- Μάθημα 15ο: Ανάλυση 2: Δοδός: <u>Θεώρημα Rosenthal</u>.

▷ <u>Ακολουθία radermacher</u>: $(r_n)_{n\geq 1}$

$r_n : [0,1] \longrightarrow \{-1,1\}$

-

<u>Ιδιότητες</u>: 1). Ανεξάρτητες

2). Συμμετρικές

3). $E[r_n] = 0$

4). $P(r_n = 1) = P(r_n = -1) = 1/2$

Έστω $k \in \mathbb{N}$ και $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$: $\cancel{\left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n \right\|}$ $\left\| \sum_{n=1}^{k} a_n r_n \right\|_{L^2}^2 = E\left[\left(\sum_{n=1}^{k} a_n r_n \right)^2 \right]$

$$= \sum_{n,n'=1}^{k} a_n a_{n'} E[r_n r_{n'}] = \sum_{n=1}^{k} a_n^2 \Longrightarrow \left\| \sum_{n=1}^{k} a_n r_n \right\|_{L^2} = \left(\sum_{n=1}^{k} a_n^2 \right)^{1/2}$$

Για κάθε $n = 1, \dots, k$ έστω $\varepsilon_n = \mathrm{sign}(a_n)$. Τα ενδεχόμενα: $[r_1 = \varepsilon_1], \dots, [r_k = \varepsilon_k]$ είναι ανεξάρτητα και άρα έχουμε ότι: $P\left(\bigcap_{n=1}^{k} [r_n = \varepsilon_n] \right) = \prod_{n=1}^{k} P(r_n = \varepsilon_n) = \frac{1}{2^k}$.

Αν $t \in \bigcap_{n=1}^{k} [r_n = \varepsilon_n]$ τότε: $\sum_{n=1}^{k} a_n r_n(t) = \sum_{n=1}^{k} a_n \varepsilon_n = \sum_{n=1}^{k} |a_n|$ και άρα έχουμε ότι:

$$\left\| \sum_{n=1}^{k} a_n r_n \right\|_{L^\infty} = \sum_{n=1}^{k} |a_n|$$

▷ <u>Θεώρημα Rosenthal</u>: Έστω $S \neq \emptyset$ και $(f_n)_{n\geq 1}$ φραγμένη ακολουθία στον $\ell_\infty(S)$, τότε υπάρχει υπακολουθία $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ της $(f_n)_{n\geq 1}$ τ.ω είτε:

(α). $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ να είναι κατά σημείο συγκλίνουσα

(β). $(f_{n_k}) \sim (e_k)$ του ℓ_1, δηλαδή $\exists\, c, C > 0$ τ.ω: $\forall \ell \in \mathbb{N}$ και $a_1, \dots, a_\ell \in \mathbb{R}$:

$$c \sum_{k=1}^{\ell} |a_k| \leq \left\| \sum_{k=1}^{\ell} a_k f_{n_k} \right\|_{\ell_\infty} \leq C \sum_{k=1}^{\ell} |a_k|$$

* <u>Παρατήρηση</u>: $\ell_\infty(S) = \{ f : S \to \mathbb{R} \mid f : \text{φραγμένη} \}$ και ο $(\ell_\infty(S), \|\cdot\|_\infty)$ είναι χώρος Banach.

▷ Πόρισμα: Έστω $(x_n)_{n\ge1}$ φραγμένη ακολουθία σε έναν χώρο Banach X. Τότε υπάρχει υπακολουθία $(x_{n_k})_{k\ge1}$ της $(x_n)_{n\ge1}$: τ.ω: είτε:

(a). η $(x_{n_k})_{k\ge1}$ να είναι w-Cauchy ($x^*(x_{n_k})$ να είναι Cauchy $\forall x^*\in X^*$)

(b). $(x_{n_k}) \sim (e_k)$ του ℓ_1, δηλαδή $\exists\, c, C>0$ σταθερές τ.ω $\forall \ell\in\mathbb{N}$ και $a_1,\dots,a_\ell\in\mathbb{R}$

$$c\sum_{k=1}^{\ell}|a_k| \le \Big\|\sum_{k=1}^{\ell} a_k x_{n_k}\Big\|_X \le C\sum_{k=1}^{\ell}|a_k|$$

* πάρε για $S=B_{X^*}$.

