Αλγεβρική Τοπολογία

Μάθημα 01 (13/02/2023)

Ορσ: X τ.χ και $\pi : X \to Y$ επί

Ορίζεται τοπολογία στο Y ως εξής

$U \subseteq Y$ ανοικτό $\Leftrightarrow$ $\pi^{-1}(U) \subseteq X$ ανοικτό

Αυτή η τοπολογία ονομάζεται τοπολογία πηλίκο που επάγεται από την π.

Ορσ: Έστω X, Y τ.χ και $\pi : X \to Y$. Η π ονομάζεται απεικόνιση πηλίκο αν π είναι ~~[illegible]~~, επί και η Y έχει την τοπολογία πηλίκο που επάγεται από την π.

Παρατηρήσεις

1. Κάθε απεικόνιση πηλίκο είναι συνεχής.

9) Αν π απ. πηλίκο και X συμπαγής (συνεκτικό) $\Rightarrow$ Y συμπαγής (συνεκτικός)

<u>Βασικό Παράδειγμα</u>

Έστω X τ.χ και $\sim$ μια σχέση ισοδ. στο X. <u>Συμβ</u> με $[x]$ την κλάση ισοδ. του X. και με $X/\sim$ το σύνολο πηλίκο. Θεωρούμε την φυσική προβολή $\pi: X \to X/\sim$

$x \mapsto [x]$.

Το σύνολο $X/\sim$ εφοδιασμένο με την τοπολογία πηλίκο. που λέγεται επάγεται από την π (η ταυτοποίησης).

<u>Χώρος πηλίκο</u>

<u>Ορσ</u>: Μια απεικον. $f: X \to Y$ μεταξύ δύο τ.χ. λέγεται:

- <u>ανοικτή</u>: αν απεικον. τα ανοικτά σε ανοικτά
- <u>κλειστή</u>: αν απεικον. κλειστά σε κλειστά.

Παρατήρηση (α) Αν $f: X \to Y$ συνεχής, X συμπ., Y Hausdorff $\Rightarrow$ f κλειστή. (3)

(β) Έστω X, Y τ.χ και $X \times Y$ χώρος γινόμενο. Τότε η πρώτη προβολή (αντ. η 2η). είναι ανοικτή.

Θεώρημα

① $f: X \to Y$ επί, συνεχής και ανοικτή (ή κλειστή)
$\Rightarrow$ f απεικόνιση πηλίκο.

② Αν $\pi: X \to Y$ απ. πηλίκο, B τ.χ, είναι τότε $f: Y \to B$ συνεχής $\Leftrightarrow$ $f \circ \pi: X \to B$ συνεχής.

③ Έστω $\pi: X \to Y$ απ. πηλίκο, όπου B τ.χ
$f: X \to B$ συνεχής τ.ω σε κάθε νήμα $\pi^{-1}(\{y\})$ η f να είναι σταθερή, $\forall y \in X$.

$\Rightarrow \exists!\ \tilde{\varphi}: Y \to B$ τ.ω. $\tilde{\varphi} \circ \pi = \varphi$ (4)

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "\varphi"] & \\
Y \arrow[r, dashed, "\tilde{\varphi}"'] & B
\end{tikzcd}
$$

(4) Έστω $\pi: X \to Y$ απ. πηλίκο. Ορίζουμε σχέση ισοδ. με $x \sim y \Leftrightarrow \pi(x) = \pi(y)$ και θεωρούμε τον αντ. χώρο πηλίκο $X/\sim$

$\Rightarrow X/\sim,\ Y$ είναι ομοιομορφικοί.

<u>αποδ.</u>:

(1) Ας υποθ. ότι φ είναι ανοικτή (αντ. αν φ κλειστή)

- $U \subseteq Y$ ανοικτό $\overset{\pi \text{ συν.}}{\Rightarrow} \varphi^{-1}(U) \subseteq X$ <u>ανοικτό</u>.
- Έστω $U \subseteq Y$ τ.ω. $\varphi^{-1}(U) \subseteq X$ ανοικτό

$\Rightarrow U \underset{\underline{\varphi \text{ επί}}}{\overset{3,}{=}} \varphi(\varphi^{-1}(U)) \underset{\varphi \text{ ανοικτή}}{\subseteq} Y$ <u>ανοικτό</u>

(2) $(\Rightarrow)$ άμεσο $(\Leftarrow)$ Έστω $U \subseteq B$ ανοικτό

<u>ανοικτό</u> $\Rightarrow (\varphi \circ \pi)^{-1}(B) \subseteq X$ ανοικτό

$\Rightarrow \pi^{-1}(\varphi^{-1}(B)) \subseteq X$ "

$\overset{①}{\Rightarrow} \varphi^{-1}(U) \subseteq Y$ <u>ανοικτό</u> (5)

③ Έστω $y \in Y \Rightarrow \exists x \in X : \pi(x) = y$ (π επί)

Ορίζουμε $\tilde{\varphi} : Y \to B : \tilde{\varphi}(y) = \varphi(x)$

• $\tilde{\varphi}$ είναι καλά ορσ. αφού φ είναι σταθερή σε κάθε νήμα. και συνε-

Εξ' ορισμού $\tilde{\varphi} \circ \pi = \varphi$

χής από ②.

