1 Ανάλυση ΙΙ Μάθημα 01.

Ορσ: Έστω X σύνολο. Μια οικογένεια τ υποσυνόλων του X καλείται τοπολογία στον X αν ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες.

1. $\phi, X \in \tau$
2. αν $U_i \in \tau$, $i \in I \Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$
3. αν $U_1, \dots, U_k \in \tau \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{k} U_i \in \tau$

Το ζεύγος (X, τ) καλείται τοπολογικός χώρος. Τα στοιχεία της τ καλούνται ανοικτά. Αν $U \subseteq X$ ανοικτό $\Rightarrow X \setminus U$ καλείται κλειστό.

Ορσ: Έστω (X, τ) τ.χ $A \subseteq X$. Η κλειστότητα του A, συμβ $\overline{A}$ είναι

$$\overline{A} = \bigcap \{F \subseteq X \mid F \supseteq A, F \text{ κλειστό}\}.$$

Ορσ: Έστω (X, τ) τ.χ. και $A \subseteq X$. Το εσωτερικό του A συμβ. $Int(A)$.

$$Int(A) = \bigcup \{U \subseteq X \mid U \subseteq A, U \text{ ανοικτό}\}$$

<u>Ορσ</u>: Ένας τ.χ (X,τ) καλείται <u>Hausdorff</u> αν $\forall x,y \in X$ με $x \neq y$ υπάρχουν $U,V \in \tau$: $x \in U$, $y \in V$, $U \cap V = \emptyset$.

<u>Ορσ</u>: Έστω (X,τ_1), (Y,τ_2) τ.χ. και $f: X \to Y$ συνάρτηση.

Η f καλείται <u>συνεχής</u> αν $\forall V \subseteq Y$ ανοιχτό $\Rightarrow f^{-1}(V) \in \tau_1$.

<u>Ορσ</u>: ① Έστω (X,τ) τ.χ. και $A \subseteq X$.

Ανοιχτό <u>κάλυμμα</u> του A είναι μια οικογένεια $\{U_i\}_i \subseteq \tau$ τ.ω.

$$A \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i .$$

② Αν $\{U_i\}_{i \in I}$ ανοιχτό καλ. και $I' \subseteq I$ τ.ω. $\{U_i\}_{i \in I'}$ κάλυμμα του A, τότε $\{U_i\}_{i \in I'}$ καλείται <u>υποκάλυμμα</u> του A.

<u>Ορσ</u>: Έστω (X,τ) τχ και $K \subseteq X$.

Το K καλείται <u>συμπαγές</u> αν για κάθε ανοικτό κάλυμμα του K υπάρχει πεπερ. υποκάλυμμα.

<u>Πρόταση</u>. Έστω (X,τ) τ.χ. Τότε κάθε πεπερ. υποσύνολο του X είναι <u>συμπαγές</u>.

<u>Πρόταση</u>: Έστω (X,τ) Hausdorff τ.χ. και $K \subseteq X$ συμπαγές $\Rightarrow K$ κλειστ.

<u>αποδ</u>

<u>Λήμμα</u> (X,τ) Hausdorff τ.χ. και $\emptyset \neq K \subseteq X$ συμπ. $x \in X$ και $x \notin K$.
$\Rightarrow \exists\, U_x \in \tau,\ x \in U_x,\ U_x \cap K = \emptyset$.

<u>αποδ</u> $\forall\, y \in K$ επιλέγουμε $U_y \in \tau$, $W_y \in$: τ.ω. $x \in U_y$, $y \in W_y$: $U_y \cap W_y = \emptyset$.

$\Rightarrow \{U_y\}$ είναι ανοικτό καλ. του K.

$\Rightarrow \exists\, y_1, \dots, y_n \in K : K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} W_{y_i}$

Θέτουμε $U_x = U_{y_1} \cap \dots \cap U_{y_n}$.

$\Rightarrow$ $x \in U_x \in \tau$ και $U_x \cap K = \emptyset$

αφού $U_x \cap K \subseteq U_x \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} W_{y_i}\right)$

$$= \bigcup_{i=1}^{n} \left(U_x \cap W_{y_i}\right)$$

$$= \bigcup_{i=1}^{n} \left(\bigcap_{j=1}^{n} V_{y_j} \cap W_{y_i}\right)$$

$$\subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \left(V_{y_i} \cap W_{y_i}\right) = \emptyset .$$

<u>αποδ. πρότ.</u>: Αν $K = \emptyset$ ή X $\Rightarrow$ ΟΚ.