- Απόδειξη Θεωρήματος:

Αν $A,B\subseteq S$ τότε λέμε ότι το ζεύγος (A,B) είναι ξένο αν: $A\cap B=\emptyset$

▷ Ορισμός: Μια ακολουθία $((A_n,B_n))_{n=1}^{\infty}$ από ξένα ζεύγη του S καλείται ανεξάρτητη αν $\forall F,G\subseteq\mathbb{N}$ μη κενά και πεπερασμένα και ξένα ($F\cap G=\emptyset$) ισχύει ότι: $\Big(\bigcap_{n\in F}A_n\Big)\cap\Big(\bigcap_{n\in G}B_n\Big)\ne\emptyset$

▷ Λήμμα 1ο: Έστω $r<s$ ρητοί αριθμοί και έστω και $(f_n)_{n\ge1}$ ακολουθία στον $\ell_\infty(S)$ φραγμένη και για κάθε $n\in\mathbb{N}$ θέτουμε $A_n=A_n^{r,s}=[f_n<r]$ και $B_n=B_n^{r,s}=[f_n>s]$. Αν η ακολουθία $((A_n,B_n))_{n\ge1}$ είναι ανεξάρτητη τότε η $(f_n)_{n\ge1}$ είναι ισοδύναμη με την standard βάση του ℓ_1.

- Απόδειξη: Αν $C=\sup\|f_n\|_\infty<+\infty$ αφού η $(f_n)_{n\ge1}$ είναι φραγμένη στον $\ell_\infty(S)$, και έχουμε ότι $\forall k\in\mathbb{N}$, $\forall a_1,\dots,a_k\in\mathbb{R}$: $\|\sum_{n=1}^{k}a_nf_n\|_\infty\le C\sum_{n=1}^{k}|a_n|$. Σταθεροποιούμε $k\in\mathbb{N}$ και $a_1,\dots,a_k\in\mathbb{R}$ και ορίζουμε $F=\{n\le k: a_n\ge 0\}\subseteq\mathbb{N}$ και $G=\{n\le k: a_n<0\}\subseteq\mathbb{N}$ και παρατηρούμε ότι $F\cap G=\emptyset$ και χβγ $\emptyset\ne F,G$. Αφού η ακολουθία $((A_n,B_n))_{n\ge1}$ είναι ανεξάρτητη έπεται ότι υπάρχουν $x,y\in S$: $x\in\Big(\bigcap_{n\in F}A_n\Big)\cap\Big(\bigcap_{n\in G}B_n\Big)$ και $y\in\Big(\bigcap_{n\in G}A_n\Big)\cap\Big(\bigcap_{n\in F}B_n\Big)$. Τώρα έστω $c=\sum_{n=1}^{k}a_nf_n(y) > \sum_{n\in F}|a_n|s-\sum_{n\in G}|a_n|r$ και αν $d=\sum_{n=1}^{k}a_nf_n(x) < \sum_{n\in F}|a_n|\cdot r-\sum_{n\in G}|a_n|\cdot s$ και άρα:

και άρα: $c-d > \sum_{n\in F}|a_n|(s-r)+\sum_{n\in G}|a_n|(s-r)=(s-r)\sum_{n=1}^{k}|a_n|$

$\exists z\in S$: τ.ω: $\Big|\sum_{n=1}^{k}a_nf_n(z)\Big|\ge\Big(\frac{s-r}{2}\Big)\sum_{n=1}^{k}|a_n|$. (Αν όχι τότε: $\|\sum_{n=1}^{k}a_nf_n\|_{\ell_\infty}\le\Big(\frac{s-r}{2}\Big)\sum_{n=1}^{k}|a_n|$ και συνεπώς $c-d=\sum_{n=1}^{k}a_nf_n(y)-\sum_{n=1}^{k}a_nf_n(x)$ $\le 2\|\sum_{n=1}^{k}a_nf_n\|_{\ell_\infty}\le(s-r)\sum_{n=1}^{k}|a_n|$

και άρα τώρα: $\left\|\sum_{n=1}^{k} a_n f_n\right\|_\infty \geq \left(\frac{s-r}{2}\right)\sum_{n=1}^{k}|a_n|$ και άρα έχουμε το ζητούμενο.

▷ <u>Ορισμός</u>: Μια ακολουθία $((A_n,B_n))_{n\geq1}$ από ξένα ζεύγη ενός συνόλου $S\neq\emptyset$, καλείται <u>συγκλίνουσα</u> αν: $\forall x\in S$: $\exists n_0\in\mathbb{N}$: $\forall n\geq n_0$: $x\notin A_n$ ή $\exists n_0\in\mathbb{N}$: τ.ω: $\forall n\geq n_0$: $x\notin B_n$

▷ <u>Λήμμα 2ο</u>: Έστω $r<s$ ρητοί αριθμοί και $(f_n)_{n\geq1}$ φραγμένη ακολουθία στον $\ell_\infty(S)$. Ορίζουμε: $\forall n\in\mathbb{N}$ $A_n = A_n^{r,s} = [f_n<r]$ και $B_n = B_n^{r,s} = [f_n>s]$ [redacted] και αν αυτή είναι συγκλίνουσα, τότε η $(f_n)_{n\geq1}$ συγκλίνει κατά σημείο για κάθε $x\in S$.