<u>Μοναδικότητα</u>: αν $g : Y \to B$ με $g \circ \pi = \varphi \Rightarrow$

$g(y) = g \circ \pi(x) = \varphi(x) = \tilde{\varphi} \circ \pi(x) = \tilde{\varphi}(y)$

④ Έστω $[x]$ η κλάση ισοδ. του $x \in X$ και $\varphi : X \to X/\sim$ η αντιστοιχη απ. πηλίκο $x \mapsto [x]$

Παρατηρούμε ότι η π διατηρεί τα νήματα της φ και η φ διατηρεί τα νήματα της π.

$\overset{③}{\Rightarrow} \exists! \ \tilde{\varphi} : Y \to X/\sim$ συνεχείς τ.ω. $\tilde{\varphi} \circ \pi = \varphi$, $g \circ \varphi = \pi$

$g : X/\sim \to Y$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "\varphi"] & \\ Y \arrow[r, bend left, "\tilde{\varphi}"] & X/\sim \arrow[l, bend left, "g"] \end{tikzcd}$$

~~$\tilde{\varphi}\circ g(y) = \tilde{\varphi}\circ g\circ \pi(x)$~~

$\tilde{\varphi}\circ g([x]) = \tilde{\varphi}\circ g\circ \varphi(x)$

$= \tilde{\varphi}\circ \pi(x) = \varphi(x) = [x]$

$\Rightarrow \tilde{\varphi}\circ g = id_{X/\sim}$. Ομοίως $g\circ\tilde{\varphi} = id_Y$

$\Rightarrow \tilde{\varphi}$ ομοιομορφισμός. □

Παραδείγματα:

① Στο $\mathbb{R}$ ορίζουμε σχέση

ισοδ: $x\sim y \Leftrightarrow x-y\in\mathbb{Z}$.

Ορίζουμε $\varphi: \mathbb{R}\to S^1$ με $\varphi(x) = e^{2\pi i x}$. Η φ είναι επί συνεχής και ανοικτή. (απεικονίζει το (x_1, x_2) στο ανοικτό τόξο του κύκλου μεταξύ των γωνιών $2\pi x_1, 2\pi x_2$).

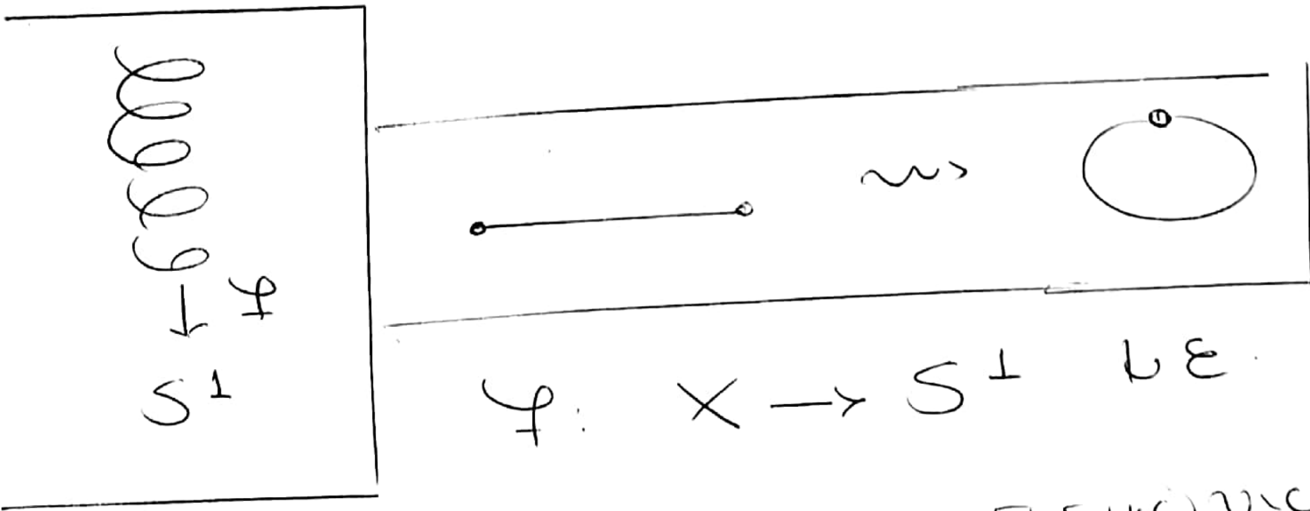
$\Rightarrow \varphi$ είναι απεικόνιση πηλίκο.

