0} 0$.

Τότε: $\sigma_n(f)(t) \xrightarrow{n \to \infty} a$

2. $\sigma_n(f)(t) \xrightarrow{n \to \infty} f(t)$, $\forall t \in Leb(f)$ (επομένως λ-σχεδόν παντού)

- <u>Παρατήρηση:</u> Η απόδειξη του θεωρήματος Fejér δουλεύει για το $K_n * f$ με

$(K_n)_{n \geq 1}$ πυρήνα αθροισιμότητας τ.ω: 1). $K_n(s) = K_n(-s)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall s \in \mathbb{T}$

2). $\sup_{\delta < s < \pi} |K_n(s)| \xrightarrow{n \to \infty} 0$, $\forall \delta \in (0, \pi)$

Δηλαδή για τέτοιους πυρήνες αν υπάρχει το όριο $\lim_{s \to 0} (f(t+s)+f(t-s))$ τότε:

$K_n * f(t) \xrightarrow{n \to \infty} \lim_{s \to 0} \frac{f(t+s)+f(t-s)}{2}$