Έστω $\emptyset \neq K \subsetneq X$. Θ.δ.ο. $X \setminus K$ <u>ανοιχτό</u>: Έστω $x \in X\setminus K$ $\overset{\text{λήμμα}}{\Longrightarrow}$

$\exists\, \underset{\ni x}{U_x} \in \tau$: $U_x \cap K = \emptyset$.

Θέτουμε: $U = \bigcup_{x \in X\setminus K} U_x \in \tau$.

$\Rightarrow$ $U = X \setminus K$. □

<u>Ορσ.</u> Έστω (X, τ) τ.χ. και (x_n) ακολουθία στον X. Θα λέμε ότι η x_n <u>συγκλίνει</u> σε ένα $x \in X$ αν: $\forall U \in \tau$, $x \in U$: $\exists n_0 \in \mathbb{N}$: $\forall n \geq n_0$ $x_n \in U$.

απ — $\Rightarrow$ X.

Π.χ. $X=[0,1]$ Ορίζουμε τ

$\tau=\{\emptyset\}\cup\{U\subseteq X \mid X\setminus U$ αριθμ.$\}$.

συνοσω-αριθμήσιμη τοπολογία.

Έστω $A=(0,1]\in\tau$. Ισχ. $X=\bar{A}$

Πράγματι, αν $\bar{A}\subsetneq X \Rightarrow \bar{A}=A$.

$\Rightarrow \emptyset\neq X\setminus\bar{A}=X\setminus A=\{0\}\in\tau$ άτοπο

Έστω (x_n) στο A. Έστω κέντρο

$F=\{x_n\}$ αριθμ. $\Rightarrow X\setminus F\in\tau$.

$U=X\setminus F\ni 0$ Άρα κέντρο, αφού

$\nexists\, n\in\mathbb{N}: x_n\in U$.

Ορσ: Έστω (X,τ). Μια υποοικογέ-

νεια της τ λέγεται βάση αν

$\forall\, U\in\tau$, U γράφεται ως ένωση

στοιχείων της τ.

Πρόταση: (X,τ) τ.χ. $\mathcal{B}\subseteq\tau$.

$\Rightarrow \mathcal{B}$ βάση της τοπολ. ~~$\forall x\in X$~~

$\forall\, U \in \mathcal{T},\ x \in U \to \exists\, V \in \mathcal{B}:$

$x \in V \subseteq U.$

<u>Πρόταση</u>: Έστω X τ.χ. $\{\mathcal{T}_i\}_{i\in I}$ οικογένεια τοπολογιών στον X.

$\Rightarrow \mathcal{T} = \bigcap \mathcal{T}_i = \{U \subseteq X \mid U \in \mathcal{T}_i,\ \forall i \in I\}$

είναι τοπολογία στον X.

Έστω $F \subseteq \mathcal{P}(X)$. Παρατηρούμε ότι

$\{\mathcal{T} \mid \mathcal{T} \text{ τοπολ. στον } X,\ F \subseteq X\} \neq \emptyset$

αφού περιέχει το $\mathcal{P}(X)$.

<u>Ορσ</u>: Έστω X σύνολο και F οικογένεια υποσυνόλων του X.

Με $\mathcal{T}_F$ συμβ. την τοπολογία

$\mathcal{T}_F = \bigcap \{\mathcal{T} \mid \mathcal{T} \text{ τοπολ. στον } X,\ F \subseteq \mathcal{T}\}.$

Η $\mathcal{T}_F$ καλείται η τοπολογία που παράγεται από την F και είναι η μικρότερη τοπολ. που περιέχει την F.

Πρόταση Έστω X σύνολο και $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ τ.ω.

(α) $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$

(β) αν $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{B} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} B_i \in \mathcal{B}$

Τότε η $\mathcal{B}$ είναι βάση για την τοπολογία την οποία παράγει $(\tau_{\mathcal{B}})$.

