- Μάθημα 10ο: Ανάλυση 2: Δοδώς:

- Ασκήσεις / Παρατηρήσεις:

1. Αν $x_n \xrightarrow{w} x \Rightarrow \|x\| \le \liminf \|x_n\|$

- Απόδ. $x_n \xrightarrow{w} x \Rightarrow \hat{x}_n(x^*) \to \hat{x}(x^*), \forall x^* \in X^*$

και άρα από πόρισμα ομοιόμορφου φράγματος: $\|\hat{x}\| \le \underline{\lim} \|\hat{x}_n\|$ λόγω ισομετρίας

$\|x\| \le \underline{\lim} \|x_n\|$

2. Αν $x_n \xrightarrow{w} x$ και $x_n^* \xrightarrow{\|\cdot\|} x^*$, τότε: $x_n^*(x_n) \to x^*(x)$

- Απόδ. Αφού $x_n \xrightarrow{w} x$ έπεται ότι $\exists n_1 \in \mathbb{N}: \forall n \ge n_1: |x^*(x_n) - x^*(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$

και αφού $x_n^* \xrightarrow{\|\cdot\|} x^*$ έπεται ότι $\exists n_2 \in \mathbb{N}: \forall n \ge n_2: \|x_n^* - x\| <$ [redacted] $\cancel{\frac{\varepsilon}{3(\|x\|+1)}}$ $\frac{\varepsilon}{3C}$

και τότε: $\forall n \ge n_0 = \max\{n_1, n_2\}: |x_n^*(x_n) - x^*(x)| \le |x_n^*(x_n) - x^*(x_n)| + |x^*(x_n) - x^*(x)|$

$\le \|x_n^* - x^*\| C + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$ όπου: $C = \max\|x_n\| + 1 > 0$

3. $x_n \xrightarrow{w} x$, $x_n^* \xrightarrow{w} x^* \not\Rightarrow x_n^*(x_n) \to x^*(x)$

Π.χ: $y_n = e_n$ στον ℓ_2 και $x_n^* = e_n$ στον ℓ_2 και άρα: $x_n^*(x_n) = 1 \ne 0$ αλλά: $x_n \xrightarrow{w} 0$

και $x_n^* \xrightarrow{w} 0$

- Θεώρημα: Αν X^* είναι διαχωρίσιμος τότε $(\overline{B}_X, w)$ είναι μετρικοποιήσιμος.

- Απόδειξη: Έστω (x_n^*) μια ακολουθία norm-πυκνή στην $\overline{B}_{X^*} = \{x^* \in X^*: \|x^*\| \le 1\}$.
Ορίζουμε τώρα: $p:$ [redacted] $\overline{B}_X \times \overline{B}_X \to [0,2]$ με $p(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n^*(x) - x_n^*(y)|}{2^n}$. Τότε
παρατηρούμε ότι η p είναι καλά ορισμένη και $0 \le p(x,y) \le 2$. Επίσης: $p(x,y) \le p(x,z) + p(z,y)$ προφανώς. Επίσης έχουμε ότι $p(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ γιατί η $x = y \Rightarrow p(x,y) = 0$ προφανώς. Αντίστροφα έστω $p(x,y) = 0$ αλλά $x \ne y \Rightarrow z = x - y \ne 0$. Τότε: $|x_n^*(z)| = 0$ $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow z \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \ker x_n^*$. Έστω τώρα $x^* \in X^*$, $\|x^*\| = 1$ τέτοιο ώστε: $x^*(z) = \|z\|$ από Hahn-Banach (πόρισμα). Τότε: $\forall n \in \mathbb{N}: \|x^* - x_n^*\| \ge (x^* - x_n^*)\left(\frac{z}{\|z\|}\right) = 1 - 0 = 1$
και αυτό είναι άτοπο γιατί η (x_n^*) είναι norm-πυκνή στην $\overline{B}_{X^*} \ni x^*$. Τώρα θα αποδείξουμε ότι $(\overline{B}_X, w) \overset{τοπ.}{=} (\overline{B}_X, p)$.