Επίσης, $x\sim y \Leftrightarrow \varphi(x) = \varphi(y)$

Θ $\Rightarrow \mathbb{R}/\sim \;\cong S^1$.

(2) Έστω $X=[0,1]$. Τότε

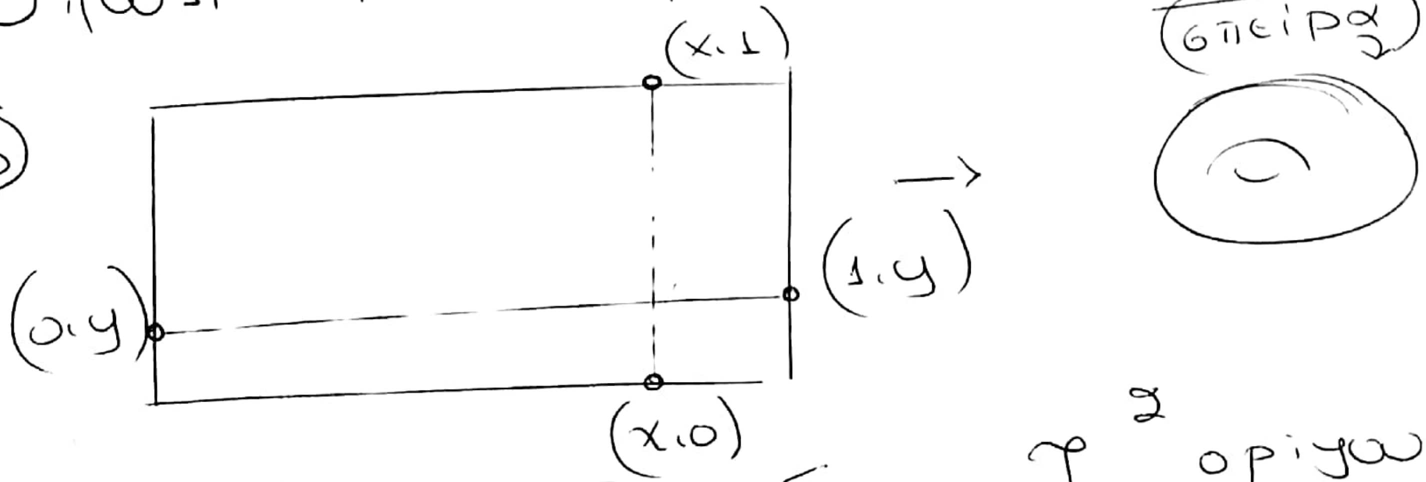
$X/_{0\equiv 1} \cong S^1$ / κλάσεις ισοδ. $\{0,1\}$, $\{x\}$, $x \neq 0,1$



$\varphi : X \to S^1$ με $\varphi(x) = e^{2\pi i x}$ είναι απεικόνιση πηλίκο (επί, συνεχής και κλειστή αφού $[0,1]$ συμπ., S^1 Hausdorff)

Όπως πριν $X/_{0=1} \cong S^1$

(3)



$T^2 = [0,1]\times[0,1]$. Στο T^2 ορίζω- με σχέση ισοδ.: $(x,1)\sim(x,0)$

$(0,y)\sim(1,y) \Rightarrow T^2/_{\sim} \cong S^1 \times S^1$

Πράγματι θεωρούμε

$f: I^2 \to S^1 \times S^1$

$f(x,y) = (e^{2\pi i x}, e^{2\pi i y})$

f συνεχής, επί, κλειστή

$\Rightarrow$ f απ. πηλίκο. Είναι άμεσο ότι $(x,y) \sim (x',y') \iff f(x,y) = f(x',y')$

$\overset{(4)}{\Rightarrow}$ $I^2/_{\sim} \cong S^1 \times S^1$.

(4) Χώροι Τροχιών

Έστω X τ.χ. και G μια ομάδα η οποία δρα επί του X με ομοιομορφισμούς.

$e: G \to \mathrm{Homeo}(X)$, $g * x = e(g)(x)$

Στον χώρο X ορίζεται σχέση ισοδυναμίας $\sim$ (μέσω της δράσης) (έχουμε: $x \sim y \iff G(x) = G(y)$ (ίδια τροχιά) $\iff x = g * y$, $g \in G$.

Ο αντίστοιχος χώρος πηλίκο

$X/\sim$ συμβολίζεται με X/G

- $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1$, $\dfrac{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} \cong S^1 \times S^1$

δράση ; δράση ;