απόδ: Ορίζουμε:

$$\tau = \{\emptyset\} \cup \left\{ \bigcup_{i \in I} B_i \;\middle|\; (B_i)_i \subseteq \mathcal{B} \right\}.$$

$\Rightarrow$ τ τοπολογία στο X, $\mathcal{B} \subseteq \tau$.

Από ορσ, $\tau_{\mathcal{B}} \subseteq \tau$.

Τώρα, αν $U \in \tau \Rightarrow U$ είναι ένωση στοιχείων του $\mathcal{B}$, $\mathcal{B} \subseteq \tau_{\mathcal{B}}$. $\tau_{\mathcal{B}}$ τοπολογία $\Rightarrow U \in \tau_{\mathcal{B}}$. $\square$

Πεπερασμένα γινόμενα τοπολογικών χώρων.

Έστω $(X_1, \tau_1), \ldots, (X_n, \tau_n)$ τ.χ.

Θεωρούμε το σύνολο $\mathcal{R}$ των (3)

ανοικτών ορθογωνίων

$$\mathcal{R} = \{ U_1 \times \dots \times U_n \mid U_i \in \tau_i,\ \forall i = 1 \dots n \}$$

κλειστά ως προς πεπερ τομές.

Πρότ.

$\Rightarrow$ $\mathcal{R}$ είναι βάση της $\tau_{\mathcal{R}}$.

Ορσ. : Έστω $(X_1, \tau_1), \dots, (X_n, \tau_n)$

τ.χ. $\mathcal{M} \in \prod_{i=1}^{n} \tau_i$ συνιβ την τοπο-

λογία γινόμενο των τ_i

Θεώρημα : $(X_1, \tau_1), (X_2, \tau_2)$ τ.χ.

$K_1 \subseteq X_1$, $K_2 \subseteq X_2$ συμπαγή.

$\Rightarrow$ $K_1 \times K_2 \subseteq X_1 \times X_2$ συμπαγές

με την τοπολογία γινόμενο.

απόδ : Έστω $K_1 \subseteq X_1$, $K_2 \subseteq X_2$

συμπ. και $\{U_i\}_{i \in I}$ ανοικτό κάλ.

του $K_1 \times K_2$. Χβγ υποθέτουμε

$U_i = A_i \times B_i$, $A_i \in \tau_1$

$B_i \in \tau_2$.

Έστω $x \in K_1$. Θέτουμε: (9)

$$I_x = \{ i \in I \mid x \in A_i \}.$$

$\Rightarrow (A_i \times B_i)_{i \in I_x}$ καλύπτει το

$\{x\} \times K_2 \Rightarrow \{B_i\}_{i \in I_x}$ ανοικτό

καλ. του K_2.

$\Rightarrow \exists F_x$ πεπερ. $\subseteq I_x$: $K_2 \subseteq \bigcup_{i \in F_x} B_i$

$$\Rightarrow \{x\} \times K_2 \subseteq \bigcup_{i \in F_x} (A_i \times B_i).$$

Θέτουμε $A_x = \bigcap_{i \in F_x} A_i \in \tau_1$, $x \in A_x$.

$\Rightarrow (A_x)_{x \in X_1}$ ανοικτό καλ. του K_1.

$\Rightarrow$ υπάρχουν $x_1, \dots, x_n \in K_1$ τ.ώ.

$$K_1 \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} A_{x_j}$$

Ισχ. $K_1 \times K_2 \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} \left(\bigcup_{i \in F_{x_j}} (A_i \times B_i) \right)$

Έστω $(x, y) \in K_1 \times K_2$.

$x \in K_1 \Rightarrow \exists j \in \{1, \dots, n\} : x \in A_{x_j}$ (10)

$\Rightarrow \exists i : y \in B_i$

$\in F_{x_j}$

$\Rightarrow$

Όμως, $x \in A_{x_j} \subseteq A_i$

$(x, y) \in A_i \times B_i \subseteq \bigcup_{i \in F_{x_j}} (A_i \times B_i)$.

$\Rightarrow \{A_i \times B_i\}_{i \in F_{x_j}, j \in \{1, \dots, m\}}$

ανοικτό πεπερ. κάλυμμα του $K_1 \times K_2$

$\square$