<u>Βήμα 1ο:</u> Έστω $x \in \overline{B_X}$, $x \in W$ ασθενώς περιοχή του x. Πρέπει να αποδείξουμε ότι $\exists r>0$ τέτοιο ώστε: $B_p(x,r) \cap \overline{B_X} \subseteq W \cap \overline{B_X}$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας: $W = W(x, \{f_1, \dots, f_n\}, \varepsilon)$ όπου: $f_1, \dots, f_n \in X^*$. Αν $c>0$ με $c > \|f_1\|, \dots, \|f_n\|$ τότε: $W(x, \{f_1, \dots, f_n\}, \varepsilon) = W(x, \{\frac{f_1}{c}, \dots, \frac{f_n}{c}\}, \frac{\varepsilon}{c})$ και $\frac{f_1}{c}, \dots, \frac{f_n}{c} \in \overline{B_{X^*}}$ και άρα χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι: $\|f_1\|, \dots, \|f_n\| \leq 1$

Τώρα: για κάθε $i = 1, \dots, n$ επιλέγουμε $n_i \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε: $\|f_i - x_{n_i}^*\| < \frac{\varepsilon}{4}$ αφού η (x_n^*) είναι norm-πυκνή στην $\overline{B_{X^*}}$. Επιλέγουμε $r>0$ αρκετά μικρό ώστε: $r \cdot 2^{n_i} < \frac{\varepsilon}{4}$, $\forall i = 1, \dots, n$. Τώρα έστω: $y \in \overline{B_X}$ με $p(x,y) < r$. Τότε: $y \in \overline{B_X}$ με: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n^*(x-y)|}{2^n} < r$. Τώρα: $\forall i = 1, \dots, n$: $\frac{|x_{n_i}^*(x-y)|}{2^{n_i}} < r \iff |x_{n_i}^*(x-y)| < \frac{\varepsilon}{4}$. Άρα: $|f_i(x) - f_i(y)| \leq |f_i(x) - x_{n_i}^*(x)| + |x_{n_i}^*(x) - x_{n_i}^*(y)| + |x_{n_i}^*(y) - f_i(y)|$ $\leq \|f_i - x_{n_i}^*\| \|x\| + \underbrace{\cancel{\|x_{n_i}^*\| \|x-y\|}}_{|x_{n_i}^*(x-y)|} + \|x_{n_i}^* - f_i\| \|y\| < \frac{\varepsilon}{4} \cdot 1 + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{3\varepsilon}{4} < \varepsilon$ και άρα: $B_p(x,r) \cap \overline{B_X} \subseteq W(x, \{f_1, \dots, f_n\}, \varepsilon) \cap \overline{B_X}$

<u>Βήμα 2ο:</u> Για κάθε $x \in \overline{B_X}$, κάθε $r>0$: $\exists W \ni x$ ασθενώς περιοχή του x έτσι ώστε: $W \cap \overline{B_X} \subseteq \overline{B_X} \cap B_p(x,r)$. Έστω $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε: $\frac{1}{2^{n_0-1}} < \frac{r}{4}$. Θέτουμε $W = W(x, \{x_1^*, \dots, x_{n_0}^*\}, \frac{r}{4})$ και τώρα έστω: $y \in W \cap \overline{B_X}$ και τότε έχουμε ότι: $p(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n^*(x-y)|}{2^n} = \sum_{n=1}^{n_0} \frac{|x_n^*(x-y)|}{2^n} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{|x_n^*(x-y)|}{2^n} < \frac{r}{4} \sum_{n=1}^{n_0} \frac{1}{2^n} + 2 \sum_{n>n_0} \frac{1}{2^n}$ $\leq \frac{r}{4} \cdot 1 + \frac{2}{2^{n_0}} = \frac{r}{4} + \frac{1}{2^{n_0-1}} < \frac{r}{4} + \frac{r}{4} = \frac{r}{2} < r$ και άρα έχουμε το ζητούμενο. Άρα: $y \in \overline{B_X} \cap B_p(x,r)$

* Ασθενείς * τοπολογίες:

- **Ορισμός:** Έστω X χώρος Banach. Η ασθενής * τοπολογία του X^* είναι η $(X^*, \hat{X})$ $(\Gamma = \hat{X} \subseteq X^{**})$

- **Παρατηρήσεις:** 1. Από ~~Hahn-Banach~~ [redacted] ο $\hat{X}$ διαχωρίζει τα σημεία του X^* και άρα ο $(X^*, \hat{X})$ είναι Hausdorff. Επομένως ο (X^*, w^*) είναι τοπικά κυρτός τοπολογικός διανυσματικός χώρος από πρόταση προηγούμενου μαθήματος.

2. Αν $x_1, \dots, x_n \in X$, $\varepsilon > 0$, $x^* \in X^*$ τότε: $W(x^*, \{x_1, \dots, x_n\}, \varepsilon) = \{y^* \in X^* : |x^*(x_i) - y^*(x_i)| < \varepsilon, \ \forall i = 1, \dots, n\}$. Τώρα η $\{W(x^*, A, \varepsilon) : x^* \in X^*, \varepsilon > 0, A \subseteq X \text{ πεπερασμένο}\}$ είναι βάση της ασθενούς * τοπολογίας, και αποδεικνύεται όπως στην περίπτωση γενική.