– <u>Απόδειξη</u>: Προς άτοπον έστω ότι η $(f_n)_{n\geq1}$ δεν συγκλίνει κατά σημείο για κάθε $x\in S$, έχουμε ότι: $\exists x\in S$ και $\exists\, r<s$ ρητοί τέτοιοι ώστε: $\underline{\lim}\, f_n(x)<r<s<\overline{\lim}\, f_n(x)$. Τότε όμως έχουμε ότι: $x\in A_n = A_n^{r,s}$ για άπειρα $n\in\mathbb{N}$ και $x\in B_n = B_n^{r,s}$ για άπειρα $n\in\mathbb{N}$ και άρα: $((A_n,B_n))_{n\geq1}$ όχι συγκλίνουσα, άτοπο από υπόθεση.

▷ <u>Βασικό Συνδυαστικό Λήμμα</u>: Αν $(f_n)_{n\geq1}$ ακολουθία στον $\ell_\infty(S)$ και $r<s$ ρητοί τότε ορίζουμε $\forall n\in\mathbb{N}$: $A_n = A_n^{r,s} = [f_n<r]$ και $B_n = B_n^{r,s} = [f_n>s]$, [redacted] και $\exists$: $L \underset{\infty}{\subseteq} \mathbb{N}$ ώστε: είτε: α). $((A_n,B_n))_{n\in L}$ ανεξάρτητη ή β). $((A_n,B_n))_{n\in L}$ συγκλίνουσα

– <u>Απόδειξη Θεωρήματος Rosenthal</u>: Παρατηρούμε ότι αν $L_1,L_2 \underset{\infty}{\subseteq} \mathbb{N}$ τ.ω: $L_1\setminus L_2$ πεπερασμένο και $((A_n^{r,s},B_n^{r,s}))_{n\in L_1}$ συγκλίνουσα τότε και η $((A_n^{r,s},B_n^{r,s}))_{n\in L_2}$ είναι συγκλίνουσα. Επίσης παρατηρούμε ότι: αν για κάποιους ρητούς $r<s$ και $L \underset{\infty}{\subseteq} \mathbb{N}$ η ακολουθία $((A_n^{r,s},B_n^{r,s}))_{n\in L}$ είναι ανεξάρτητη $\Rightarrow$ $(f_n)_{n\in L} \sim (e_n)$ του ℓ_1 από το 1ο λήμμα. Αν όχι από το βασικό συνδυαστικό λήμμα και το γεγονός ότι το σύνολο $\{(r,s): r<s,\ r,s\in\mathbb{Q}\}$ είναι αριθμήσιμο και την παρατήρηση παραπάνω έπεται ότι: $\exists\, M \underset{\infty}{\subseteq} \mathbb{N}$ τ.ω: $((A_n^{r,s},B_n^{r,s}))_{n\in M}$ συγκλίνει $\forall r<s$ ρητούς.

Έστω $\{(r_i,s_i): i\in\mathbb{N}\}$ μια αρίθμηση. Για $i=1$ από βασικό συνδυαστικό λήμμα έχουμε ότι: $\exists\, L_1 \underset{\infty}{\subseteq} \mathbb{N}$ τ.ω είτε: $((A_n^{r_1,s_1},B_n^{r_1,s_1}))_{n\in L_1}$ ~~ανεξ~~ ή συγκλίνουσα. Για $i=2$ από βασικό συνδυαστικό λήμμα για την $((A_n^{r_2,s_2},B_n^{r_2,s_2}))_{n\in L_1} \Rightarrow \exists\, L_2 \underset{\infty}{\subseteq} L_1$ τ.ω: $((A_n^{r_2,s_2},B_n^{r_2,s_2}))_{n\in L_2}$ ~~ανεξ~~ ή συγκλίνουσα. Αναδρομικά επιλέγουμε $(L_i)_{i\in\mathbb{N}}$ φθίνουσα ακολουθία $\underset{\infty}{\subseteq} \mathbb{N}$ ώστε $\forall i\in\mathbb{N}$: $((A_n^{r_i,s_i},B_n^{r_i,s_i}))_{n\in L_i}$ να είναι συγκλίνουσα.

Αν L είναι το διαγώνιο σύνολο των $L_i \Rightarrow L \subseteq_{\omega} \mathbb{N}$ και $L \setminus L_i$, πεπερασμένο $\forall i \in \mathbb{N}$ $\xRightarrow{\text{παρατήρηση}}$ $\forall i \in I: ((A_n^{r_i, s_i}, B_n^{r_i, s_i}))_{n \in L}$ συγκλίνουσα $\Rightarrow$ $\forall r<s$ ρητούς η ακολουθία $((A_n^{r,s}, B_n^{r,s}))_{n \in L}$ συγκλίνουσα $\xRightarrow{\text{λήμμα 2ο}}$ η $(f_n(x))_{n \in L}$ συγκλίνει $\forall x \in S$ (κατά σημείο).