3. Γνωρίζουμε ότι: $(X, \Gamma)^* = \langle \Gamma \rangle$ γενικά και άρα τα $x^{**} \in (X^*)^*$ τα οποία είναι w^*-συνεχή είναι τα: $\langle \hat{X} \rangle = \hat{X}$. Ειδικότερα αν $\hat{X} \neq X^{**}$ τότε: $\exists\, x^{**} \in X^{**}$ που δεν είναι w^*-συνεχές. Αλλά τότε: $x^{**^{-1}}(\{0\}) = \ker(x^{**})$ δεν θα είναι w^*-κλειστό. Άρα: $\ker(x^{**}) \subset X^*$ που δεν είναι w^*-κλειστός και άρα δεν ισχύει το θεώρημα Mazur για την [redacted] w^*-τοπολογία.

- **Θεώρημα Alaoglu:** Αν X είναι ένας χώρος Banach τότε: η $(\overline{B_{X^*}}, w^*)$ συμπαγής.

- **Θεώρημα Goldst[redacted]ein:** Αν X είναι ένας χώρος Banach: $\overline{B_{\hat{X}}}^{w^*} = \overline{B_{X^{**}}}$

Απόδειξη: Από θεώρημα Alaoglu η $\overline{B_{X^{**}}}$ είναι w^*-closed και άρα: $\overline{B_{\hat{X}}}^{w^*} \subseteq \overline{B_{X^{**}}}$.

Έστω ότι ο εγκλεισμός είναι γνήσιος και άρα δηλαδή: υπάρχει $x^{**} \in \overline{B_{X^{**}}}$ με αν $F = \overline{B_{\hat{X}}}^{w^*}$ τότε: $x^{**} \notin F$. Τότε: $\{x^{**}\}$ είναι w^*-συμπαγές και κυρτό και το F είναι w^*-κλειστό και κυρτό γιατί ο (X^{**}, w^*) είναι τοπικά κυρτός τοπολογικός διανυσματικός χώρος και $B_{\hat{X}}$ είναι κυρτό. Επίσης: $\{x^{**}\} \cap F = \emptyset$. Τώρα από το 2ο ΘΔΘ: $\exists\, f \in X^{***}$ που είναι w^*-συνεχές και με $\|f\| = 1$ $\sup_{[redacted]\, y^{**} \in F} f(y^{**}) < f(x^{**})$. Αλλά ο $(X^{**}, w^*)^* = \hat{X^*}$ και άρα:

$\exists\, x^* \in X^*$ με: $f = \hat{x^*}$. Τότε όμως: $\sup_{y^{**} \in F} f(y^{**}) = \sup_{y^{**} \in F} y^{**}(x^*) \geq \sup_{y^{**} \in \overline{B_{\hat{X}}}} y^{**}(x^*)$

Παρατηρούμε ότι: $y^{**} \in \overline{B_{\hat{X}}}$ ανν: $y^{**} = \hat{x}$ για κάποιο $\|x\| \le 1$

και άρα: $\sup_{y^{**}\in \overline{B_{\hat{X}}}} y^{**}(x^*) = \sup_{\|x\|\le 1} x^*(x) = \|x^*\|$ Επιπλέον είναι $f(x^{**}) = \hat{x^*}(x^{**})$

$= x^{**}(x^*) \le \|x^{**}\|\,\|x^*\| \le \|x^{**}\|$ και άρα άτοπο.

Ορισμός: Έστω (x_n^*) ακολουθία του X^* και $x^*\in X^*$. Λέμε ότι: $x_n^* \xrightarrow{w^*} x^*$ αν: $\forall x^* \in W$ ασθενής * περιοχή του x^*: $\exists n_0\in\mathbb{N}$: $\forall n\ge n_0$: $x_n^*\in W$.

Πρόταση Τα εξής είναι ισοδύναμα:

(α). $x_n^* \xrightarrow{w^*} x^*$

(β). $x_n^*(x)\to x^*(x)$, $\forall x\in X$

(γ). $x_n^*(x)\to x^*(x)$, $\forall x \in S_X$

(δ). $(x_n^*)_{n\ge 1}$ είναι norm-φραγμένη και $\forall D\subseteq X$ [redacted] με: $\overline{\langle D\rangle}^{\|\cdot\|} = X$ $x_n^*(x)\to x^*(x)$, $\forall x\in D$

Απόδειξη: Όμοια με την προηγούμενη πρόταση για την ασθενή τοπολογία